АННОТАЦИЯ

Гомологическая алгебра — недавно возникшая и бурно развивающаяся ветвь современной алгебры — занимается изучением алгебраических объектов методами теории гомологий, заимствованными из топологии.

Значение предлагаемой книги для этой области математики трудно переоценить; можно сказать, что только с ее появлением гомологическая алгебра стала вполне определившейся научной дисциплиной. Книга чрезвычайно богата новыми идеями и результатами, причем изложение всегда очень четкое и доступное.

Знакомство с этой книгой необходимо каждому математику, желающему быть в курсе последних достижений современной алгебры.

Редакция литературы по математическим наукам

А. Картан и С. Эйленберг

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Редактор Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ
Художник *М. Д. Кислиновская*
Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 28/II — 1959 г.
Подписано к печати 16/I — 1960 г.
Бумага 60×92/16 = 16,0 бум. л.
32,0 печ. л.,
Уч.-изд. л. 28,60. Изд. № 1/3487
Цена 22 р. Зак. 1074

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская. 52.

Типография Академии, Будапешт

все права гражданства. Впрочем, и здесь оно рассматривается не в полной общности, а лишь в той мере, в какой это необходимо для основной цели книги. Все же, изложенные в этой книге построения, а еще больше некоторые работы последних лет, явно испирированные книгой Картана и Эйленберга, отчетливо показывают, что, несмотря на большую общность понятия функтора, оно допускает плодотворное изучение; теория функторов не исчерпывается парой тривиальных теорем, легко вытекающих из определения, а вырастает в разветвленную математическую теорию, содержащую глубокие и подчас не легко получаемые результаты.

Основное внимание авторы уделяют так называемым производным функторам. Оказывается, что группы гомологий различных алгебраических объектов являются некоторыми производными функторами, а основные общие свойства этих групп — специализациями соответствующих общих свойств производных функторов. С этой точки зрения гомологическую алгебру (по крайней мере на уровне, достигнутом ею ко времени написания этой книги) можно определить как ветвь алгебры, изучающую производные функторы. Возможность дать такого рода четкое определение еще раз показывает, что гомологическая алгебра выросла в самостоятельную дисциплину.

Книга так богата идеями и результатами, что в рамках краткого предисловия невозможно охватить ее содержание даже в самых общих чертах; некоторое представление о нем можно получить из предисловия авторов и оглавления. Читатель не должен рассчитывать найти в этой книге изложение современного состояния гомологической алгебры во всех ее аспектах. Книга посвящена изложению общих конструкций, приводящих к понятию групп гомологий (и когомологий), и выяснению связей между различными их специализациями. В каждом конкретном случае (например, в случае конечных групп) описываются соответствующие специализации общих понятий и специфические их свойства (если таковые существуют). Как правило, никаких приложений введенных понятий к конкретным вопросам соответствующего отдела алгебры в книге не приводится (за исключением самых простых и поверхностных), что вполне естественно, ибо эти приложения относятся уже не к гомологической алгебре, а к теории групп, алгебр и т. д.

В книге изложены также основы алгебраической теории спектральных последовательностей, играющих такую важную роль во многих вопросах современной топологии. Приложения спектральных последовательностей к вопросам гомологической алгебры лишь намечены в последней главе. Здесь явно открывается большой простор для дальнейших исследований.

Авторы ограничились рассмотрением функторов от модулей, хотя совершенно ясно, что основные результаты книги могут быть перенесены в весьма широкий класс абстрактных категорий. Этим вопросам в американском издании книги посвящено Дополнение, написанное Д. Буксбаумом. Поскольку это Дополнение является, по существу, кратким конспектом появившейся несколько позже более подробной статьи[1] Буксбаума, было признано целесообразным заменить его переводом этой статьи. Отметим, что на абстрактные категории можно перенести не только основное содержание гомологической алгебры, но и такие более классические вещи, как теория прямых разложений и т. п.

Несмотря на то, что авторами этой книги являются известные топологи, книга имеет чисто алгебраический характер, почти не содержит топологических применений и ориентирована в первую очередь на читателя-алгебраиста. Появление ее американского издания уже дало мощный толчок исследованиям по рассматриваемым в ней вопросам. Знакомство с этой книгой необходимо каждому алгебраисту, желающему следить за развитием своей науки и быть в курсе ее последних достижений. Это важно, в частности, для советских алгебраистов, так как, хотя исходные определения групп гомологий абстрактных групп были одновременно предложены в Америке и у нас, дальнейшее развитие гомологической алгебры (особенно в ее общих, принципиальных аспектах) происходило в основном за рубежом.

М. М. Постников

---

[1] Buchsbaum D. A., Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1—34.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

В течение последнего десятилетия методы алгебраической топологии, интенсивно вторгаясь в область чистой алгебры, привели, можно сказать, к ряду внутренних революций в этой области математики. В настоящей книге ставится цель изложить алгебраический аспект этих методов с единой точки зрения и заложить тем самым основы вполне самостоятельной теории.

Вторжение методов алгебраической топологии в алгебру происходило в трех направлениях — через теории когомологий групп, алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Эти три теории, несмотря на наличие далеко идущего параллелизма, долгое время развивались независимо друг от друга. Мы излагаем здесь единую теорию когомологий (а также и гомологий), включающую в себя все три упомянутые теории; каждая из этих трех теорий получается из общей теории соответствующей специализацией.

Такая унификация обладает всеми обычными преимуществами. Три различных доказательства заменяются одним. Кроме того, общая теория позволяет обнаружить некоторые не известные до сих пор взаимосвязи; при этом каждая из трех теорий обогащается двумя другими.

Эта единая теория способна охватить гораздо более широкую область, отнюдь не исчерпывающуюся указанными выше тремя случаями. Например, оказывается, что теорема Гильберта о цепях сизигий в кольце многочленов от n переменных (а также и другие аналогичные теоремы) по существу является некоторой теоремой теории гомологий.

Начальным толчком, побудившим, в частности, нас к этим исследованиям, послужила следующая топологическая задача. Около тридцати лет назад Кюннет получил некоторые соотношения между группами гомологий прямого произведения и группами гомологий сомножителей в форме числовых соотношений между их числами Бетти и коэффициентами кручения. Интересовавшая нас задача состояла в том, чтобы усилить его результаты, представив их в инвариантной теоретико-групповой форме. Эта задача немедленно сводится к чисто алгебраической проблеме вычисления групп гомологий тензорного произведения двух (алгебраических) комплексов. Оказывается, что выражение для групп гомологий тензорного произведения двух комплексов содержит не только тензорное произведение групп гомологий сомножителей, но также и некоторое другое их произведение, которое мы называем *периодическим*. Периодическое умножение является некоторой новой операцией, определяемой с помощью операции тензорного умножения. Нашей исходной точкой явилось замечание о том, что процесс построения периодического умножения из тензорного допускает обобщение, применимое к весьма широкому классу функторов. В частности, путем многократного повторения этого процесса можно из одного данного функтора получить целую последовательность новых функторов. Получающаяся при этом последовательность обладает многими формальными свойствами, известными из теории гомологий. Опишем этот процесс более подробно.

Пусть Λ — произвольное кольцо, A — некоторый Λ-модуль, на котором Λ-операторы действуют справа (т. е. правый Λ-модуль) и C — некоторый левый Λ-модуль. Основной операцией является построение тензорного произведения $A \otimes_\Lambda C$, т. е. абелевой группы, порожденной парами $a \otimes c$, подчиняюшимися двум дистрибутивным законам и соотношению $a\lambda \otimes c = a \otimes \lambda c$. Для многих вопросов очень важно изучить свойства этой операции по отношению к обычным алгебраическим понятиям: гомоморфизмам, подмодулям, фактормодулям и т. д.

Это изучение существенно облегчается при использовании метода диаграмм. Последовательность Λ-модулей и Λ-гомоморфизмов

$$A_m \longrightarrow A_{m+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_n, \qquad m+1 < n,$$

мы будем называть *точной последовательностью*, если для любой пары последовательных гомоморфизмов образ первого гомоморфизма совпадает с ядром второго. Мы будем, в частности, рассматривать точные последовательности вида

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0. \tag{1}$$

В такой точной последовательности модуль A' можно рассматривать как подмодуль модуля A, а модуль A'' — как фактормодуль модуля A по подмодулю A'.

Тензорно умножив каждый член некоторой точной последовательности правых Λ-модулей на фиксированный левый Λ-модуль C, мы, вообще говоря, не получим точной последовательности. При таком умножении точность сохраняется лишь частично. Например, в случае последовательности (1) точной всегда будет лишь последовательность

$$A' \otimes_\Lambda C \longrightarrow A \otimes_\Lambda C \longrightarrow A'' \otimes_\Lambda C \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Функторы, обладающие этим свойством, мы будем называть *точными справа функторами*.

Ядро K левого гомоморфизма последовательности (2) в общем случае отлично от нуля. Если модуль A свободен, то можно показать, что это ядро зависит (с точностью до естественного изоморфизма) только от модулей A'' и C, и мы называем его периодическим произведением $\operatorname{Tor}_1^A(A'', C)$ модулей A'' и C. В случае произвольного модуля A имеет место естественный гомоморфизм

$$\operatorname{Tor}_1^A(A'', C) \longrightarrow A' \otimes_A C,$$

образ которого совпадает с ядром K. Продолжая это построение, мы получим бесконечную точную последовательность

$$(3) \quad \ldots \longrightarrow \operatorname{Tor}_{n+1}^A(A'', C) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^A(A', C) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^A(A, C) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^A(A'', C) \longrightarrow \ldots,$$

заканчивающуюся справа последовательностью (2); при этом считается, что

$$(4) \qquad \operatorname{Tor}_0^A(A, C) = A \otimes_A C.$$

Гомоморфизмы точной последовательности (3), связывающие модули с индексами $n+1$ и n, называются *связывающими гомоморфизмами*.

При определении модуля $\operatorname{Tor}(A'', C)$ условие, что модуль A свободен, излишне стеснительно. Достаточно, чтобы модуль A был *проективным*, т. е. чтобы любой гомоморфизм модуля A в произвольный фактормодуль B/B' допускал разложение в сквозное отображение $A \to B \to B/B'$.

Описанное индуктивное построение точной последовательности (3) довольно громоздко и не имеет четко выраженной связи с теорией гомологий. Этот недостаток устраняется следующим образом. Для произвольного модуля A рассматривается точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

каждый член A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) которой является проективным модулем; такая последовательность называется *проективной резольвентой* модуля A. Тензорно умножая эту резольвенту на модуль C, мы получим некоторую, вообще говоря, неточную последовательность

$$(5) \qquad \ldots \longrightarrow A_n \otimes_A C \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_0 \otimes_A C.$$

Однако эта последовательность будет комплексом (т. е. композиция любых двух последовательных гомоморфизмов этой последовательности равна нулю). Оказывается, что n-я группа гомологий комплекса (5) совпадает с группой $\operatorname{Tor}_n^A(A, C)$. С точки зрения этого определения функтора Tor точная последовательность (3) является гомологической последовательностью, соответствующей точной последовательности комплексов

$$0 \longrightarrow X' \otimes_A C \longrightarrow X \otimes_A C \longrightarrow X'' \otimes_A C \longrightarrow 0,$$

где X', X, X'' — произвольные проективные резольвенты модулей A', A, A'' соответственно.

Основное свойство функтора Tor состоит в следующем:

(6) $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) = 0$, если $n > 0$ и модуль A проективен.

В действительности этого свойства, вместе с требованием точности последовательности (3), свойством (4) и обычными формальными свойствами функторов, достаточно для аксиоматического описания функторов Tor_n^{Λ}.

В изложенных определениях функторов $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C)$ аргументы A и C входят неравноправно, ибо аргументу C с самого начала придается некоторое фиксированное значение. Однако аналогичное построение, при котором постоянное значение сохраняет аргумент A, приводит к тем же функторам $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C)$. Эта «симметричность» функтора $A \otimes_{\Lambda} C$ особенно отчетливо проявляется в возможности дать определение функтора Tor, в котором одновременно используются проективные резольвенты обоих модулей A и C. Эту симметрию не следует смешивать с симметрией, вытекающей из естественного изоморфизма $A \otimes_{\Lambda} C \approx C \otimes_{\Lambda} A$, имеющего место только тогда, когда кольцо Λ коммутативно.

Другой функтор, не менее важный, чем тензорное умножение, задается группой $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C)$ всех Λ-гомоморфизмов левого Λ-модуля A в левый Λ-модуль C. Этот функтор контравариантен по аргументу A, ковариантен по аргументу C и *точен слева*, т. е. при применении этого функтора к точной последовательности (1) получается точная последовательность

(2′) $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A'', C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A', C).$$

Так же, как для функтора $A \otimes_{\Lambda} C$, можно для функтора $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C)$ построить точную последовательность

(3′) $$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^n(A'', C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^n(A, C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^n(A', C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A'', C) \longrightarrow \ldots,$$

начинающуюся с последовательности (2′); при этом считается, что

(4′) $$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^0(A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C).$$

Этих свойств в совокупности со свойством

(6′) $\mathrm{Ext}^n(A, C) = 0$, если $n > 0$ и модуль A проективен,

и обычными формальными свойствами функторов достаточно для аксиоматического описания функторов $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^n(A, C)$.

В изложенном определении аргументы A и C также входят неравноправно, ибо аргументу C с самого начала придается некоторое фиксированное значение. И здесь имеет место симметрия, т. е. тот же самый функтор можно получить, считая переменным аргумент C и постоянным аргумент A. Однако в этом случае вместо проективных модулей и проективных резольвент необходимы двойственные им понятия инъективных модулей и инъективных резольвент. Модуль C называется *инъективным*, если любой гомоморфизм $B' \to C$ можно продолжить до некоторого гомоморфизма $B \to C$, где B — произвольный модуль, содержащий в качестве подмодуля модуль B'. Инъективной резольвентой модуля C называется точная последовательность

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^n \longrightarrow C^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

в которой каждый модуль C^i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ инъективен.

Покажем теперь, как с помощью функторов Tor и Ext можно с единой точки зрения построить теории когомологий групп, алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

Пусть Π — произвольная (мультипликативная) группа, а C — некоторая (аддитивная) абелева группа, для которой группа Π служит группой левых операторов. Мы можем группу C рассматривать как левый $Z(\Pi)$-модуль, где $Z(\Pi)$ — групповое кольцо группы Π над кольцом Z целых чисел. Группу Z целых чисел мы также можем рассматривать как левый $Z(\Pi)$-модуль, предполагая, что каждый элемент группы Π определяет тождественное преобразование группы Z. *Группами когомологий группы Π с коэффициентами в модуле* C являются группы

$$H^q(\Pi, C) = \mathrm{Ext}^q_{Z(\Pi)}(Z, C).$$

Эти группы когомологий впервые были введены Эйленбергом и Маклейном [Eilenberg S., MacLane S., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29** (1943), 155—158] в связи с некоторыми топологическими исследованиями[1]. Впоследствии эти группы нашли себе многочисленные применения как в топологии, так и в алгебре; некоторые из этих применений мы рассматриваем в гл. XIV и XVI. Совсем недавно теория когомологий конечных групп была значительно обогащена исследованиями Артина и Тэйта; основные результаты этих новых исследований излагаются в гл. XII. Наиболее успешно теория когомологий конечных групп применяется в теории Галуа и в теории полей классов. Однако, поскольку как теория Галуа, так и теория полей классов представляют собой большие вполне самостоятельные разделы алгебры, мы даже и не пытаемся рассматривать здесь эти приложения, хотя в книге содержатся почти все необходимые для этого результаты из теории когомологий групп.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над коммутативным кольцом K, а C — модуль некоторого ее (левого) представления. Мы можем модуль C рассматривать как левый $\mathfrak{g}^e$-модуль, где $\mathfrak{g}^e$ — обертывающая (ассоциативная) алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как основ-

[1] Эти группы были независимо введены с чисто алгебраической точки зрения (как группы классов обобщенных систем факторов) Д. К. Фаддеевым [*ДАН СССР*, **58**, № 3 (1947), 361—364]. — *Прим. ред.*

ное кольцо K является модулем тривиального представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то мы его также можем рассматривать как левый $\mathfrak{g}^e$-модуль. *Группами когомологий алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с коэффициентами в модуле* C являются группы

$$H^q(\mathfrak{g}, C) = \operatorname{Ext}^q_{\mathfrak{g}^e}(K, C).$$

Группы когомологий алгебр Ли, неявно рассматривавшиеся в работах Э. Картана, впервые были четко определены Шевалле и Эйленбергом [Chevalley C., Eilenberg S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124]. Теорию когомологий алгебр Ли мы излагаем в гл. XIII; однако при этом мы совершенно не касаемся наиболее существенных ее приложений к теории полупростых алгебр Ли и компактных групп Ли.

Пусть Λ — произвольная ассоциативная алгебра (с единицей) над некоторым коммутативным кольцом K, а A — произвольный двусторонний Λ-модуль. Мы можем двусторонний Λ-модуль A рассматривать как левый Λ^e-модуль, где $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^*$ — обертывающая алгебра алгебры Λ (здесь Λ^* — алгебра, «противоположная» алгебре Λ). Так как алгебра Λ сама является двусторонним Λ-модулем, то ее также можно рассматривать как левый Λ^e-модуль. *Группами когомологий ассоциативной алгебры* Λ *с коэффициентами в двустороннем* Λ-*модуле* A являются группы

$$H^q(\Lambda, A) = \operatorname{Ext}^q_{\Lambda^e}(\Lambda, A).$$

Теория когомологий ассоциативных алгебр была построена Хохшильдом по образцу теории когомологий групп [Hochschild G., *Ann. of Math.*, **46** (1945), 58—67]. В основном полное изложение имеющихся результатов этой теории приведено в гл. IX.

Во всех трех перечисленных случаях совершенно аналогично с помощью функтора Tor можно определить и группы гомологий.

До сих пор мы имели дело лишь с функторами $A \otimes_\Lambda C$ и $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, C)$ и их производными функторами Tor и Ext. Однако часто бывает полезно рассматривать и другие функторы. Мы развиваем в гл. II—V соответствующую общую теорию, пригодную для любых *аддитивных* функторов. В этих главах мы в общем виде рассматриваем оба процесса, с помощью которых строится функтор Tor. Первый, более медленный, хотя и элементарный, индуктивный процесс приводит к понятию *сателлитов* функторов (гл. III). Второй, более быстрый, гомологический метод, использующий резольвенты, приводит к понятию *производных функторов* (гл. V). Для наиболее важных функторов (в том числе для функторов $\otimes$ и Hom) оба эти процесса приводят к одним и тем же результатам.

Начиная с гл. VI, мы прекращаем изучение общих функторов и сосредоточиваем все наше внимание на функторах Tor и Ext. Основные результаты, относящиеся к построению теорий гомологий, излагаются в гл. VIII—XIII.

Последние три главы (XV—XVII) посвящены спектральным последовательностям, которые являются одним из основных орудий современной алгебраической топологии. В гл. XV излагается общая теория спектральных последовательностей, а в следующих двух главах эта общая теория применяется к различным вопросам, рассматривавшимся в предыдущих главах.

В конце книги помещено Добавление, написанное Давидом А. Буксбаумом, в котором в общих чертах указывается, каким образом можно ввести понятия сателлитов и производных функторов в существенно более абстрактной ситуации[1].

Каждая глава начинается с краткого введения и завершается более или менее трудными упражнениями. В книге нет общего библиографического указателя; ссылки на литературу делаются по мере надобности в тексте. При ссылках внутри книги мы придерживаемся следующего правила. Если ссылка, например, на теорему 2.1 из гл. X делается в этой же главе, то просто пишется «теорема 2.1»; если же эта ссылка делается в другой главе, то пишется «теорема X, 2.1». Аналогично «формула VIII, 3, (8)» означает ссылку на формулу (8) из § 3 главы VIII.

Мы пользовались помощью нескольких наших коллег: Д. А. Буксбаума и Р. Л. Тейлора, тщательно прочитавших рукопись и давших нам много полезных советов; Г. П. Хохшильда и Дж. Тэйта, с помощью которых была написана гл. XII; Ж.-П. Серра и Н. Э. Стинрода, которым мы обязаны рядом ценных советов и критических замечаний.

А. Картан,
С. Эйленберг

Парижский университет,
Колумбийский университет,
Сентябрь 1953 года

[1] Как уже указывалось (см. стр. 7), в настоящее издание вместо этого Добавления включен перевод более поздней статьи Буксбаума. — *Прим. ред.*

ГЛАВА I

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Введение. После изложения некоторых элементарных сведений о модулях, гомоморфных отображениях, прямых суммах, прямых произведениях и точных последовательностях вводятся понятия проективных и инъективных модулей, имеющих в этой книге первостепенное значение. В частности, здесь показывается, что каждый модуль можно рассматривать как фактормодуль некоторого проективного модуля и как подмодуль некоторого инъективного модуля.

В § 4—7 рассматриваются некоторые специальные классы колец, а именно: полупростые, наследственные, полунаследственные и нетеровы кольца. Позднее (в гл. VII) будет показано, что для областей целостности понятие наследственного (полунаследственного) кольца в точности совпадает с понятием дедекиндова (соответственно прюферова) кольца.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$. Мы будем рассматривать (левые) *модули* над кольцом Λ, т. е. абелевы группы A, в которых определена дополнительная операция, сопоставляющая каждой паре элементов $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$ некоторый элемент $\lambda a \in A$ и обладающая следующими свойствами:

$$\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2, \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)\, a = \lambda_1 a + \lambda_2 a,$$
$$(\lambda_1\lambda_2)a = \lambda_1(\lambda_2 a), \qquad 1a = a.$$

Модуль, состоящий из одного нулевого элемента, мы будем обозначать через 0.

В частном случае, когда Λ есть кольцо целых чисел Z, модули над кольцом Λ являются обычными абелевыми группами. В другом частном случае, когда кольцо Λ является телом (или полем), Λ-модулями[1] будут линейные пространства над Λ.

[1] Вместо выражения «модуль над кольцом Λ» часто используется выражение «Λ-модуль». — *Прим. перев.*

Гомоморфным или *линейным отображением* (а также просто *гомоморфизмом*) Λ-модуля A в Λ-модуль B называется такая функция f, определенная на модуле A и принимающая значения в модуле B, что

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для любых элементов $x, y \in A$, $\lambda \in \Lambda$. Запись $f: A \to B$ будет означать, что f является гомоморфным отображением модуля A в модуль B. Если ясно, о каком гомоморфизме идет речь, то мы будем вместо $f: A \to B$ писать просто $A \to B$. *Ядром* гомоморфного отображения f называется подмодуль модуля A, состоящий из всех таких элементов $x \in A$, что $f(x) = 0$; ядро гомоморфного отображения f обозначается через $\mathrm{Ker}\,(f)$ или $\mathrm{Ker}\,(A \to B)$. *Образом* гомоморфного отображения f называется подмодуль модуля B, состоящий из всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$; образ гомоморфного отображения f обозначается через $\mathrm{Im}\,(f)$ или $\mathrm{Im}\,(A \to B)$.

Мы определим также *кообраз* и *коядро* гомоморфного отображения f, положив соответственно

$$\mathrm{Coim}\,(f) = A/\mathrm{Ker}\,(f),$$
$$\mathrm{Coker}\,(f) = B/\mathrm{Im}\,(f).$$

Гомоморфизм f индуцирует, очевидно, изоморфное отображение кообраза $\mathrm{Coim}\,(f)$ на образ $\mathrm{Im}\,(f)$. Ввиду этого понятие кообраза используется очень редко.

Отображение $f: A \to B$ называется *мономорфным отображением* (или *мономорфизмом*), если $\mathrm{Ker}\,(f) = 0$; оно называется *эпиморфным отображением* (или *эпиморфизмом*), если $\mathrm{Coker}\,(f) = 0$ или, что равносильно, если $\mathrm{Im}\,(f) = B$. Отображение f, одновременно эпиморфное и мономорфное, является *изоморфным* отображением; в этом случае мы будем писать $f: A \approx B$.

Пусть A — произвольный Λ-модуль и $\{A_\alpha\}$ — некоторое конечное или бесконечное семейство Λ-модулей. Систему $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ гомоморфизмов

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha$$

мы будем называть *прямой*, если для любого α гомоморфизм $p_\alpha i_\alpha$ является тождественным отображением и $p_\beta i_\alpha = 0$, если $\beta \neq \alpha$.

Если, кроме того, каждый элемент $x \in A$ можно записать в виде конечной суммы $x = \sum i_\alpha x_\alpha$[1], где $x_\alpha \in A_\alpha$, то, как легко проверить, модуль A изоморфен прямой сумме $\sum A_\alpha$ модулей A_α, и мы будем говорить, что система $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ *определяет представление модуля A в виде прямой суммы модулей A_α*. В этом случае гомоморфизмы $\{p_\alpha\}$ однозначно определяются гомоморфизмами $\{i_\alpha\}$.

[1] Если f — некоторое отображение, то вместо $f(x)$ здесь часто пишется fx.— *Прим. перев.*

Если же произвольному семейству элементов $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in A_\alpha$, однозначно соответствует такой элемент $x \in A$, что $p_\alpha x = x_\alpha$ для всех α, то, как нетрудно убедиться, модуль A изоморфен прямому произведению[1] ΠA_α модулей A_α, и мы будем говорить, что система $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ *определяет представление модуля A в виде прямого произведения модулей A_α*. В этом случае гомоморфизмы $\{i_\alpha\}$ однозначно определяются гомоморфизмами $\{p_\alpha\}$.

Если семейство модулей $\{A_\alpha\}$ конечно, то понятия прямой суммы и прямого произведения совпадают. Конечная прямая система гомоморфизмов $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ тогда и только тогда определяет представление модуля A в виде прямой суммы (или, что в данном случае равносильно, в виде прямого произведения) модулей A_α, когда гомоморфизм $\sum i_\alpha p_\alpha$ является тождественным отображением.

Последовательность гомоморфизмов

$$A_m \longrightarrow A_{m+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_n, \qquad m+1 < n,$$

называется *точной*, если $\operatorname{Im}(A_{q-1} \to A_q) = \operatorname{Ker}(A_q \to A_{q+1})$ для всех $q = m+1, \ldots, n-1$. В частности, отображение $A \to B$ тогда и только тогда мономорфно, когда точна последовательность $0 \to A \to B$; аналогично отображение $A \to B$ тогда и только тогда эпиморфно, когда точна последовательность $A \to B \to 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать также и бесконечные (влево, вправо, в обе стороны) последовательности гомоморфизмов.

Часто мы будем рассматривать точные последовательности вида

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0.$$

Поскольку отображение $A' \to A$ является мономорфизмом, мы можем рассматривать модуль A' как подмодуль модуля A. Поскольку отображение $A \to A''$ является эпиморфизмом и ядром его служит подмодуль A', мы можем отождествить модуль A'' с фактормодулем A/A'. Таким образом, последовательность (*) можно представить в виде

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A/A' \longrightarrow 0.$$

Точная последовательность (*) называется *расщепляемой*, если подмодуль $\operatorname{Im}(A' \to A)$ является прямым слагаемым модуля A. В этом случае существуют гомоморфизмы $A'' \to A \to A'$, определяющие вместе с гомоморфизмами $A' \to A \to A''$ представление модуля A в виде прямой суммы.

Модуль F называется *свободным*, если в нем существует такое подмножество элементов X, что каждый элемент $x \in F$ можно одно-

[1] Вместо термина «прямое произведение» часто, особенно в отечественной алгебраической литературе, используется термин «полная (иногда «сильная») прямая сумма». — *Прим. перев.*

значно представить в виде конечной суммы $x = \sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \in \Lambda$, $x_i \in X$; подмножество X называется *базой* свободного модуля F.

Пусть X — произвольное множество. Совокупность F_X всех формальных конечных сумм $\sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \in \Lambda$, $x_i \in X$, является, очевидно, свободным модулем с базой X (каждый элемент $x \in X$ мы отождествляем с элементом $1x \in F_X$). В частности, принимая за X некоторый модуль A, мы можем таким образом построить свободный модуль F_A. Тождественное отображение базы модуля F_A на модуль A допускает продолжение до некоторого гомоморфизма $F_A \to A$. Обозначая через R_A ядро этого гомоморфизма, мы получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow R_A \longrightarrow F_A \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

состоящая из модулей и их гомоморфных отображений, называется *коммутативной*, если сквозные отображения $A \to B \to D$ и $A \to C \to D$ совпадают. Аналогично треугольная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$$

называется коммутативной, если гомоморфизм $A \to C$ совпадает со сквозным отображением $A \to B \to C$.

В дальнейшем нам встретятся и более сложные диаграммы, состоящие из нескольких квадратов и треугольников. Эти диаграммы мы будем называть коммутативными, если коммутативны все их квадратные и треугольные компоненты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (Лемма о пяти гомоморфизмах). *Пусть строки коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_{-1} & \xrightarrow{f_{-1}} & A_{-2} \\ \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle h_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h_{-2}} \\ B_2 & \xrightarrow[g_2]{} & B_1 & \xrightarrow[g_1]{} & B_0 & \xrightarrow[g_0]{} & B_{-1} & \xrightarrow[g_{-1}]{} & B_{-2} \end{array}$$

являются точными последовательностями. Тогда, если

(1) $\quad \mathrm{Coker}\,(h_2) = 0, \quad \mathrm{Ker}\,(h_1) = 0, \quad \mathrm{Ker}\,(h_{-1}) = 0,$

то $\mathrm{Ker}\,(h_0) = 0$.

Если же

(2) $\quad \mathrm{Coker}\,(h_1) = 0, \quad \mathrm{Coker}\,(h_{-1}) = 0, \quad \mathrm{Ker}\,(h_{-2}) = 0,$

то $\mathrm{Coker}\,(h_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеют место условия (1), и пусть $a \in \operatorname{Ker}(h_0)$. Тогда $g_0 h_0 a = 0$, т. е. $h_{-1} f_0 a = 0$. Поэтому $f_0 a = 0$ и, следовательно, существует такой элемент $a' \in A_1$, что $a = f_1 a'$. Так как $g_1 h_1 a' = h_0 f_1 a' = h_0 a = 0$, то существует такой элемент $b \in B_2$, что $h_1 a' = g_2 b$. Но $b = h_2 a''$, где $a'' \in A_2$. Поэтому

$$h_1 f_2 a'' = g_2 h_2 a'' = g_2 b = h_1 a',$$

откуда следует, что $a' = f_2 a''$. Таким образом, $a = f_1 a' = f_1 f_2 a'' = 0$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

2. ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Модуль P называется *проективным*, если для любого гомоморфизма $f: P \to A''$ и любого эпиморфизма $g: A \to A''$ существует такой гомоморфизм $h: P \to A$, что $f = gh$. На языке диаграмм это означает, что каждую диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной строкой $A \to A'' \to 0$ можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Прямая сумма модулей тогда и только тогда является проективным модулем, когда проективно каждое прямое слагаемое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ — представление некоторого модуля P в виде прямой суммы модулей $\{P_\alpha\}$, и пусть $g: A \to A''$ — произвольный эпиморфизм. Предположим сначала, что модуль P проективен, и рассмотрим произвольный гомоморфизм $f: P_\alpha \to A''$. Так как $fp_\alpha : P \to A''$ и модуль P проективен, то существует такой гомоморфизм $h: P \to A$, что $fp_\alpha = gh$. Тогда $ghi_\alpha = fp_\alpha i_\alpha = f$. Таким образом, модуль P_α проективен.

Предположим теперь, что все модули P_α проективны, и рассмотрим произвольный гомоморфизм $f: P \to A''$. Так как $fi_\alpha : P_\alpha \to A''$, то существует такой гомоморфизм $h_\alpha : P_\alpha \to A$, что $fi_\alpha = gh_\alpha$. Гомоморфизмы h_α однозначно определяют такой гомоморфизм $h: P \to A$, что $hi_\alpha = h_\alpha$, и, следовательно, $fi_\alpha = ghi_\alpha$ для каждого индекса α. Отсюда вытекает, что $f = gh$. Таким образом, модуль P проективен.

ТЕОРЕМА 2.2. *Модуль P тогда и только тогда проективен, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$0 \to R_P \to F_P \to P \to 0$$

— построенная в § 1 точная последовательность. Если модуль P проективен, то существует такой гомоморфизм $P \to F_P$, что сквозной гомоморфизм $P \to F_P \to P$ является тождественным отображением. Следовательно, наша точная последовательность расщепляема, так что модуль P служит прямым слагаемым свободного модуля F_P. Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, что каждое прямое слагаемое свободного модуля является проективным модулем. В силу предложения 2.1 для этого достаточно доказать, что любой свободный модуль проективен.

Пусть F — свободный модуль с базой $\{x_a\}$, $f : F \to A''$ — некоторый гомоморфизм и $g : A \to A''$ — произвольный эпиморфизм. Для каждого свободного образующего x_a выберем такой элемент $y_a \in A$, что $g(y_a) = f(x_a)$. Гомоморфизм $h : F \to A$, для которого $h(x_a) = y_a$, удовлетворяет, очевидно, условию $gh = f$. Тем самым доказано, что модуль F проективен.

ТЕОРЕМА 2.3. *Любой модуль A можно вложить в точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P (т. е. любой модуль можно рассматривать как фактормодуль некоторого проективного модуля).*

Действительно, $0 \to R_A \to F_A \to A \to 0$ является требуемой точной последовательностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Модуль P тогда и только тогда проективен, когда каждая точная последовательность вида $0 \to A' \to A \to P \to 0$ расщепляема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль P проективен, то, поскольку отображение $A \to P$ является эпиморфизмом, существует такой гомоморфизм $P \to A$, что сквозное отображение $P \to A \to P$ является тождественным отображением. Следовательно, рассматриваемая последовательность расщепляема. Обратно, если каждая точная последовательность рассматриваемого вида расщепляема, то, в частности, расщепляема и точная последовательность $0 \to R_P \to F_P \to P \to 0$. Следовательно, модуль P будет прямым слагаемым свободного модуля F_P, а потому, согласно теореме 2.2, проективным модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Произвольную точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ можно вложить в коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

все столбцы и строки которой являются точными последовательностями, причем средняя строка расщепляема и состоит из проективных модулей. При этом точные последовательности

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P' \longrightarrow A' \longrightarrow 0 \quad и \quad 0 \longrightarrow M'' \longrightarrow P'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

с проективными модулями P' и P'' можно задать произвольно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль P определяется как прямая сумма $P' + P''$ модулей P' и P'', а отображения $P' \to P$ и $P \to P''$ задаются формулами

$$p' \longrightarrow (p', 0), \quad (p', p'') \longrightarrow p''.$$

Так как модуль P'' проективен, а отображение $A \to A''$ является эпиморфизмом, то существует гомоморфизм $h'' : P'' \to A$, композиция которого с гомоморфизмом $A \to A''$ совпадает с гомоморфизмом $P'' \to A''$. Пусть h' — сквозное отображение $P' \to A' \to A$. Определим эпиморфное отображение $h : P \to A$, положив

$$h(p', p'') = h'(p') + h''(p'').$$

Тогда нижние два квадрата диаграммы будут коммутативны. Пусть M — ядро эпиморфизма h, и пусть $M' \to M$ и $M \to M''$ — гомоморфизмы, индуцированные отображениями $P' \to P$ и $P \to P''$ соответственно. Тогда, как легко видеть, верхняя строка диаграммы точна, и два верхних квадрата коммутативны.

3. ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Модуль Q называется *инъективным*, если любое гомоморфное отображение $A' \to Q$ некоторого подмодуля A' произвольного модуля A в модуль Q допускает продолжение до гомоморфного отображения $A \to Q$. На языке диаграмм это означает, что каждую диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \\ & Q & \end{tikzcd}$$

с точной строкой $0 \to A' \to A$ можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl, dashed] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Прямое произведение модулей тогда и только тогда является инъективным модулем, когда инъективен каждый множитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{i_\alpha, p_\alpha\}$ — некоторое представление модуля Q в виде прямого произведения модулей $\{Q_\alpha\}$, и пусть A —

произвольный модуль, а A' — некоторый его подмодуль. Предполагая, что модуль Q инъективен, рассмотрим произвольный гомоморфизм $f: A' \to Q_\alpha$. Так как $i_\alpha f: A' \to Q$, то отображение $i_\alpha f$ допускает продолжение $g: A \to Q$. Тогда отображение $p_\alpha g: A \to Q_\alpha$ является продолжением гомоморфизма $f: A' \to Q_\alpha$ и, следовательно, каждый модуль Q_α инъективен.

Предположим теперь, что все модули Q_α инъективны, и рассмотрим произвольный гомоморфизм $f: A' \to Q$. По условию каждое отображение $p_\alpha f: A' \to Q_\alpha$ допускает продолжение $g_\alpha: A \to Q_\alpha$. Гомоморфизмы g_α определяют, очевидно, такой гомоморфизм $g: A \to Q$, что $p_\alpha g = g_\alpha$. Следовательно, $p_\alpha g(x) = g_\alpha(x) = p_\alpha f(x)$ для каждого элемента $x \in A'$ и любого индекса α. Поэтому $f(x) = g(x)$ для каждого элемента $x \in A'$. Таким образом, гомоморфизм g является продолжением гомоморфизма f. Тем самым доказано, что модуль Q инъективен.

ТЕОРЕМА 3.2. *Модуль Q тогда и только тогда инъективен, когда для каждого левого идеала I кольца Λ и любого гомоморфного отображения $f: I \to Q$ (здесь идеал I рассматривается как левый Λ-модуль) существует такой элемент $g \in Q$, что $f(\lambda) = \lambda g$ для всех $\lambda \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль Q инъективен. Тогда гомоморфное отображение f допускает продолжение $g: \Lambda \to Q$ и, следовательно, $f(\lambda) = g(\lambda) = \lambda g(1)$ для каждого $\lambda \in I$. Тем самым необходимость условия доказана.

Докажем достаточность. Пусть A — произвольный модуль и $f: A' \to Q$ — гомоморфное отображение некоторого подмодуля A' модуля A в модуль Q. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всех пар вида (A_1, f_1), где A_1 — произвольный подмодуль модуля A, содержащий подмодуль A', а $f_1: A_1 \to Q$ — некоторое продолжение гомоморфизма f. Введем в $\mathcal{F}$ частичную упорядоченность, полагая $(A_1, f_1) < (A_2, f_2)$, если $A_1 \subset A_2$ и гомоморфизм f_2 является продолжением гомоморфизма f_1. Очевидно, что частично упорядоченное множество $\mathcal{F}$ индуктивно[1], и, следовательно, согласно лемме Цорна, существует максимальный элемент (A_0, f_0). Докажем, что $A_0 = A$.

Предположим противное, т. е. предположим, что существует элемент $x \in A$, не принадлежащий подмодулю A_0. Множество I всех элементов $\lambda \in \Lambda$, для которых $\lambda x \in A_0$, является левым идеалом кольца Λ. Сопоставляя каждому элементу $\lambda \in I$ элемент $f_0(\lambda x) \in Q$ мы получим некоторый гомоморфизм $f_0': I \to Q$. Следовательно, в Q существует такой элемент g, что $f_0'(\lambda) = f_0(\lambda x) = \lambda g$ для всех $\lambda \in I$. Полагая теперь

$$f'(a + \lambda x) = f_0(a) + \lambda g, \qquad a \in A_0, \ \lambda \in \Lambda,$$

[1] Частично упорядоченное множество $\mathcal{F}$ называется *индуктивным*, если любое его направленное подмножество имеет в $\mathcal{F}$ максимальный элемент. — *Прим. ред.*

мы получим гомоморфизм f' подмодуля $A_0 + \Lambda x$ модуля A в модуль Q, являющийся продолжением гомоморфизма f_0. Таким образом, пара (A_0, f_0) не максимальна.

ТЕОРЕМА 3.3. *Любой модуль A можно вложить в точную последовательность $0 \to A \to Q \to N \to 0$ с инъективным модулем Q (т. е. любой модуль можно рассматривать как подмодуль некоторого инъективного модуля).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому модулю A сопоставим некоторый модуль $D(A)$, содержащий модуль A и обладающий следующим свойством:

(*) Для каждого левого идеала I кольца Λ и для любого гомоморфизма $f: I \to A$ существует такой элемент $g \in D(A)$, что $f(\lambda) = \lambda g$ для всех $\lambda \in I$.

Пусть Φ — множество всех пар вида (I, f), где I — произвольный левый идеал кольца Λ, а $f: I \to A$ — гомоморфизм идеала I в модуль A, и пусть F_Φ — свободный модуль, порожденный элементами множества Φ. Обозначим через $D(A)$ фактормодуль прямой суммы $A + F_\Phi$ по подмодулю, порожденному всеми элементами вида

$$(f(\lambda), -\lambda(I, f)), \qquad (I, f) \in \Phi, \ \lambda \in I.$$

Соответствие $a \to (a, 0)$ определяет, очевидно, некоторый гомоморфизм $\varphi: A \to D(A)$. Если $\varphi(a) = 0$, то

$$(a, 0) = \sum \mu_i(f_i(\lambda_i), -\lambda_i(I_i, f_i)) = \sum (f_i(\mu_i \lambda_i), -\mu_i \lambda_i (I_i, f_i)),$$

и потому $\sum \mu_i \lambda_i (I_i, f_i) = 0$ в F_Φ, откуда следует, что $\sum f_i(\mu_i \lambda_i) = 0$. Таким образом, $\varphi(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$, т. е. φ является мономорфизмом. Поэтому, отождествляя элемент $a \in A$ с его образом $\varphi(a)$, мы можем рассматривать модуль A как подмодуль модуля $D(A)$.

Покажем, что модуль $D(A)$ обладает свойством (*). Пусть $f: I \to A$, где I — произвольный левый идеал кольца Λ. Тогда $(I, f) \in \Phi$. Обозначим через g образ элемента $(0, (I, f))$ модуля $A + F_\Phi$ в модуле $D(A)$. Тогда для каждого $\lambda \in I$

$$f(\lambda) = (f(\lambda), 0) = (0, \lambda (I, f)) = \lambda g,$$

что и требовалось.

Пусть теперь Ω — первое предельное трансфинитное число, мощность которого больше мощности Λ. Используя трансфинитную индукцию, определим модули $Q_\alpha(A)$ для всех $\alpha \leq \Omega$, полагая $Q_1(A) = D(A)$, $Q_\alpha(A) = D(Q_\beta(A))$, если $\alpha = \beta + 1$, и $Q_\alpha(A) = \bigcup\limits_\beta Q_\beta(A)$, если α — предельное трансфинитное число. Покажем, что модуль $Q_\Omega(A)$ инъективен. Действительно, пусть $f: I \to Q_\Omega(A)$, где I — произвольный левый идеал кольца Λ. Тогда $f(I) \subset Q_\alpha(A)$ для некоторого $\alpha < \Omega$, и потому, согласно свойству (*), существует такой элемент $g \in D(Q_\alpha(A)) = Q_{\alpha+1}(A) \subset Q_\Omega(A)$, что $f(\lambda) = \lambda g$ для всех $\lambda \in I$. Следовательно, согласно теореме 3.2, модуль $Q_\Omega(A)$ инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Модуль Q тогда и только тогда инъективен, когда каждая точная последовательность вида* $0 \to Q \to A \to A' \to 0$ *расщепляема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль Q инъективен, то, поскольку отображение $Q \to A$ мономорфно, существует такой гомоморфизм $A \to Q$, что сквозное отображение $Q \to A \to Q$ является тождественным отображением. Следовательно, рассматриваемая последовательность расщепляема. Обратно, предположим, что каждая последовательность указанного вида расщепляема, и рассмотрим точную последовательность $0 \to Q \to A \to A' \to 0$, в которой модуль A инъективен. Так как эта последовательность расщепляема, то модуль Q является прямым множителем[1] инъективного модуля A и, следовательно, согласно предложению 3.1, инъективным модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Произвольную точную последовательность* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *можно вложить в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Q' & \to & Q & \to & Q'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

все столбцы и строки которой являются точными последовательностями, причем средняя строка расщепляема и состоит из инъективных модулей. При этом точные последовательности

$$0 \to A' \to Q' \to N' \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to A'' \to Q'' \to N'' \to 0$$

с инъективными модулями Q' и Q'' можно задать произвольно.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 2.5.

Инъективные модули (под другим названием) рассматривались Бэром [Baer R., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800—806], которым были доказаны теоремы, по существу совпадающие с теоремами 3.2 и 3.3.

4. ПОЛУПРОСТЫЕ КОЛЬЦА

Ненулевой модуль A называется *простым*, если он не обладает подмодулями, отличными от самого A и нулевого подмодуля.

---

[1] В этом случае понятие прямого множителя совпадает с понятием прямого слагаемого. — *Прим. ред.*

Модуль, разлагающийся в прямую сумму простых модулей, называется *полупростым* модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Модуль A тогда и только тогда полупрост, когда каждый его подмодуль является прямым слагаемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль $A = \sum S_i$, $i \in I$, является прямой суммой простых подмодулей S_i. Для каждого подмножества J множества I положим $S_J = \sum S_i$, $i \in J$. Пусть B — произвольный подмодуль модуля A и J — максимальное подмножество множества I, для которого $S_J \cap B = 0$. Тогда $(S_J + S_i) \cap B \neq 0$ и, следовательно, $(S_J + B) \cap S_i \neq 0$ для любого $i \notin J$. Так как S_i — простой подмодуль, то отсюда вытекает, что $S_i \subset S_J + B$. Следовательно, $A = S_J + B$, а так как $S_J \cap B = 0$, то подмодуль B является прямым слагаемым модуля A.

Предположим теперь, что модуль A обладает тем свойством, что каждый его подмодуль является прямым слагаемым. Тогда, очевидно, тем же свойством обладает и каждый подмодуль модуля A.

Покажем прежде всего, что любой ненулевой подмодуль C модуля A, обладающего указанным свойством, содержит простой подмодуль. В самом деле, пусть c — произвольный отличный от нуля элемент подмодуля C, и пусть D — максимальный подмодуль модуля C, не содержащий элемента c. Модуль C разлагается в прямую сумму подмодуля D и некоторого подмодуля E, который, как мы сейчас покажем, является простым модулем. Действительно, пусть существует собственный отличный от нуля подмодуль F модуля E. Тогда E является прямой суммой подмодуля F и некоторого ненулевого подмодуля G и, следовательно, $C = D + F + G$. По крайней мере один из подмодулей $D + F$ и $D + G$ не содержит элемента c, что противоречит максимальности подмодуля D.

Рассмотрим теперь такие семейства $\{S_\alpha\}$ простых подмодулей модуля A, что порожденный ими подмодуль $B = \sum S_\alpha$ является прямой суммой подмодулей S_α. Очевидно, что среди этих семейств существуют максимальные. Пусть подмодуль B порождается некоторым максимальным семейством $\{S_\alpha\}$. Тогда модуль A разлагается в прямую сумму подмодуля B и некоторого подмодуля C. Если $C \neq 0$, то C содержит простой подмодуль, что противоречит максимальности семейства $\{S_\alpha\}$. Следовательно, $A = B$ и, значит, модуль A полупрост.

ТЕОРЕМА 4.2. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *кольцо Λ полупросто, как левый Λ-модуль;*

(b) *каждый левый идеал кольца Λ является его прямым слагаемым;*

(c) *каждый левый идеал кольца Λ является инъективным Λ-модулем;*

(d) *все левые Λ-модули полупросты;*

(e) *все точные последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ левых Λ-модулей расщепляемы;*

(f) *все левые Λ-модули проективны;*

(g) *все левые Λ-модули инъективны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность свойств (a) и (b) была доказана в предложении 4.1.

Равносильность свойств (d) и (e) вытекает из предложения 4.1, равносильность свойств (e) и (f) — из предложения 2.4, а равносильность свойств (e) и (g) — из предложения 3.4. Таким образом, свойства (d) — (g) равносильны.

Свойство (c) представляет собой частный случай свойства (g). Если левый идеал I кольца Λ инъективен, то в силу предложения 3.4 точная последовательность $0 \to I \to \Lambda \to \Lambda/I \to 0$ расщепляема и, следовательно, левый идеал I является прямым слагаемым кольца Λ. Таким образом, из свойства (c) вытекает свойство (b). Если, наконец, каждый левый идеал I является прямым слагаемым кольца Λ, то любой гомоморфизм $f : I \to A$, где A — произвольный Λ-модуль, допускает продолжение $\bar{f} : \Lambda \to A$ и поэтому $f(\lambda) = \lambda \bar{f}(1)$ для всех $\lambda \in I$. Отсюда, согласно теореме 3.2, следует, что модуль A инъективен. Таким образом, из свойства (b) вытекает свойство (g), и тем самым теорема полностью доказана.

Известен классический результат о том, что кольцо Λ тогда и только тогда полупросто (как левый Λ-модуль), когда оно разлагается в двустороннюю прямую сумму конечного числа колец, каждое из которых изоморфно полной матричной алгебре над некоторым телом (см., например, Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. II, Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 186). Из этого результата следует, что кольцо Λ тогда и только тогда полупросто как левый Λ-модуль, когда оно полупросто как правый Λ-модуль. Поэтому условия (a)—(g) равносильны аналогичным условиям для правых идеалов и правых модулей.

5. НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Модуль P тогда и только тогда проективен, когда каждая диаграмма вида*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ Q \arrow[r] & Q'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной строкой $Q \to Q'' \to 0$ и инъективным модулем Q может быть вложена в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ Q \arrow[r] & Q'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольный модуль A, его подмодуль A', фактормодуль $A'' = A/A'$ и некоторый гомоморфизм $f : P \to A''$. Модуль A можно рассматривать как подмодуль некоторого инъективного модуля Q. Тогда A'' будет подмодулем фактормодуля $Q'' = Q/A'$. В силу нашего условия существует такой гомоморфизм $g: P \to Q$, что его композиция с гомоморфизмом $Q \to Q''$ совпадает со сквозным отображением $P \to A'' \to Q''$. Так как образ последнего содержится в подмодуле A, то гомоморфизм g индуцирует некоторый гомоморфизм $g': P \to A$, композиция которого с гомоморфизмом $A \to A''$ совпадает с гомоморфизмом $f: P \to A''$. Следовательно, модуль P проективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Модуль Q тогда и только тогда инъективен, когда каждая диаграмма вида*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow & & \\ & & Q & & \end{array}$$

с точной строкой $0 \to P' \to P$ и с проективным модулем P может быть вложена в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[dl, dashed] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольный модуль A, его подмодуль A' и некоторый гомоморфизм $f: A' \to Q$. Представим модуль A как фактормодуль некоторого проективного модуля P по его подмодулю M. Пусть P' — полный прообраз подмодуля A' в модуле P; тогда $A' = P'/M$. По условию, сквозное отображение $P' \to A' \to Q$ допускает продолжение до некоторого гомоморфизма $g: P \to Q$. Гомоморфизм g отображает подмодуль M в нуль и потому индуцирует гомоморфизм $h: A \to Q$, являющийся, очевидно, продолжением гомоморфизма $f: A' \to Q$. Следовательно, модуль Q инъективен.

Отметим, что доказательство предложения 5.2 двойственно доказательству предложения 5.1.

Кольцо Λ называется *наследственным (слева)*, если каждый (левый) идеал кольца Λ является проективным Λ-модулем.

ТЕОРЕМА 5.3. *Если кольцо Λ наследственно слева, то любой подмодуль свободного Λ-модуля разлагается в прямую сумму модулей, каждый из которых изоморфен некоторому левому идеалу кольца Λ.* (Kaplansky I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — свободный Λ-модуль и $\{x_\alpha\}$ — некоторая его база, которую мы предполагаем вполне упорядоченной[1]. Обозначим через F_α (соответственно через $\bar{F}_\alpha$) подмодуль

[1] И занумерованной порядковыми трансфинитными числами. — *Прим. ред.*

модуля F, порожденный всеми свободными образующими x_β с $\beta < \alpha$ (соответственно с $\beta \leq \alpha$). Пусть A — произвольный подмодуль модуля F. Любой элемент $a \in A \cap \bar{F}_\alpha$ имеет вид $a = b + \lambda x_\alpha$, где $b \in F_\alpha$ и $\lambda \in \Lambda$. Соответствие $a \to \lambda$ определяет, очевидно, эпиморфное отображение подмодуля $A \cap \bar{F}_\alpha$ на некоторый левый идеал I_α кольца Λ; ядром этого эпиморфизма служит подмодуль $A \cap F_\alpha$. Так как идеал I_α является проективным Λ-модулем, то подмодуль $A \cap \bar{F}_\alpha$ разлагается в прямую сумму подмодуля $A \cap F_\alpha$ и некоторого подмодуля C_α, изоморфного модулю I_α. Покажем, что подмодуль A является прямой суммой подмодулей C_α.

Во-первых, из равенства $c_1 + \ldots + c_n = 0$, где $c_i \in C_{\alpha_i}$ и $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, следует, что $c_i = 0$. Действительно, подмодули $A \cap F_{\alpha_n}$ и C_{α_n} порождают в A прямую сумму и поэтому $c_1 + \ldots + c_{n-1} = 0$, $c_n = 0$; применяя аналогичные рассуждения к равенству $c_1 + \ldots + c_{n-1} = 0$ и т. д., получим, что $c_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Во-вторых, подмодуль A является суммой $\sum_\alpha C_\alpha$ подмодулей C_α. Действительно, если $A \neq \sum_\alpha C_\alpha$, то существует такой минимальный индекс β, что в подмодуле $A \cap \bar{F}_\beta$ найдется элемент a, не принадлежащий к $\sum_\alpha C_\alpha$. Представляя элемент a в виде $a = b + c$, где $b \in A \cap F_\beta$ и $c \in C_\beta$, мы получим, что в подмодуле $\sum_\alpha C_\alpha$ не содержится и элемент b. В то же время $b \in A \cap \bar{F}_\gamma$ для некоторого $\gamma < \beta$, что противоречит минимальности индекса β. Тем самым теорема полностью доказана.

Если Λ — кольцо главных идеалов, то каждый его идеал изоморфен (как Λ-модуль) самому кольцу Λ и, следовательно, является свободным Λ-модулем. Таким образом, любое кольцо главных идеалов является наследственным кольцом. Так как прямая сумма свободных модулей является свободным модулем, то из теоремы 5.3 вытекает хорошо известный результат о том, что подмодуль свободного модуля над кольцом главных идеалов является свободным модулем.

ТЕОРЕМА 5.4. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *кольцо Λ наследственно слева;*

(b) *каждый подмодуль проективного левого Λ-модуля проективен;*

(c) *каждый фактормодуль инъективного левого Λ-модуля инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть A — произвольный подмодуль проективного модуля P. По теореме 2.2 модуль P является подмодулем свободного модуля. Отсюда и из теоремы 5.3 следует, что подмодуль A разлагается в прямую сумму проективных модулей, а потому в силу предложения 2.1 является проективным модулем.

(b) $\Rightarrow$ (a). Так как кольцо Λ является свободным, а потому и проективным Λ-модулем, то каждый левый подмодуль Λ-модуля Λ, т. е. каждый левый идеал кольца Λ, будет проективным модулем.

Для доказательства равносильности свойств (b) и (c) рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} P & P' \arrow[l] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[l] \\ Q \arrow[r] & Q'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

в которой строки точны, модуль P проективен, а модуль Q инъективен. Предположим, что справедливо свойство (b). Тогда подмодуль P' будет проективным модулем. Поэтому существует такой гомоморфизм $P' \to Q$, что сквозное отображение $P' \to Q \to Q''$ совпадает с гомоморфизмом f. Поскольку модуль Q инъективен, существует гомоморфизм $P \to Q$, композиция которого с мономорфизмом $P' \to P$ совпадает с гомоморфизмом $P' \to Q$. Таким образом, гомоморфизм f совпадает со сквозным отображением $P' \to P \to Q \to Q''$. Согласно предложению 5.2, отсюда следует, что модуль Q'' инъективен. Таким образом, (b) $\Rightarrow$ (c).

Предположим теперь, что справедливо свойство (c). Тогда Q'' будет инъективным модулем. Поэтому существует такой гомоморфизм $P \to Q''$, что сквозное отображение $P' \to P \to Q''$ совпадает с гомоморфизмом f. Поскольку модуль P проективен, гомоморфизм $P \to Q''$ может быть представлен в виде сквозного отображения $P \to Q \to Q''$ и, следовательно, гомоморфизм f — в виде сквозного отображения $P' \to P \to Q \to Q''$. Согласно предложению 5.1, отсюда следует, что модуль P' проективен. Таким образом, (c) $\Rightarrow$ (b).

6. ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА

Будем говорить, что Λ-модуль A имеет конечное число образующих, если в A существует такое конечное подмножество $a_1, \ldots, a_n$, что каждый элемент модуля A имеет вид $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$.

Кольцо Λ называется *полунаследственным слева*, если каждый левый идеал кольца Λ, обладающий конечным числом образующих, является проективным Λ-модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если кольцо Λ полунаследственно слева, то любой подмодуль свободного левого Λ-модуля, имеющий конечное число образующих, разлагается в прямую сумму конечного числа модулей, каждый из которых изоморфен некоторому левому идеалу кольца Λ, имеющему конечное число образующих.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — подмодуль свободного модуля F, имеющий конечное число образующих, и пусть $\{x_\alpha\}$ — база модуля F. Так как подмодуль A содержится в некотором подмодуле модуля F, порожденном конечным числом свободных образующих x_α, то можно считать, что модуль F имеет конечную базу $x_1, \ldots, x_n$.

Мы докажем предложение 6.1 индукцией по числу n.

Пусть B' — подмодуль модуля F, порожденный элементами $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (если $n = 1$, то $B' = 0$), и $B = B' \cap A$. Тогда любой элемент $a \in A$ однозначно представляется в виде $\lambda x_n + b$, где $\lambda \in \Lambda$, $b \in B'$. Соответствие $a \to \lambda$ определяет эпиморфное отображение подмодуля A на некоторый левый идеал I кольца Λ; ядром этого эпиморфизма служит подмодуль B, так что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Отсюда вытекает, что идеал I имеет конечное число образующих и, следовательно, является проективным Λ-модулем. Поэтому, согласно предложению 2.4, построенная точная последовательность расщепляема, т. е. подмодуль A изоморфен прямой сумме модулей I и B. Следовательно, подмодуль B имеет конечное число образующих и потому, согласно предположению индукции, обладает указанным в предложении 6.1 свойством. Но тогда и подмодуль A обладает тем же свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *кольцо Λ полунаследственно слева;*

(b) *каждый подмодуль проективного Λ-модуля, имеющий конечное число образующих, проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждый проективный модуль является подмодулем свободного модуля, а прямая сумма проективных модулей — проективным модулем, то импликация (a) $\Rightarrow$ (b) вытекает из предложения 6.1. Обратная импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна, так как кольцо Λ само является свободным, а потому и проективным Λ-модулем.

Наследственные и полунаследственные справа кольца определяются аналогично наследственным и полунаследственным слева кольцам. Вопрос, не будет ли каждое наследственное (полунаследственное) слева кольцо одновременно наследственным (соответственно полунаследственным) справа, остается пока открытым.

7. НЕТЕРОВЫ КОЛЬЦА

Модуль A называется *нетеровым*, если каждый его подмодуль имеет конечное число образующих. Кольцо Λ называется *нетеровым слева (справа)*, если оно является нетеровым левым (правым) Λ-модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если кольцо Λ нетерово слева, то каждый левый Λ-модуль A с конечным числом образующих является нетеровым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что любой подмодуль B модуля A имеет конечное число образующих.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система образующих модуля A. Если $n = 1$, то $A \approx \Lambda/I$, где I — некоторый левый идеал кольца Λ, и $B \approx J/I$, где J — левый идеал кольца Λ, содержащий идеал I. Так как идеал J имеет конечное число образующих, то тем же свойством обладает и подмодуль B. Далее мы будем вести доказательство по индукции. Предположив, что предложение справедливо для каждого Λ-модуля, имеющего меньше n $(n > 1)$ образующих, обозначим через A' подмодуль модуля A, порожденный элементом x_1. В точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ каждый из модулей A' и $A'' = A/A'$ порождается меньше чем n элементами. Эта точная последовательность индуцирует точную последовательность $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$, где $B' = B \cap A'$ и $B'' = B/B'$. Так как модули B' и B'' являются подмодулями соответственно модулей A' и A'', то, по предположению индукции, они имеют конечное число образующих. Поэтому и подмодуль B имеет конечное число образующих.

Приведем теперь (построенный Ж. Дьедонне) пример кольца, являющегося нетеровым слева, но не являющегося нетеровым справа. Пусть Λ — кольцо, порожденное элементами $1, x, y$, удовлетворяющими соотношениям $yx = 0$, $yy = 0$, и Γ — подкольцо кольца Λ, порожденное элементами 1 и x. Каждый элемент кольца Λ единственным образом записывается в виде $\gamma_1 + \gamma_2 y$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Кольцо Γ является кольцом многочленов от x с целочисленными коэффициентами и потому, согласно известной теореме Гильберта, является нетеровым кольцом. Поскольку кольцо Λ можно рассматривать как левый Γ-модуль с конечным числом образующих, то, согласно предложению 7.1, кольцо Λ является нетеровым левым Γ-модулем, а следовательно, и нетеровым левым Λ-модулем, т. е. нетеровым слева кольцом.

Обозначим теперь через I подгруппу аддитивной группы кольца Λ, порожденную всеми элементами вида $x^n y$ $(n \geqslant 0)$. Так как $Ix = Iy = 0$, то I является правым идеалом кольца Λ и любая система Λ-образующих правого идеала I одновременно является его системой правых Z-образующих. Следовательно, правый идеал I не обладает конечным числом образующих, так что Λ не является нетеровым справа кольцом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть A_1 и A_2 — подмодули модуля A, и пусть $A_{12} = A_1 \cap A_2$. Показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{12} & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1/A_{12} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_2/A_{12} & \longrightarrow & A/A_1 & \longrightarrow & A/(A_1+A_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

гомоморфизмы которой представляют собой естественные отображения, коммутативна, а ее столбцы и строки являются точными последовательностями.

2. Пусть $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ — точная последовательность левых Λ-модулей. Показать, что если модули A' и A'' имеют конечное число образующих, то тем же свойством обладает и модуль A. Предполагая, что кольцо Λ нетерово слева, доказать справедливость обратного утверждения.

3. Пусть модуль A является прямой суммой модулей A_α. Показать, что модуль A тогда и только тогда имеет конечное число образующих, когда каждый модуль A_α имеет конечное число образующих и лишь конечное число модулей A_α отлично от нуля.

4. Пусть A_1 и A_2 — подмодули модуля A. Показать, что если подмодули $A_1 + A_2$ и $A_1 \cap A_2$ имеют конечное число образующих, то тем же свойством обладают подмодули A_1 и A_2.

5. Пусть $Z_n = Z/nZ$, где Z — кольцо целых чисел и $n > 1$. Каждому делителю r числа n соответствует идеал rZ_n кольца Z_n и точная последовательность

$$0 \longrightarrow rZ_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow r'Z_n \longrightarrow 0,$$

где $r' = n/r$. Показать, что эта последовательность тогда и только тогда расщепляема, когда $(r, r') = 1$. Показать, что Z_n-модуль rZ_n проективен тогда и только тогда, когда $(r, n/r) = 1$. Привести примеры проективных модулей, не являющихся свободными.

6. Доказать равносильность следующих утверждений:

(a) кольцо Z_n полупросто;

(b) кольцо Z_n наследственно;

(c) число n является произведением различных простых чисел.

7. Показать, что следующие свойства равносильны:

(a) каждый левый идеал кольца Λ является свободным Λ-модулем;

(b) каждый подмодуль свободного левого Λ-модуля является свободным Λ-модулем.

8. Пусть Λ — нетерово слева кольцо. Показать, что предел прямого спектра инъективных левых Λ-модулей является инъективным модулем. (Указание: использовать теорему 3.2.)

ГЛАВА II

АДДИТИВНЫЕ ФУНКТОРЫ

Введение. В этой главе рассматриваются функторы [в смысле Эйленберга—Маклейна [Eilenberg S., Mac Lane S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231—294], определенные на категории Λ-модулей и принимающие значения в категории Γ-модулей, где Λ и Γ — данные кольца. То обстоятельство, что гомоморфизмы модулей можно складывать, позволяет выделить класс так называемых аддитивных функторов. Только этот класс мы и будем рассматривать. Вообще говоря, мы будем изучать функторы нескольких аргументов, по одним из которых функторы ковариантны, а по другим — контравариантны. Типичными примерами таких функторов являются $A \otimes C$ (тензорное произведение) и $\mathrm{Hom}\,(A, C)$.

В § 4 исследуются функторы, в той или иной степени сохраняющие точность последовательности модулей. Показывается, что функтор $\mathrm{Hom}\,(A, C)$ является точным слева, в связи с чем для этого функтора целесообразно рассмотрение правых сателлитов и правых производных функторов (см. гл. III, V, VI). Функтор $A \otimes C$ оказывается точным справа, и для него мы будем изучать левые сателлиты и левые производные функторы.

В § 5 рассматриваются соотношения ассоциативности, которые, несмотря на их элементарность, в дальнейшем играют значительную роль.

Исследуя данный Λ-модуль A, часто бывает необходимо «сжать» область операторов до меньшего, чем Λ, кольца или, наоборот, «расширить» ее до большого кольца (расширяя при этом соответственно модуль A). В § 6 вводятся основные понятия, связанные с таким изменением колец операторов. Поскольку эти преобразования имеют многочисленные приложения в теории гомологий групп и алгебр Ли, мы к ним будем еще неоднократно возвращаться (например, в § VI,4 и XVI,5).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть Λ_1 и Λ — произвольные кольца. Предположим, что каждому Λ_1-модулю A однозначно сопоставлен Λ-модуль $T(A)$ и каждому Λ_1-гомоморфизму[1] $\varphi : A \rightarrow A'$ однозначно сопоставлен Λ-гомо-

[1] Под Λ-гомоморфизмом авторы понимают гомоморфизм Λ-модулей. — *Прим. перев.*

морфизм $T(\varphi): T(A) \to T(A')$, причем выполнены следующие условия:

(1) если $\varphi: A \to A$ является тождественным гомоморфизмом, то $T(\varphi)$ также является тождественным гомоморфизмом;

(2) если $\varphi: A \to A'$ и $\varphi': A' \to A''$, то $T(\varphi'\varphi) = T(\varphi')T(\varphi)$. В этом случае мы будем говорить, что пара функций $T(A)$, $T(\varphi)$ составляет *ковариантный функтор* T, определенный на категории Λ_1-модулей и принимающий значения в категории Λ-модулей. Если же Λ_1-гомоморфизму $\varphi: A \to A'$ однозначно сопоставлен Λ-гомоморфизм $T(\varphi): T(A') \to T(A)$[1] и $T(\varphi'\varphi) = T(\varphi)T(\varphi')$, то говорят, что пара функций $T(A)$, $T(\varphi)$ составляет *контравариантный функтор*.

В дальнейшем наряду с функторами одного аргумента мы будем рассматривать также функторы нескольких аргументов, по некоторым из которых функтор ковариантен, а по другим — контравариантен. Для упрощения записи мы приведем полное определение лишь функтора двух аргументов, по первому из которых он ковариантен, а по второму — контравариантен.

Пусть Λ_1, Λ_2, Λ — данные кольца. Предположим, что каждой паре, состоящей из Λ_1-модуля A и Λ_2-модуля C, однозначно сопоставлен Λ-модуль $T(A, C)$ и каждой паре гомоморфизмов $\varphi: A \to A'$ и $\psi: C' \to C$ сопоставлены два гомоморфизма

$$T(\varphi, C): T(A, C) \longrightarrow T(A', C) \quad \text{и} \quad T(A, \psi): T(A, C) \longrightarrow T(A, C'),$$

причем выполнены следующие условия:

(3) если $\varphi: A \to A$ и $\psi: C \to C$ являются тождественными гомоморфизмами, то $T(\varphi, C)$ и $T(A, \psi)$ также являются тождественными гомоморфизмами;

(4) если $\varphi': A' \to A''$ и $\psi': C'' \to C'$, то

$$T(\varphi'\varphi, C) = T(\varphi', C)\, T(\varphi, C) \text{ и } T(A, \psi\psi') = T(A, \psi')\, T(A, \psi);$$

(5) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(A, C) & \xrightarrow{T(\varphi, C)} & T(A', C) \\ {\scriptstyle T(A,\psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(A',\psi)} \\ T(A, C') & \xrightarrow[T(\varphi, C')]{} & T(A', C') \end{array}$$

В этом случае говорят, что функции $T(A, C)$, $T(\varphi, C)$ и $T(A, \psi)$ составляют функтор двух аргументов, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму.

Составное отображение $T(A, C) \to T(A', C')$ обозначается просто через $T(\varphi, \psi)$[2].

---

[1] Удовлетворяющий условию (1). — *Прим. ред.*

[2] Заметим, что функтор T можно определить как пару, состоящую из функций $T(A, C)$ и $T(\varphi, \psi)$. Тогда фигурирующие в первоначальном определении гомоморфизмы $T(\varphi, C)$ и $T(A, \psi)$ следует рассматривать как частные случаи гомоморфизма $T(\varphi, \psi)$, получающиеся, когда один из аргументов (φ или ψ) является тождественным отображением. — *Прим. ред.*

Очевидно, что если зафиксировать модуль C, то T будет ковариантным функтором аргумента A; если же зафиксировать модуль A, то T будет контравариантным функтором аргумента C.

Мы будем рассматривать лишь *аддитивные функторы*, т. е. функторы, удовлетворяющие условиям

$$T(\varphi_1 + \varphi_2, C) = T(\varphi_1, C) + T(\varphi_2, C),$$
$$T(A, \psi_1 + \psi_2) = T(A, \psi_1) + T(A, \psi_2),$$

где $\varphi_1, \varphi_2 : A \to A'$, $\psi_1, \psi_2 : C' \to C$, а знак суммы означает сложение гомоморфизмов. Такие функторы нулевым гомоморфизмам φ и ψ сопоставляют нулевые гомоморфизмы $T(\varphi, C)$ и $T(A, \psi)$. Поэтому, в частности, если хотя бы один из модулей A или C является нулевым, то тождественное отображение $T(A, C) \to T(A, C)$ будет нулевым гомоморфизмом, а модуль $T(A, C)$ — нулевым модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если система гомоморфизмов*

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha \quad \text{и} \quad C_\beta \xrightarrow{j_\beta} C \xrightarrow{q_\beta} C_\beta$$

($\alpha = 1, \ldots, m$; $\beta = 1, \ldots, n$) *определяет представления модулей A и C в виде прямых сумм, то система гомоморфизмов*

$$T(A_\alpha, C_\beta) \xrightarrow{T(i_\alpha, q_\beta)} T(A, C) \xrightarrow{T(p_\alpha, j_\beta)} T(A_\alpha, C_\beta)$$

определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямой суммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $T(p_{\alpha'}, j_{\beta'})\, T(i_\alpha, q_\beta) = T(p_{\alpha'} i_\alpha, q_\beta j_{\beta'})$, то композиция $T(p_{\alpha'}, j_{\beta'})\, T(i_\alpha, q_\beta)$ является тождественным отображением, если $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)$, и нулевым отображением в противном случае. Кроме того, сумма

$$\sum_{\alpha,\beta} T(i_\alpha, q_\beta)\, T(p_\alpha, j_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} T(i_\alpha p_\alpha, j_\beta q_\beta) =$$
$$= T\Big(\sum_\alpha i_\alpha p_\alpha, \sum_\beta j_\beta q_\beta\Big)$$

является тождественным отображением. Выполнение этих двух условий как раз и означает, что система гомоморфизмов

$$\{T(i_\alpha, q_\beta), T(p_\alpha, j_\beta)\}$$

определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямой суммы.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Для любых расщепляемых точных последовательностей*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

последовательности

$$0 \longrightarrow T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C') \longrightarrow 0$$

также являются расщепляемыми точными последовательностями.

Пусть T_1 и T_2 — два функтора, ковариантные по аргументу A и контравариантные по аргументу C. *Естественным отображением* $f: T_1 \to T_2$ функтора T_1 в функтор T_2 называется система таких гомоморфизмов $f(A, C): T_1(A, C) \to T_2(A, C)$, что для любых гомоморфизмов $\varphi: A \to A'$, $\psi: C' \to C$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_1(A, C) & \xrightarrow{f(A, C)} & T_2(A, C) \\ {\scriptstyle T_1(\varphi, \psi)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T_2(\varphi, \psi)} \\ T_1(A', C') & \xrightarrow[f(A', C')]{} & T_2(A', C') \end{array}$$

Если каждое отображение $f(A, C)$ модуля $T_1(A, C)$ в модуль $T_2(A, C)$ является изоморфизмом, то f называется *естественной эквивалентностью*, или *естественным изоморфизмом*.

2. ПРИМЕРЫ

Первым нашим примером будет функтор $\mathrm{Hom}(A, C)$. Через $\mathrm{Hom}(A, C)$, где A и C — произвольные (левые) Λ-модули, как обычно, обозначается группа всех Λ-гомоморфизмов $A \to C$. Мы рассматриваем $\mathrm{Hom}(A, C)$ именно как абелеву группу (т. е. как Z-модуль, где Z — кольцо целых чисел). Если требуется подчеркнуть, что рассматриваются именно Λ-гомоморфизмы, то вместо $\mathrm{Hom}(A, C)$ мы будем писать $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$.

Для любых Λ-гомоморфизмов

$$\varphi: A' \longrightarrow A, \quad \psi: C \longrightarrow C'$$

определим гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\varphi, \psi): \mathrm{Hom}(A, C) \to \mathrm{Hom}(A', C'),$$

полагая для каждого $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$

$$\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)\, \alpha = \psi \alpha \varphi.$$

Легко проверить, что пара $\mathrm{Hom}(A, C)$, $\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$ составляет аддитивный функтор, контравариантный по аргументу A и ковариантный по аргументу C.

Формула $\varphi_c(\lambda) = \lambda c$ позволяет каждому элементу c модуля C однозначно сопоставить Λ-гомоморфизм $\varphi_c: \Lambda \to C$ (кольцо Λ мы рассматриваем как левый Λ-модуль). Тем самым определяется изоморфное отображение абелевой группы C на абелеву группу $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, C)$. Так как кольцо Λ является и правым Λ-модулем, то, как будет показано в следующем параграфе, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, C)$ можно рассматривать как левый Λ-модуль; при этом построенный изоморфизм $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, C) \approx C$ оказывается Λ-изоморфизмом. Как правило, мы будем посредством этого изоморфизма отождествлять модули $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, C)$ и C.

Функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ можно также определить и для случая, когда A и C являются правыми Λ-модулями.

Следующим примером функтора является тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ правого Λ-модуля A на левый Λ-модуль C. Напомним его определение. Пусть F — свободная абелева группа, порожденная всевозможными парами вида (a, c), где $a \in A$ и $c \in C$, и пусть R — подгруппа группы F, порожденная всеми элементами вида

$$(a + a', c) - (a, c) - (a', c), \quad (a, c + c') - (a, c) - (a, c'),$$
$$(a\lambda, c) - (a, \lambda c) \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Тензорным произведением $A \otimes_\Lambda C$ модулей A и C называется факторгруппа F/R. Тензорное произведение рассматривается именно как абелева группа (т. е. как модуль над кольцом Z целых чисел). Образ в $A \otimes_\Lambda C$ элемента (a, c) группы F обозначается через $a \otimes_\Lambda c$ или просто через $a \otimes c$. Вычисления над этими элементами подчиняются следующим формальным правилам:

$$(a + a') \otimes c = a \otimes c + a' \otimes c, \quad a \otimes (c + c') = a \otimes c + a \otimes c',$$
$$a\lambda \otimes c = a \otimes \lambda c.$$

Рассматривая модули A и C как абелевы группы, мы можем построить также тензорное произведение $A \otimes_Z C$. Очевидно, что $A \otimes_\Lambda C$ является факторгруппой группы $A \otimes_Z C$ по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $a\lambda \otimes_Z c - a \otimes_Z \lambda c$, где $\lambda \in \Lambda$.

Функция $\varphi : A \times C \to A \otimes_\Lambda C$[1], определенная формулой $\varphi(a, c) = a \otimes c$, билинейна и удовлетворяет соотношению $\varphi(a\lambda, c) = \varphi(a, \lambda c)$. Кроме того, произвольное билинейное отображение $f : A \times C \to D$ (где D — любая абелева группа), удовлетворяющее соотношению $f(a\lambda, c) = f(a, \lambda c)$, допускает однозначное представление в виде $f = g\varphi$, где $g : A \otimes_\Lambda C \to D$ — некоторый гомоморфизм. Это свойство можно использовать для аксиоматического определения тензорного произведения $A \otimes_\Lambda C$.

Легко видеть, что для любых двух Λ-гомоморфизмов

$$\varphi : A \longrightarrow A' \text{ и } \psi : C \longrightarrow C'$$

существует единственный гомоморфизм (абелевых групп)

$$\varphi \otimes \psi : A \otimes_\Lambda C \longrightarrow A' \otimes_\Lambda C',$$

для которого

$$(\varphi \otimes \psi)(a \otimes c) = \varphi(a) \otimes \varphi(c).$$

Очевидно, что пара $A \otimes_\Lambda C$, $\varphi \otimes \psi$ составляет аддитивный функтор, ковариантный по обоим аргументам.

---

[1] Через $A \times C$ обозначается множество всех пар вида (a, c), где $a \in A$ и $c \in C$. — *Прим. перев.*

Отображения $\lambda \otimes c \to \lambda c$ и $a \otimes \lambda \to a\lambda$ определяют естественные изоморфизмы $\Lambda \otimes_\Lambda C \approx C$ и $A \otimes_\Lambda \Lambda \approx A$. Мы часто будем рассматривать эти изоморфизмы как отождествления[1].

3. ОПЕРАТОРЫ

Пусть A и C — произвольные модули над кольцами Λ_1 и Λ_2 соответственно. Очень часто эти модули, кроме операторов из колец Λ_1 и Λ_2, допускают и другие операторы, определенным образом согласованные с операторами из колец Λ_1 и Λ_2. В таких случаях обычно возможно перенесение этих операторов на модуль $T(A, C)$[2].

Например, предположим, что A, будучи (левым) Λ_1-модулем, является также (левым) Γ-модулем, где Γ — некоторое кольцо. Предположим также, что операторы из колец Λ_1 и Γ перестановочны между собой, т. е. что $\lambda(\gamma a) = \gamma(\lambda a)$ для любых элементов $a \in A$, $\lambda \in \Lambda_1$, $\gamma \in \Gamma$. В этом случае говорят, что A является *Λ_1-Γ-бимодулем*. Каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ индуцирует Λ_1-эндоморфизм $\gamma_A : A \to A$, который, в свою очередь, индуцирует Λ-эндоморфизм $T(\gamma_A, C)$ модуля $T(A, C)$. Тем самым модуль $T(A, C)$ определяется как Λ-Γ-бимодуль. Аналогично, если C является Λ_2-Γ-бимодулем, причем элементы кольца Γ действуют на модуле C слева, то $T(A, C)$ будет Λ-Γ-бимодулем, причем, поскольку функтор T контравариантен по аргументу C, кольцо Γ должно действовать на модуле $T(A, C)$ справа. Далее, каждый Λ_1-Γ-гомоморфизм $\varphi : A \to A'$ определяет Λ-Γ-гомоморфизм $T(\varphi, C)$ и т. д.

Группа (т. е. Z-модуль) $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ определена для любой пары левых Λ-модулей A и C; для краткости мы будем писать, что эта группа определена в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C)$. Если один из модулей A или C является Λ-Γ-бимодулем, то группа $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ будет Γ-модулем. При этом возможны следующие четыре случая:

$({}_{\Lambda\text{-}\Gamma}A, {}_\Lambda C)$,	$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ — правый Γ-модуль,
$({}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda C)$,	$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ — левый Γ-модуль,
$({}_\Lambda A, {}_{\Lambda\text{-}\Gamma}C)$,	$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ — левый Γ-модуль,
$({}_\Lambda A, {}_\Lambda C_\Gamma)$,	$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ — правый Γ-модуль.

Если кольцо Γ коммутативно, то различие между левыми и правыми Γ-модулями исчезает и указанные четыре случая сводятся к двум. Если кольцо Γ является подкольцом кольца Λ, содержащимся в его центре, то A и C автоматически будут Λ-Γ-бимодулями

[1] Как будет показано в следующем параграфе, $\Lambda \otimes_\Lambda C$ можно рассматривать как левый Λ-модуль, а $A \otimes_\Lambda \Lambda$ — как правый Λ-модуль. — *Прим. перев.*

[2] Здесь так же, как и в дальнейшем, если не оговорено особо, под $T(A, C)$ понимается функтор двух аргументов, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. — *Прим. перев.*

и все четыре случая будут совпадать, поскольку здесь для любых элементов $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$, $a \in A$ и $\gamma \in \Gamma$

$$(\gamma\alpha)\, a = \alpha(a\gamma) = \alpha(\gamma a) = \gamma(\alpha a).$$

Таким образом, группу $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ всегда можно рассматривать как модуль над центром кольца Λ. Для коммутативного кольца Λ группа $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ будет Λ-модулем.

Аналогичные результаты имеют место и в ситуации, описываемой символом (A_Λ, C_Λ)[1].

Тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ представляет собой абелеву группу (т. е. Z-модуль) и определено для любого правого Λ-модуля A и любого левого Λ-модуля C, т. е. в ситуации, описываемой символом $(A_\Lambda, {}_\Lambda C)$. Если один из модулей A или C является Λ-Γ-бимодулем, то произведение $A \otimes_\Lambda C$ будет Γ-модулем. При этом возможны следующие четыре случая :

$({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Lambda C)$,	$A \otimes_\Lambda C$ — левый Γ-модуль,
$(A_{\Lambda\text{-}\Gamma}, {}_\Lambda C)$,	$A \otimes_\Lambda C$ — правый Γ-модуль,
$(A_\Lambda, {}_{\Gamma\text{-}\Lambda} C)$,	$A \otimes_\Lambda C$ — левый Γ-модуль,
$(A_\Lambda, {}_\Lambda C_\Gamma)$,	$A \otimes_\Lambda C$ — правый Γ-модуль.

Если кольцо Γ коммутативно, то различие между левыми и правыми Γ-модулями исчезает и указанные четыре случая сводятся к двум. Если кольцо Γ содержится в центре кольца Λ, то A и C автоматически будут Λ-Γ-бимодулями и все четыре случая совпадают, поскольку

$$(\gamma a) \otimes c = (a\lambda) \otimes c = a \otimes (\gamma c) = a \otimes (c\lambda).$$

Таким образом, тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ всегда можно рассматривать как модуль над центром кольца Λ. В случае коммутативности кольца Λ тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ является Λ-модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если кольцо Λ коммутативно, то существует единственный гомоморфизм $f : A \otimes_\Lambda C \to C \otimes_\Lambda A$, для которого $f(a \otimes c) = c \otimes a$. Отображение f является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов*

$$T(A, C) = A \otimes_\Lambda C \quad \text{и} \quad T_1(A, C) = C \otimes_\Lambda A.$$

Доказательство тривиально.

4. СОХРАНЕНИЕ ТОЧНОСТИ

Функтор $T(A, C)$, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C, называется *точным*, если всякий раз, когда точны последовательности

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'', \qquad C' \longrightarrow C \longrightarrow C'',$$

[1] То есть когда $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ определяется для правых Λ-модулей A и C. — *Прим. ред.*

также точны последовательности

$$T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C), \quad T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C').$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Функтор T тогда и только тогда точен, когда для любых точных последовательностей*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

точны последовательности

$$0 \longrightarrow T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C') \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольную точную последовательность $A' \to A \to A''$. Пусть $B' = \operatorname{Ker}(A' \to A)$, $B = \operatorname{Ker}(A \to A'')$, $B'' = \operatorname{Im}(A \to A'')$. Тогда имеют место точные последовательности $0 \to B' \to A' \to B \to 0$, $0 \to B \to A \to B'' \to 0$, $0 \to B'' \to A'' \to A''/B'' \to 0$. Следовательно, согласно условию, точны последовательности

$$T(A', C) \longrightarrow T(B, C) \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow T(B'', C) \longrightarrow T(A'', C),$$

$$T(B, C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(B'', C).$$

Из точности этих последовательностей вытекает точность последовательности $T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C)$. Таким образом, функтор T точен по первому аргументу. Точность по второму аргументу доказывается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если кольца Λ_1 и Λ_2 полупросты, то любой (аддитивный) функтор $T(A, C)$, определенный на Λ_1-модулях A и Λ_2-модулях C, является точным функтором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме I,4.2, любая точная последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ модулей над полупростым кольцом Λ_1 расщепляема. Поэтому, согласно следствию 1.2, точна последовательность $0 \to T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \to 0$. По тем же соображениям аналогичный результат имеет место и для второго аргумента. Следовательно, согласно предложению 4.1, функтор T является точным функтором.

Точные функторы встречаются очень редко. Поэтому для нас больший интерес представляют функторы, сохраняющие точность лишь частично. Пусть

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

— произвольные точные последовательности. Функтор T мы будем называть *полуточным*, если имеют место точные последовательности

$$T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C),$$

$$T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C').$$

Функтор T мы будем называть *точным справа*, если имеют место точные последовательности

$$T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C) \to 0,$$
$$T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C') \to 0.$$

Функтор T мы будем называть *точным слева*, если имеют место точные последовательности

$$0 \longrightarrow T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C),$$
$$0 \longrightarrow T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C').$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Следующие условия равносильны:*

(a) *функтор T точен справа;*

(b) *для любых точных последовательностей $A' \to A \to A'' \to 0$, $0 \to C' \to C \to C''$ имеют место точные последовательности*

$$T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C) \longrightarrow 0,$$
$$T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C') \longrightarrow 0;$$

(c) *для любых точных последовательностей $A' \to A \to A'' \to 0$, $0 \to C' \to C \to C''$ имеет место точная последовательность*

$$T(A', C) + T(A, C'') \xrightarrow{\varphi} T(A, C) \longrightarrow T(A'', C') \longrightarrow 0,$$

первый член которой представляет собой прямую сумму модулей $T(A', C)$ и $T(A, C'')$, а гомоморфизм φ — прямую сумму гомоморфизмов $T(A', C) \to T(A, C)$ и $T(A, C'') \to T(A, C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $B = \operatorname{Ker}(A' \to A)$, $B' = \operatorname{Im}(A' \to A)$. Тогда имеют место точные последовательности $0 \to B \to A' \to B' \to 0$ и $0 \to B' \to A \to A'' \to 0$, а следовательно, и точные последовательности $T(A', C) \to T(B', C) \to 0$, $T(B', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \to 0$. Сравнивая эти точные последовательности, мы получим требуемую точную последовательность $T(A', C) \to T(A, C) \to T(A'', C) \to 0$. Для второго аргумента доказательство аналогично.

(b) $\Rightarrow$ (c). Достаточно к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
T(A', C'') \arrow[r] \arrow[d] & T(A, C'') \arrow[r] \arrow[d] & T(A'', C'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
T(A', C) \arrow[r] \arrow[d] & T(A, C) \arrow[r] \arrow[d] & T(A'', C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
T(A', C') \arrow[r] \arrow[d] & T(A, C') \arrow[r] \arrow[d] & T(A'', C') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами применить хорошо известный процесс построения «диагональной последовательности»[1].

(c) $\Rightarrow$ (b). Достаточно свойство (c) применить в следующих двух случаях: $C'' = 0$, $C' = C$ и $A' = 0$, $A = A''$.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3а. *Следующие условия равносильны:*

(a) *функтор T точен слева;*

(b) *для любых точных последовательностей $0 \to A' \to A \to A''$, $C' \to C \to C'' \to 0$ имеют место точные последовательности*

$$0 \longrightarrow T(A', C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A'', C),$$
$$0 \longrightarrow T(A, C'') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C');$$

(c) *для любых точных последовательностей $0 \to A' \to A \to A''$, $C' \to C \to C'' \to 0$ имеет место точная последовательность*

$$0 \longrightarrow T(A', C'') \longrightarrow T(A, C) \xrightarrow{\varphi} T(A'', C) + T(A, C'),$$

последний член которой представляет собой прямую сумму модулей $T(A'', C)$ и $T(A, C')$, а гомоморфизм φ — прямую сумму гомоморфизмов $T(A, C) \to T(A'', C)$ и $T(A, C) \to T(A, C')$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.3. Мы предоставляем читателю самому сформулировать и доказать аналоги этих предложений для функторов иного типа (например,

---

[1] Этот процесс основывается на следующей теореме: *любой коммутативной диаграмме вида*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\alpha_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2'"] & 0 \\
A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_1'"] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & 0 \\
C_1' \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами соответствует точная последовательность

$$A_1 + A_2 \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

где α — прямая сумма гомоморфизмов α_1 и α_2 (определяемая формулой $\alpha(a_1 + a_2) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$), а $\beta = \gamma_1\beta_1$ $(= \gamma_2\beta_2)$.

Доказательства требует, очевидно, лишь точность в члене B. Пусть $b \in \operatorname{Ker}\beta$. Тогда $\beta_1 b \in \operatorname{Ker} \gamma_1 = \operatorname{Im} \gamma_1'$ и, следовательно, существует такой элемент $c_1' \in C_1'$, что $\gamma_1' c_1' = \beta_1 b$. Так как отображение β_1' эпиморфно, то существует такой элемент $a_2 \in A_2$, что $\beta_1' a_2 = c_1'$. Тогда $\beta_1 \alpha_2 a_2 = \gamma_1' \beta_1' a_2 = \gamma_1' c_1' = \beta_1 b$, т. е. $\alpha_2 a_2 - b \in \operatorname{Ker}\beta_1 = \operatorname{Im}\alpha_1$. Следовательно, существует такой элемент $a_1 \in A_1$, что $\alpha_2 a_2 - b = -\alpha_1 a_1$, т. е. $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Тем самым доказано, что $\operatorname{Ker} \beta \subset \operatorname{Im} \alpha$. Обратное включение $\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Ker} \beta$ очевидно. — *Прим. ред.*

дважды ковариантных), а также для функторов большего числа аргументов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Функтор* Hom_A *точен слева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точную последовательность

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0.$$

Мы должны доказать точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'', C) \xrightarrow{p'} \mathrm{Hom}(A, C) \xrightarrow{i'} \mathrm{Hom}(A', C).$$

Как мы уже знаем, $i'p' = 0$, и, следовательно, гомоморфизм p' индуцирует некоторый гомоморфизм

$$u : \mathrm{Hom}(A'', C) \longrightarrow \mathrm{Ker}(i').$$

Достаточно доказать, что u является изоморфизмом. С этой целью построим гомоморфизм

$$v : \mathrm{Ker}(i') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'', C),$$

определив для любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, C)$, принадлежащего $\mathrm{Ker}(i')$, и любого элемента $a'' \in A''$ элемент $(vf)a'' \in C$ как элемент $f(a)$, где a — такой элемент модуля A, что $p(a) = a''$ (элемент $f(a)$ зависит только от a'', так как $fi = i'f = 0$). Легко проверить, что композиции uv и vu являются тождественными отображениями и, следовательно, гомоморфизм u является изоморфизмом.

Точность слева относительно второго аргумента C доказывается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Функтор* $\otimes_A$ *точен справа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ту же точную последовательность (1), что и выше. Мы должны показать, что имеет место точная последовательность

$$A' \otimes C \xrightarrow{i'} A \otimes C \xrightarrow{p'} A'' \otimes C \to 0.$$

Так как $p'i' = 0$, то гомоморфизм p' индуцирует гомоморфизм

$$u : \mathrm{Coker}(i') \longrightarrow A'' \otimes C$$

и, значит, достаточно доказать, что u является изоморфизмом. Для любых элементов $a'' \in A''$, $c \in C$ выберем такой элемент $a \in A$, что $p(a) = a''$, и обозначим через $\varphi(a'', c)$ образ в $\mathrm{Coker}(i')$ элемента $a \otimes c$. Очевидно, что элемент $\varphi(a'', c)$ не зависит от выбора элемента a. Построенная функция φ билинейна и удовлетворяет соотношению $\varphi(a''\lambda, c) = \varphi(a'', \lambda c)$. Рассмотрим гомоморфизм

$$v : A'' \otimes C \to \mathrm{Coker}(i'),$$

для которого $v(a'' \otimes c) = \varphi(a'', c)$. Легко видеть, что композиции uv и vu являются тождественными отображениями и, следовательно, u является изоморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Λ-модуль A тогда и только тогда проективен, когда точен функтор $T(C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$. Λ-модуль C тогда и только тогда инъективен, когда точен функтор $U(A) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функтор T точен слева, то он тогда и только тогда представляет собой точный функтор, когда для любого эпиморфизма $C \to C''$ отображение $\mathrm{Hom}(A, C) \to \to \mathrm{Hom}(A, C'')$ также является эпиморфизмом. Но это требование равносильно проективности модуля A. Второе утверждение доказывается аналогично.

5. СЛОЖНЫЕ ФУНКТОРЫ

Подобно сложным функциям, можно определить и сложные функторы. Пусть, например, функтор $T(A, C)$ определен на Λ_1-модулях A, Λ_2-модулях C и имеет значениями Λ-модули, а функтор $U(D, E)$ определен на Λ_3-модулях D, Λ_4-модулях E и имеет значениями Λ_1-модули. Тогда мы определяем сложный функтор V, полагая

$$V(D, E, C) = T(U(D, E), C),$$
$$V(\delta, \varepsilon, \gamma) = T(U(\delta, \varepsilon), \gamma).$$

По аргументу C функтор V имеет тот же самый характер (т. е. ковариантен или контравариантен), что и функтор T ; по аргументам D и E функтор V имеет тот же самый или противоположный характер, что и функтор T, в зависимости от того, ковариантен или контравариантен функтор T по аргументу A.

Если оба функтора U и T точны, то точным будет и функтор V. Если один из функторов U или T точен, а другой полуточен, то функтор V будет полуточным. Если функтор T по аргументу A ковариантен и оба функтора T и U точны справа (слева), то и функтор V будет точным справа (соответственно слева). Если функтор T по аргументу A контравариантен и функтор T точен справа (слева), а функтор U точен слева (справа), то функтор V будет точным справа (соответственно слева). Эти утверждения проще всего доказываются с помощью характеристических свойств (b) точных справа и точных слева функторов, сформулированных в предложениях 4.3 и 4.3а.

Сочетая функторы $\otimes$ и Hom, мы получим набор различных сложных функторов трех аргументов. Установим некоторые соотношения между этими функторами.

Начнем с рассмотрения ситуации, описываемой символом $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, {}_\Gamma C)$, т. е. рассмотрим случай, когда A — правый Λ-модуль, C — левый Γ-модуль, а B — Λ-Γ-бимодуль с левыми операторами из кольца Λ и правыми операторами из кольца Γ. В этом случае $A \otimes_\Lambda B$ является правым Γ-модулем, а $B \otimes_\Gamma C$ — левым Λ-модулем, так что определены группы

$$(A \otimes_\Lambda B) \otimes_\Gamma C, \qquad A \otimes_\Lambda (B \otimes_\Gamma C).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует единственный гомоморфизм*

$$r: (A \otimes_\Lambda B) \otimes_\Gamma C \to A \otimes_\Lambda (B \otimes_\Gamma C),$$

для которого $r((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$. *Гомоморфизм* r *является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов. Этот факт выражает ассоциативность тензорного произведения.*

Теперь рассмотрим ситуацию, описываемую символом $({}_\Lambda A, {}_\Gamma B_\Lambda, {}_\Gamma C)$. В этом случае $B \otimes_\Lambda A$ и C являются левыми Γ-модулями, а A и $\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)$ — левыми Λ-модулями, так что определены группы

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)), \qquad \mathrm{Hom}_\Gamma(B \otimes_\Lambda A, C).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Существует единственный гомоморфизм*

$$s: \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(B \otimes_\Lambda A, C),$$

для которого $(s\varphi)(b \otimes a) = (\varphi a)\, b$, *где* $\varphi: A \to \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)$. *Гомоморфизм* s *является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов.*

Случай $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$ отличается от предыдущего лишь тем, что правые операторы заменяются левыми и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2′. *Существует единственный гомоморфизм*

$$s': \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(A \otimes_\Lambda B, C),$$

для которого $(s'\varphi)(a \otimes b) = (\varphi a)\, b$, *где* $\varphi: A \to \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)$. *Гомоморфизм* s' *является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов.*

Доказательства предложений 5.1, 5.2 и 5.2′ совершенно тривиальны, и мы предоставляем провести их читателю. Мы будем часто рассматривать изоморфизмы r, s и s' как отождествления.

Из сформулированных выше свойств сложных функторов следует, что функтор, о котором идет речь в предложении 5.1, ковариантен по всем трем аргументам и точен справа. Функторы, рассматриваемые в предложениях 5.2 и 5.2′, контравариантны по аргументам A и B, ковариантны по аргументу C и точны слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Если в ситуации* $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma)$ *модуль* A *Λ-проективен*[1]*, а модуль* B *Γ-проективен, то модуль* $A \otimes_\Lambda B$ *Γ-проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C — произвольный правый Γ-модуль. Согласно предложению 4.6, функтор $\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)$, а следовательно, и функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))$ являются точными функторами аргумента C. Поэтому, согласно предложению 5.2′, функтор $\mathrm{Hom}_\Gamma(A \otimes_\Lambda B, C)$ также будет точным функтором аргумента C.

---

[1] Выражение «Λ-проективный модуль» равносильно выражению «проективный Λ-модуль»; первым выражением удобно пользоваться при рассмотрении бимодулей. В аналогичном смысле в дальнейшем используется выражение «Λ-инъективный модуль». — *Прим. перев.*

Следовательно, вновь используя предложение 4.6, мы получаем что модуль $A \otimes_\Lambda B$ Γ-проективен.

Аналогичное предложение имеет место и в ситуации $({}_\Gamma B_\Lambda, {}_\Lambda A)$. Относительно ситуации $({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma C)$ см. предложение VI, 1.4.

6. ЗАМЕНА КОЛЕЦ

В этом параграфе мы будем рассматривать два кольца Λ и Γ и фиксированный гомоморфизм колец

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma \qquad (\varphi(1) = 1).$$

Каждый левый Γ-модуль A можно превратить в левый Λ-модуль, полагая

$$\lambda a = \varphi(\lambda)\, a, \qquad \lambda \in \Lambda,\ a \in A.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для правых Γ-модулей. В частности, само кольцо Γ можно рассматривать и как левый, и как правый Λ-модуль.

Предположим теперь, что A — правый Λ-модуль, и рассмотрим ситуацию, описываемую символом $(A_\Lambda, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma)$ (таким образом, кольцо Γ мы рассматриваем как левый Λ-модуль и как правый Γ-модуль). Тогда определен правый Γ-модуль

$$A_{(\varphi)} = A \otimes_\Lambda \Gamma,$$

который мы будем называть *ковариантным φ-расширением модуля* A. Если A — левый Λ-модуль, то, рассматривая ситуацию $({}_\Gamma\Gamma_\Lambda, {}_\Lambda A)$, мы определим левый Γ-модуль ${}_{(\varphi)}A$, полагая ${}_{(\varphi)}A = \Gamma \otimes_\Lambda A$. Очевидно, что $A_{(\varphi)}$ (так же как и ${}_{(\varphi)}A$) является ковариантным точным справа функтором аргумента A.

Предполагая вновь, что A — правый Λ-модуль, рассмотрим ситуацию $({}_\Gamma\Gamma_\Lambda, A_\Lambda)$. Тогда определен правый Γ-модуль

$$A^{(\varphi)} = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, A),$$

который мы будем называть *контравариантным φ-расширением* модуля A. Если A — левый Λ-модуль, то, рассматривая ситуацию $({}_\Lambda\Gamma_\Gamma, {}_\Lambda A)$, мы подобным же образом определим левый Γ-модуль ${}^{(\varphi)}A$. Очевидно, что $A^{(\varphi)}$ (так же как и ${}^{(\varphi)}A$) является ковариантным точным слева функтором аргумента A.

Пусть A — правый Λ-модуль. Тогда гомоморфизм $A \otimes \varphi : A \otimes_\Lambda \Lambda \to A \otimes_\Lambda \Gamma$ определяет некоторый Λ-гомоморфизм

$$A \longrightarrow A_{(\varphi)}.$$

Аналогично для любого левого Λ-модуля A определяется Λ-гомоморфизм $A \to {}_{(\varphi)}A$. Определим, наконец, Λ-гомоморфизм

$$A^{(\varphi)} \longrightarrow A$$

как Λ-гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\varphi, A) : \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)$.

Воспользуемся теперь соотношениями, установленными в § 5, в следующих четырех случаях.

Случай 1. $(A_\Lambda, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma, {}_\Gamma C)$. Полагая в предложении 5.1 $B = \Gamma$, получим

(1) $$A \otimes_\Lambda C = A_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C.$$

Случай 2. $(A_\Gamma, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda, {}_\Lambda C)$. Вновь используя предложение 5.1, получим

(2) $$A \otimes_\Lambda C = A \otimes_\Gamma ({}_{(\varphi)}C).$$

Случай 3. $({}_\Lambda A, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda, {}_\Gamma C)$. Полагая в предложении 5.2 $B = \Gamma$, получим

(3) $$\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma ({}_{(\varphi)}A, C).$$

Случай 4. $({}_\Gamma A, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma, {}_\Lambda C)$. Вновь используя предложение 5.2, получим

(4) $$\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma (A, {}^{(\varphi)}C).$$

Мы можем также рассмотреть случаи 3′ и 4′, описываемые символами $(A_\Lambda, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma, C_\Gamma)$ и $(A_\Gamma, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda, C_\Lambda)$. Применяя к этим случаям предложение 5.2′, мы получим

(3′) $$\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma (A_{(\varphi)}, C),$$

(4′) $$\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma (A, C^{(\varphi)}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любого проективного правого (левого) Λ-модуля A правый (левый) Γ-модуль $A_{(\varphi)}$ также проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — проективный правый Λ-модуль. Тогда, согласно предложению 4.6, $\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C)$ является точным функтором аргумента C. Но в таком случае, согласно соотношению (3′), $\mathrm{Hom}_\Gamma (A_{(\varphi)}, C)$ является точным функтором аргумента C и, следовательно, согласно предложению 4.6, правый Γ-модуль $A_{(\varphi)}$ проективен.

Подобным же образом с помощью соотношений (4) или (4′) доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1а. *Для любого инъективного правого (левого) Λ-модуля C правый (левый) Γ-модуль $C^{(\varphi)}$ также инъективен.*

Пусть теперь A — правый Γ-модуль. Определим Γ-гомоморфизм

$$g : A_{(\varphi)} \longrightarrow A,$$

полагая $g(a \otimes \gamma) = a\gamma$. Так как сквозное отображение $A \to A_{(\varphi)} \xrightarrow{g} A$ совпадает с тождественным отображением, то g является эпиморфизмом, а $\mathrm{Ker}(g)$ — прямым слагаемым группы $A_{(\varphi)}$, рассматриваемой как Λ-модуль. В случае же, когда Γ-модуль A проективен, ядро $\mathrm{Ker}(g)$ будет прямым слагаемым группы $A_{(\varphi)}$, рассматриваемой и как Γ-модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Γ-модуль A называется *φ-проективным*, если $\mathrm{Ker}(g)$ является прямым слагаемым Γ-модуля $A_{(\varphi)}$, т. е. если точная последовательность Γ-модулей $0 \to \operatorname{Ker}(g) \to A_{(\varphi)} \xrightarrow{g} A \to 0$ расщепляема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если Γ-модуль A Λ-проективен и φ-проективен, то он и Γ-проективен. Если кольцо Γ Λ-проективно, то любой Γ-проективный модуль A Λ-проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль A Λ-проективен, то, согласно предложению 6.1, модуль $A_{(\varphi)}$ Γ-проективен. Если, кроме того, модуль A φ-проективен, то он изоморфен прямому слагаемому Γ-проективного Γ-модуля $A_{(\varphi)}$, а потому и сам Γ-проективен.

Если кольцо Γ, рассматриваемое как Λ-модуль, Λ-проективно, то $C^{(\varphi)}$ является точным функтором (правого) Λ-модуля C. Если, кроме того, модуль A Γ-проективен, то $\operatorname{Hom}_\Gamma(A, C^{(\varphi)})$, а потому, согласно соотношению (4′), и $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, C)$ будут точными функторами аргумента C. Следовательно, модуль A Λ-проективен.

Пусть C — правый Γ-модуль. Сопоставляя каждому элементу $c \in C$ гомоморфизм $h(c): \gamma \to c\gamma$, мы получим Γ-гомоморфизм

$$h: C \longrightarrow C^{(\varphi)}.$$

Так как сквозное отображение $C \xrightarrow{h} C^{(\varphi)} \to C$ является тождественным отображением, то h является мономорфизмом, а $\operatorname{Im}(h)$ — прямым слагаемым группы $C^{(\varphi)}$, рассматриваемой как Λ-модуль. В случае же, когда модуль C Γ-инъективен, $\operatorname{Im}(h)$ является прямым слагаемым группы $C^{(\varphi)}$, рассматриваемой и как Γ-модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Γ-модуль C называется *φ-инъективным*, если $\operatorname{Im}(h)$ является прямым слагаемым Γ-модуля $C^{(\varphi)}$, т. е. если точная последовательность Γ-модулей $0 \to C \xrightarrow{h} C^{(\varphi)} \to \operatorname{Coker}(h) \to 0$ расщепляема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2а. *Если Γ-модуль C Λ-инъективен и φ-инъективен, то он и Γ-инъективен. Если кольцо Γ Λ-проективно, то любой Γ-инъективный модуль C Λ-инъективен.*

Доказательство двойственно доказательству предложения 6.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Для любого правого (левого) Λ-модуля A модуль $A_{(\varphi)}$ является φ-проективным, а модуль $A^{(\varphi)}$ — φ-инъективным модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лишь φ-проективность модуля $A_{(\varphi)}$, где A — правый Λ-модуль. Определим гомоморфизмы

$$\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma \otimes_\Lambda \Gamma \xrightarrow{\beta} \Gamma,$$

полагая $\alpha(\gamma) = 1 \otimes \gamma$ и $\beta(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \gamma_1\gamma_2$. Отображения α и β являются левыми Λ-гомоморфизмами и правыми Γ-гомоморфизмами. Поскольку $\beta\alpha$ является тождественным отображением, композиция $\beta'\alpha'$ правых Γ-гомоморфизмов

$$A \otimes_\Lambda \Gamma \xrightarrow{\alpha'} A \otimes_\Lambda (\Gamma \otimes_\Lambda \Gamma) \xrightarrow{\beta'} A \otimes_\Lambda \Gamma$$

также будет тождественным отображением. С другой стороны, при отождествлении $A \otimes_\Lambda (\Gamma \otimes_\Lambda \Gamma) = (A \otimes_\Lambda \Gamma) \otimes_\Lambda \Gamma = A_{(\varphi)} \otimes_\Lambda \Gamma$ гомоморфизм β' переходит, как легко видеть, в гомоморфизм $g: (A_{(\varphi)})_{(\varphi)} \to A_{(\varphi)}$. Следовательно, модуль $A_{(\varphi)}$ φ-проективен.

В заключение приведем еще один метод вложения произвольного левого Γ-модуля A в некоторый инъективный Γ-модуль (см. теорему I, 3.3), опирающийся на предложение 6.1а. Предположим, что задача уже решена для модулей над кольцом целых чисел Z (см. замечание в конце § VII, 5), и рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi: Z \to \Gamma$. Согласно нашему предположению, существует Z-мономорфизм $A \to Q$, где Q — инъективный Z-модуль. Так как функтор Hom точен слева, то Γ-гомоморфизм ${}^{(\varphi)}A \to {}^{(\varphi)}Q$ является мономорфизмом; Γ-мономорфизмом является и отображение $A \to {}^{(\varphi)}A$. Но тогда и композиция этих отображений $A \to {}^{(\varphi)}Q$ является Γ-мономорфизмом. Согласно предложению 6.1а, модуль ${}^{(\varphi)}Q$ Γ-инъективен. Это доказательство сообщено нам Б. Экманом. Аналогичное доказательство найдено также Г. Форрестером.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что операции $A + B$ и $A \otimes A$ являются неаддитивными функторами, а операции $A \otimes B + B \otimes A$ и $A + A$ — аддитивными.

2. Для любого фиксированного семейства $\{A_\alpha\}$ правых Λ-модулей определим на левых Λ-модулях C функторы

$$U(C) = (\prod_\alpha A_\alpha) \otimes_\Lambda C, \qquad V(C) = \prod_\alpha (A_\alpha \otimes_\Lambda C).$$

Доказать, что функтор V точен справа и что он тогда и только тогда точен, когда для каждого индекса α тензорное произведение $A_\alpha \otimes_\Lambda C$ является точным функтором аргумента C.

Доказать, что соответствие $\{a_\alpha\} \otimes c \to \{a_\alpha \otimes c\}$ определяет естественное отображение $f: U \to V$ функтора U в функтор V. Доказать, что если модуль C имеет конечное число образующих, то отображение $f: U(C) \to V(C)$ является эпиморфизмом.

Предполагая, что кольцо Λ нетерово слева, а модуль C имеет конечное число образующих, показать, что отображение $U(C) \to V(C)$ является изоморфизмом. (Указание: использовать точную последовательность $0 \to N \to F \to C \to 0$, в которой F — свободный модуль с конечной базой.)

3. Пусть $g: T \to U$ — естественное отображение функторов, и пусть $\widetilde{T} = \operatorname{Ker}(g)$, $\widetilde{U} = \operatorname{Coker}(g)$. Доказать следующие предложения:

если функтор T полуточен, а функтор U точен слева, то функтор $\widetilde{T}$ полуточен;

если функторы T и U точны слева, то и функтор $\widetilde{T}$ точен слева;

если функтор T точен справа, а функтор U полуточен, то функтор

$\tilde{U}$ полуточен;

если функторы T и U точны справа, то и функтор $\tilde{U}$ точен справа.

4. В ситуации $({}_\Lambda A, B_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$ определить естественное отображение

$$t : \mathrm{Hom}_\Lambda (A, \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C)) \to \mathrm{Hom}_\Gamma (B, \mathrm{Hom}_\Lambda (A, C))$$

и показать, что оно является естественным изоморфизмом.

5. В ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C_\Gamma)$ показать, что если модуль A Λ-проективен, а модуль C Γ-инъективен, то модуль $\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C)$ Γ-инъективен.

6. Пусть Λ — коммутативное кольцо, и пусть A и C — Λ-модули с конечным числом образующих. Показать, что тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ является Λ-модулем с конечным числом образующих. Предполагая, что кольцо Λ нетерово, показать, что $\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C)$ является Λ-модулем с конечным числом образующих.

7. Пусть Λ — кольцо, допускающее гомоморфное отображение $\varphi : \Lambda \to K$ в некоторое тело K. Доказать равномощность любых двух баз произвольного свободного левого Λ-модуля F. (Указание: рассмотреть левый K-модуль ${}_{(\varphi)}F$.) Доказать, что для коммутативного кольца Λ гомоморфизм φ всегда существует.

ГЛАВА III

САТЕЛЛИТЫ

Введение. Каждому функтору T одного аргумента (ковариантного или контравариантного) мы сопоставляем правый сателлит S^1T и левый сателлит $S^{-1}T = S_1T$, также являющиеся функторами одного аргумента (соответственно ковариантного или контравариантного). Повторяя это построение, мы для любого целого числа n $(-\infty < n < \infty)$ получим сателлиты S^nT, считая, что $S^0T = T$. Если функтор T полуточен, то каждая точная последовательность

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

порождает бесконечную точную последовательность, состоящую из значений всех сателлитов функтора T на модулях A', A, A''. Анализ этого построения приводит к важному понятию «связанной последовательности функторов» (§ 4), с помощью которого удается дать аксиоматическое определение сателлитов (§ 5).

По существу сателлиты определяются только для функторов одного аргумента, причем сателлиты высших порядков определяются при помощи итераций. Этим теория сателлитов резко отличается от основывающейся на гомологических методах теории производных функторов (гл. V), в которой производные функторы всех порядков определяются одновременно. Так как основное содержание этой книги опирается преимущественно на понятие производного функтора, то детальное изучение этой главы не столь необходимо. Тем не менее читателю будет очень полезно познакомиться в этой главе как с техникой доказательств, опирающихся на диаграммы, так и с понятием «связанной последовательности функторов».

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ САТЕЛЛИТОВ

Очевидно, что для любой диаграммы

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & P_1 & \xrightarrow{\beta_1} & A_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками и проективным модулем P существует такой гомоморфизм $f: P \to P_1$, что $\beta_1 f = g\beta$. Этот гомоморфизм однозначно определяет гомоморфизм $f' : M \to M_1$, для которого $\alpha_1 f' = f\alpha$.

Пусть T — произвольный ковариантный (аддитивный) функтор одного аргумента. Из коммутативности диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
T(M) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(P) \\
{\scriptstyle T(f')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\
T(M_1) & \xrightarrow[T(\alpha_1)]{} & T(P_1)
\end{array}
\tag{2}
$$

следует, что гомоморфизм $T(f')$ индуцирует некоторый гомоморфизм

$$\vartheta_1(g) : \operatorname{Ker} T(\alpha) \longrightarrow \operatorname{Ker} T(\alpha_1).$$

Для контравариантного функтора T направления всех стрелок в диаграмме (2) изменяются на противоположные, а гомоморфизм $\vartheta_1(g)$ заменяется гомоморфизмом

$$\vartheta^1(g) : \operatorname{Coker} T(\alpha_1) \longrightarrow \operatorname{Coker} T(\alpha).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Гомоморфизмы $\vartheta_1(g)$ и $\vartheta^1(g)$ не зависят от выбора гомоморфизма f и удовлетворяют соотношениям аддитивности $\vartheta_1(g+\bar{g}) = \vartheta_1(g) + \vartheta_1(\bar{g})$, $\vartheta^1(g+\bar{g}) = \vartheta^1(g) + \vartheta^1(\bar{g})$ и транзитивности $\vartheta_1(g_1 g) = \vartheta_1(g_1)\,\vartheta_1(g)$, $\vartheta^1(g_1 g) = \vartheta^1(g)\,\vartheta^1(g_1)$.*

Соотношения транзитивности относятся к диаграмме

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \\
0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

с точными строками и проективными модулями P и P_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду точности нижней строки диаграммы (1) гомоморфизм f можно заменить лишь гомоморфизмом $\bar{f} = f + \alpha_1 h$, где $h : P \to M_1$. При этом гомоморфизм f' заменяется гомоморфизмом $\bar{f}' = f' + h\alpha$. Таким образом, если функтор T ковариантен, то $T(\bar{f}') = T(f') + T(h)\,T(\alpha)$, и поэтому на ядре гомоморфизма $T(\alpha)$ оба гомоморфизма $T(\bar{f}')$ и $T(f')$ действуют одинаково. Следовательно, гомоморфизм $\vartheta_1(g)$ действительно определен однозначно. Если же функтор T контравариантен, то $T(\bar{f}') = T(f') + T(\alpha)\,T(h)$ и гомоморфизмы $T(\bar{f}')$ и $T(f')$ совпадают по модулю $\operatorname{Im}(T(\alpha))$. Таким образом, гомоморфизм $\vartheta^1(g)$ также определен однозначно. Для доказательства аддитивности и транзитивности гомоморфизмов $\vartheta_1(g)$ и $\vartheta^1(g)$ достаточно к гомоморфизмам $g, \bar{g}, g_1$ произвольно подобрать гомоморфизмы $f, \bar{f}, f_1$, а затем гомоморфизмам $g + \bar{g}$ и $g_1 g$ сопоставить соответственно гомоморфизмы $f + \bar{f}$ и $f_1 f$.

Рассмотрим теперь диаграмму

(1a)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "g"] & Q_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & N_1 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\beta"] & Q \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точными строками и инъективным модулем Q. В этом случае существует такой гомоморфизм $f : Q_1 \to Q$, что $f\beta_1 = \beta g$. Этот гомоморфизм однозначно определяет гомоморфизм $f' : N_1 \to N$, для которого $f'\alpha_1 = \alpha f$.

Если функтор T ковариантен, то диаграмма

(2a)
$$\begin{tikzcd} T(Q_1) \arrow[r, "T(\alpha_1)"] \arrow[d, "T(f)"'] & T(N_1) \arrow[d, "T(f')"] \\ T(Q) \arrow[r, "T(\alpha)"'] & T(N) \end{tikzcd}$$

коммутативна и гомоморфизм $T(f')$ индуцирует гомоморфизм

$$\vartheta^1(g) : \mathrm{Coker}\, T(\alpha_1) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, T(\alpha).$$

Для контравариантного функтора T направления всех стрелок в диаграмме (2a) изменяются на противоположные, а гомоморфизм $\vartheta^1(g)$ заменяется гомоморфизмом

$$\vartheta_1(g) : \mathrm{Ker}\, T(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, T(\alpha_1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1a. *Гомоморфизмы $\vartheta^1(g)$ и $\vartheta_1(g)$ не зависят от выбора гомоморфизма f и удовлетворяют соотношениям аддитивности $\vartheta^1(g + \bar{g}) = \vartheta^1(g) + \vartheta^1(\bar{g})$, $\vartheta_1(g + \bar{g}) = \vartheta_1(g) + \vartheta_1(\bar{g})$ и транзитивности $\vartheta^1(g_1 g) = \vartheta^1(g_1)\, \vartheta^1(g)$, $\vartheta_1(g_1 g) = \vartheta_1(g)\, \vartheta_1(g_1)$.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1.1, и поэтому мы его опускаем.

Теперь у нас все готово для определения основного понятия настоящей главы.

Пусть A — произвольный модуль, и пусть

(3) $$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

(4) $$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

– две точные последовательности, в первой из которых модуль P проективен, а во второй модуль Q инъективен. Существование таких точных последовательностей обеспечивается теоремами I, 2.3 и I, 3.3.

Для любого ковариантного функтора T мы положим

(5) $$S_1 T(A) = \mathrm{Ker}\, (T(M) \longrightarrow T(P)),$$

(6) $$S^1 T(A) = \mathrm{Coker}\, (T(Q) \longrightarrow T(N)).$$

Следовательно, имеют место точные последовательности

(5′) $$0 \longrightarrow S_1T(A) \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(P),$$

(6′) $$T(Q) \longrightarrow T(N) \longrightarrow S^1T(A) \longrightarrow 0.$$

По определению, модули $S_1T(A)$ и $S^1T(A)$ зависят от выбора последовательностей (3) и (4). Пусть модули $\bar{S}_1T(A)$ и $\bar{S}^1T(A)$ получены подобным же образом с помощью другой пары точных последовательностей $0 \to \bar{M} \to \bar{P} \to A \to 0$ и $0 \to A \to \bar{Q} \to \bar{N} \to 0$, в первой из которых модуль $\bar{P}$ проективен, а во второй модуль $\bar{Q}$ инъективен. Тогда определены отображения

$$S_1T(A) \longrightarrow \bar{S}_1T(A), \qquad \bar{S}_1T(A) \longrightarrow S_1T(A),$$
$$S^1T(A) \longrightarrow \bar{S}^1T(A), \qquad \bar{S}^1T(A) \longrightarrow S^1T(A),$$

являющиеся соответственно гомоморфизмами $\vartheta_1(g)$ и $\vartheta^1(g)$, построенными для случая, когда $A = A_1$ и g является тождественным отображением.

Из доказанной в предложениях 1.1 и 1.1а транзитивности следует, что соответствующие пары этих отображений состоят из взаимно обратных изоморфизмов. Таким образом, модули (5) и (6) с точностью до естественного изоморфизма определяются однозначно. При совершенно иедантичном определении модулей (5) и (6) следует точные последовательности (3) и (4) выбирать каким-нибудь одним определенным образом, например за эти последовательности можно принять последовательности, построенные при доказательстве теорем I, 2.3 и I, 3.3.

Для любого гомоморфизма $g : A \to A_1$ гомоморфизмы $\vartheta_1(g)$ и $\vartheta^1(g)$ определяют отображения

(7) $$S_1T(g) : S_1T(A) \longrightarrow S_1T(A_1),$$

(8) $$S^1T(g) : S^1T(A) \longrightarrow S^1T(A_1).$$

Из предложений 1.1 и 1.1а следует, что формулы (5)—(8) определяют ковариантные (аддитивные) функторы S_1T и S^1T ; функтор S_1T называется *левым сателлитом*, а функтор S^1T — *правым сателлитом* функтора T. Эти функторы определены на тех же категориях модулей, что и функтор T.

Если функтор T контравариантен, то формулы (5)—(8) заменяются формулами :

(5а) $$S_1T(A) = \operatorname{Ker}\,(T(N) \longrightarrow T(Q))\ ;$$

(6а) $$S^1T(A) = \operatorname{Coker}\,(T(P) \longrightarrow T(M))\ ;$$

(5′а) $$0 \longrightarrow S_1T(A) \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(Q)\ ;$$

(6′а) $$T(P) \longrightarrow T(M) \longrightarrow S^1T(A) \longrightarrow 0\ ;$$

(7а) $$S_1T(g) : S_1T(A_1) \longrightarrow S_1T(A)\ ;$$

(8а) $$S^1T(g) : S^1T(A_1) \longrightarrow S^1T(A).$$

В этом случае левый сателлит S_1T и правый сателлит S^1T также являются контравариантными функторами.

Сателлиты высших порядков определяются индуктивными формулами

$$S_{n+1}T = S_1(S_nT), \qquad S_0T = T,$$
$$S^{n+1}T = S^1(S^nT), \qquad S^0T = T.$$

Все левые и все правые сателлиты функтора T целесообразно расположить в одну последовательность $\{S^nT\}$, $-\infty < n < \infty$, условившись в том, что

$$S_nT = S^{-n}T.$$

Следующие свойства сателлитов непосредственно вытекают из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если функтор T точен справа, то $S^nT = 0$ для всех $n > 0$. Если функтор T точен слева, то $S^nT = 0$ для всех $n < 0$. Если функтор T точен, то $S^nT = 0$ для любого $n \neq 0$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если функтор T ковариантен (контравариантен), а модуль A проективен (соответственно инъективен), то $S^nT(A) = 0$ для всех $n < 0$. Если же модуль A инъективен (соответственно проективен), то $S^nT(A) = 0$ для всех $n > 0$.*

Действительно, если модуль A проективен, то можно положить $P = A$, $M = 0$; если же модуль A инъективен, то можно положить $Q = A$, $N = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть $0 \to M \to P \to A \to 0$ и $0 \to A \to \to Q \to N \to 0$ — точные последовательности, в первой из которых модуль P проективен, а во второй модуль Q инъективен. Если функтор T ковариантен, то*

$$S_{n+1}T(A) = S_nT(M), \quad S^{n+1}T(A) = S^nT(N), \qquad n > 0.$$

Если же функтор T контравариантен, то

$$S_{n+1}T(A) = S_nT(N), \quad S^{n+1}T(A) = S^nT(M), \qquad n > 0.$$

Это утверждение легко следует из предложения 1.3 и из точности последовательностей (5'), (6'), (5'a) и (6'a).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Если функтор T определен на категории модулей над наследственным[1]) кольцом Λ, то $S^nT = 0$, когда $|n| > 1$.*

Действительно, в этом случае модуль M проективен, а модуль N инъективен и поэтому достаточно сослаться на предложения 1.4 и 1.3.

[1]) Имеется в виду наследственность слева, если рассматриваются левые модули, и наследственность справа, если рассматриваются правые модули. — *Прим. перев.*

2. СВЯЗЫВАЮЩИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

В этом параграфе рассматриваются фиксированная точная последовательность

(1) $$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

и фиксированная коммутативная диаграмма

(2) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точными строками.

Пусть $0 \to M \to P \to A'' \to 0$ — произвольная точная последовательность с проективным модулем P. Обозначая через g тождественное отображение, мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

аналогичную диаграмме, рассмотренной в § 1. Если функтор T ковариантен, то, согласно предложению 1.1, этой диаграмме соответствует гомоморфизм

$$\partial_1(g) : \operatorname{Ker}(T(M) \longrightarrow T(P)) \longrightarrow \operatorname{Ker}(T(A') \longrightarrow T(A)).$$

Этот гомоморфизм определяет некоторый гомоморфизм

(3) $$\Theta_1 : S_1T(A'') \longrightarrow T(A'),$$

композиция которого с гомоморфизмом $T(A') \to T(A)$ равна нулю. Подобным же образом с помощью точной последовательности $0 \to A' \to Q \to N \to 0$ с инъективным модулем Q определяется некоторый гомоморфизм

(3a) $$\Theta^1 : T(A'') \to S^1T(A'),$$

композиция которого с гомоморфизмом $T(A) \to T(A'')$ равна нулю.

Для случая, когда функтор T контравариантен, аналогично строятся гомоморфизмы

(3′) $$\Theta_1 : S_1T(A') \to T(A''),$$

(3′a) $$\Theta^1 : T(A') \to S^1T(A'').$$

Из предложений 1.1 и 1.1a легко следует, что гомоморфизмы (3), (3a), (3′), (3′a) не зависят от выбора вспомогательных последовательностей $0 \to M \to P \to A'' \to 0$ и $0 \to A' \to Q \to N \to 0$. Таким образом, для любого ковариантного функтора T возникает бесконечная последовательность

(4) $$\cdots \longrightarrow S^{n-1}T(A'') \xrightarrow{\Theta} S^nT(A') \longrightarrow S^nT(A) \longrightarrow S^nT(A'') \xrightarrow{\Theta} S^{n+1}T(A') \longrightarrow \cdots,$$

где n пробегает все целые числа. Если функтор T контравариантен, то в последовательности (4) нужно переставить между собой модули A' и A''.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если функтор T ковариантен, то диаграмма* (2) *порождает коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & S^{n-1}T(A'') \arrow[r] \arrow[d] & S^n T(A') \arrow[r] \arrow[d] & S^n T(A) \arrow[r] \arrow[d] & S^n T(A'') \arrow[r] \arrow[d] & S^{n+1} T(A') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & S^{n-1}T(B'') \arrow[r] & S^n T(B') \arrow[r] & S^n T(B) \arrow[r] & S^n T(B'') \arrow[r] & S^{n+1} T(B') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Для контравариантного функтора T следует изменить направления всех стрелок на противоположные и опустить вниз индексы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать коммутативность в квадратах, содержащих гомоморфизм Θ. Мы сделаем это для квадрата

$$\begin{tikzcd} S_1 T(A'') \arrow[r] \arrow[d] & T(A') \arrow[d] \\ S_1 T(B'') \arrow[r] & T(B') \end{tikzcd}$$

в предположении, что функтор T ковариантный. Пусть $0 \to M \to P \to A'' \to 0$ и $0 \to \overline{M} \to \overline{P} \to B'' \to 0$ — произвольные точные последовательности, в первой из которых проективен модуль P, а во второй проективен модуль $\overline{P}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

которой соответствует некоторый гомоморфизм $S_1T(A'') \to T(B')$. Этот гомоморфизм, как нетрудно проверить, совпадает со сквозным гомоморфизмом $S_1T(A'') \to T(A') \to T(B')$. В то же время, рассматривая диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{M} \arrow[r] & \overline{P} \arrow[r] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

и применяя к ней предложение 1.1, мы получим, что гомоморфизм $S_1T(A'') \to T(B')$ совпадает и со сквозным гомоморфизмом $S_1T(A'') \to S_1T(B'') \to T(B')$. Тем самым коммутативность рассматриваемого квадрата полностью доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Композиция любых двух последовательных гомоморфизмов последовательности* (4) *равняется нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как сквозное отображение $A' \to A \to A''$ равно нулю, то и сквозное отображение $S^nT(A') \to$

$\to S^nT(A) \to S^nT(A'')$ также равно нулю. Рассмотрим теперь сквозное отображение

$$(5) \qquad S^nT(A) \longrightarrow S^nT(A'') \longrightarrow S^{n+1}T(A').$$

Выше, при определении гомоморфизма Θ^1, уже было замечено, что для $n = 0$ это отображение равно нулю. По аналогичным соображениям оно равно нулю и для $n > 0$. Таким образом, остается рассмотреть лишь случай $n < 0$, который сводится к случаю отображения

$$(6) \qquad S_1T(A) \longrightarrow S_1T(A'') \longrightarrow T(A').$$

Так как это отображение определяется из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & P'' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

то достаточно доказать, что нулю равен гомоморфизм ϑ, соответствующий диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Но это очевидно, поскольку за вертикальное отображение $P \to A$ мы можем принять горизонтальное отображение $P \to A$, и тогда индуцированное отображение $M \to A'$ будет равно нулю.

Равенство нулю сквозных отображений

$$S^nT(A'') \to S^{n+1}T(A') \to S^{n-1}T(A)$$

доказывается аналогично.

3. ПОЛУТОЧНЫЕ ФУНКТОРЫ

Основной целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любой точной последовательности*

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\varphi'} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$$

и любого ковариантного полуточного функтора T точна последовательность

$$(2) \qquad \ldots \to S^{n-1}T(A'') \to S^nT(A') \to S^nT(A) \to S^nT(A'') \to S^{n+1}T(A') \to \ldots .$$

Для контравариантного функтора T следует переставить между собой модули A' и A''.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем две леммы о гомоморфизмах, порожденных некоторыми диаграммами. Эти леммы будут нужны нам и в последующих параграфах.

ЛЕММА 3.2. *Гомоморфизмы коммутативной диаграммы*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\ C' \arrow[r, "\psi'"'] & C \arrow[r] & C'' \end{tikzcd}$$

с точными строками индуцируют последовательности

(3) $\operatorname{Ker}(f') \to \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(f'')$,

(4) $\operatorname{Coker}(f') \to \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(f'')$.

Если $\operatorname{Ker}(\psi') = 0$, *то точна последовательность* (3). *Аналогично, если* $\operatorname{Coker}(\varphi) = 0$, *то точна последовательность* (4).

Доказательство этой леммы мы оставляем читателю.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

(5)
$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\psi'"'] & C \arrow[r] & C'' & \end{tikzcd}$$

с точными строками. Для любого элемента $x \in \operatorname{Ker}(f'')$ существуют такие элементы $a \in A$ и $c' \in C'$, что $\varphi(a) = x$ и $\psi'(c') = f(a)$. Легко видеть, что соответствующий элементу c' элемент $y \in \operatorname{Coker}(f')$ зависит только от элемента x. Тем самым определяется некоторый гомоморфизм

$$\operatorname{Ker}(f'') \longrightarrow \operatorname{Coker}(f').$$

ЛЕММА 3.3. *Последовательность*

(6) $\operatorname{Ker}(f') \to \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(f'') \to \operatorname{Coker}(f') \to \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(f'')$

точна.

Проверку этого утверждения мы также оставляем читателю.

Отметим, что гомоморфизмы, входящие в последовательность (6), являются естественными в следующем смысле. Если $(\bar{5})$ — некоторая диаграмма, аналогичная диаграмме (5), то любое гомоморфное отображение диаграммы (5) в диаграмму $(\bar{5})$[1] индуцирует гомоморф-

[1] Гомоморфным отображением одной диаграммы в другую диаграмму, подобную первой, т. е. имеющую ту же комбинаторную схему, называется система гомоморфизмов модулей первой диаграммы в соответствующие модули второй диаграммы, при условии, что в любом «вертикальном» квадрате пространственной диаграммы, верхним и нижним основаниями которой служат данные диаграммы, выполнено соотношение коммутативности. — *Прим. перев.*

ное отображение точной последовательности (6) в точную последовательность ($\bar{6}$), соответствующую диаграмме ($\bar{5}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Применяя к последовательности (1) предложение I,2.5, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(M') & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & T(M'') \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ 0 & \longrightarrow & T(P') & \longrightarrow & T(P) & \longrightarrow & T(P'') \end{array}$$

с точными строками[1]). Согласно лемме 3.2, соответствующая этой диаграмме последовательность

$$\operatorname{Ker}(f') \longrightarrow \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow \operatorname{Ker}(f''),$$

т. е. последовательность

$$S_1T(A') \longrightarrow S_1T(A) \longrightarrow S_1T(A''),$$

точна.

Рассмотрим теперь произвольную точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P. Обозначая через R ядро сквозного отображения $P \to A \to A''$, мы можем составить две точные последовательности $0 \to R \to P \to A'' \to 0$ и $0 \to M \to R \to A' \to 0$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(M) & \longrightarrow & T(R) & \longrightarrow & T(A') \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T(P) & \longrightarrow & T(P) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками. Применяя к этой диаграмме лемму 3.2, мы получим точную последовательность

$$\operatorname{Ker}(f') \longrightarrow \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow T(A').$$

Но легко видеть, что гомоморфизм $\operatorname{Ker}(f) \to T(A')$ совпадает с гомоморфизмом $S_1T(A'') \to T(A')$. Следовательно, мы доказали, что последовательность

$$S_1T(A) \longrightarrow S_1T(A'') \longrightarrow T(A')$$

также точна.

Рассмотрим, наконец, произвольную точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi'} P \xrightarrow{\psi} A'' \longrightarrow 0 \tag{7}$$

с проективным модулем P. Пусть R — подмодуль прямой суммы $A + P$, состоящий из всех пар (a, p), для которых $\varphi(a) = \psi(p)$. Тогда соответствия $(a, p) \to a$, $(a, p) \to p$ определяют, очевидно,

[1]) Здесь используется полуточность функтора T. — *Прим. перев.*

некоторые гомоморфизмы $R \to A$ и $R \to P$; кроме того, соответствия $a' \to (\varphi'a', 0)$, $m \to (0, \psi'm)$ определяют некоторые гомоморфизмы $A' \to R$ и $M \to R$. В результате мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & R & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

с точными столбцами и строками, причем средняя строка этой диаграммы расщепляема, так как модуль P проективен. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T(A') & \longrightarrow & T(R) & \longrightarrow & T(P) & &
\end{array}$$

с точными строками, а следовательно, согласно лемме 3.3, и точная последовательность

$$\operatorname{Ker}(T(M) \longrightarrow T(P)) \xrightarrow{u} T(A') \xrightarrow{v} \operatorname{Coker}(T(M) \longrightarrow T(R)).$$

С другой стороны, из точности последовательности $T(M) \to T(R) \to$ $\to T(A)$ следует, что $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(T(A') \to T(A))$. Таким образом, имеет место точная последовательность

$$\operatorname{Ker}(T(M) \longrightarrow T(P)) \xrightarrow{u} T(A') \longrightarrow T(A).$$

Покажем теперь, что гомоморфизм u совпадает со связывающим[1] гомоморфизмом $\Theta_1 : S_1T(A'') \to T(A')$. Предположим сначала, что последовательность (1) совпадает с последовательностью (7). В этом случае легко видеть, что гомоморфизм[2]

$$\bar{u} : \operatorname{Ker}(T(M) \longrightarrow T(P)) \longrightarrow T(M)$$

является отображением вложения[3]. Для доказательства нашего

---

[1] Построенные в § 2 гомоморфизмы Θ авторы называют *связывающими* гомоморфизмами. — *Прим. перев.*

[2] То есть гомоморфизм u, построенный для последовательности (1). — *Прим. ред.*

[3] И, следовательно, совпадает с отображением Θ_1. — *Прим. ред.*

утверждения в общем случае рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma''} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

в которой γ'' является тождественным отображением. В силу естественности гомоморфизма u этой диаграмме соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker}(T(M) & \longrightarrow & T(P)) & \xrightarrow{\bar{u}} & T(M) \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle T(\gamma')} \\ \operatorname{Ker}(T(M) & \longrightarrow & T(P)) & \xrightarrow[u]{} & T(A') \end{array}$$

в которой левый вертикальный гомоморфизм является тождественным отображением. Таким образом, $u = T(\gamma')\bar{u} = \Theta_1$. Тем самым доказана точность последовательности

$$S_1T(A'') \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A).$$

Объединяя полученные результаты, мы видим, что последовательность

$$S_1T(A') \longrightarrow S_1T(A) \longrightarrow S_1T(A'') \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$$

точна. Точность последовательности

$$T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'') \longrightarrow S^1T(A') \longrightarrow S^1T(A) \longrightarrow S^1T(A'')$$

доказывается двойственными рассуждениями. Тем самым, в частности, показано, что функторы S_1T и S^1T полуточны. Для доказательства точности последовательности (2) остается теперь применить принцип полной математической индукции.

4. СВЯЗАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКТОРОВ

Будем говорить, что система ковариантных функторов $T = \{T^n\}$ (индекс n пробегает все целые числа) является *связанной последовательностью ковариантных функторов*, если для каждой точной последовательности модулей $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ определены связывающие гомоморфизмы $T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(c.1) *композиция любых двух последовательных гомоморфизмов последовательности*

$$\ldots \longrightarrow T^{n-1}(A'') \longrightarrow T^n(A') \longrightarrow T^n(A) \longrightarrow T^n(A'') \longrightarrow T^{n+1}(A') \longrightarrow \ldots$$

равна нулю;

(c.2) *для любой коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками и любого n имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \longrightarrow & T^{n+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(B'') & \longrightarrow & T^{n+1}(B') \end{array}$$

Связанная последовательность контравариантных функторов определяется аналогично; в этом случае связывающие гомоморфизмы имеют вид $T^n(A') \to T^{n+1}(A'')$, в связи с чем в последовательности, указанной в условии (c.1), необходимо переставить модули A' и A''[1].

Сателлиты S^nT произвольного (аддитивного, ковариантного или контравариантного) функтора T вместе со связывающими гомоморфизмами, определенными в § 2, образуют связанную последовательность функторов, которую мы будем обозначать через ST.

Пусть

$$(\mathrm{S}) \qquad 0 \longrightarrow A^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^p \longrightarrow 0$$

— произвольная точная последовательность модулей и Z^i — ядро гомоморфизма $A^i \to A^{i+1}$. Тогда имеют место точные последовательности

$$0 \longrightarrow Z^i \longrightarrow A^i \longrightarrow Z^{i+1} \longrightarrow 0.$$

Следовательно, для любой связанной последовательности $T = \{T^n\}$ ковариантных функторов определены гомоморфизмы

$$T^{n-i-1}(Z^{i+1}) \longrightarrow T^{n-i}(Z^i), \qquad 0 < i < p.$$

Так как $Z^1 \approx A^0$ и $Z^p = A^p$, то композиция этих гомоморфизмов является некоторым гомоморфизмом

$$T^{n-p}(A^p) \longrightarrow T^{n-1}(A^0),$$

который мы будем называть *итерированным связывающим гомоморфизмом*. Итерированные связывающие гомоморфизмы перестановочны, очевидно, с гомоморфизмами, индуцированными произвольным отображением точной последовательности (S) в другую точную последовательность такого же вида. Для контравариантных функторов $T = \{T^n\}$ итерированные связывающие гомоморфизмы имеют вид $T^{n-p}(A^0) \to T^{n-1}(A^p)$.

---

[1] Кроме того, во второй диаграмме условия (c. 2) необходимо переставить модули A'', A' и B', B'' соответственно. — *Прим. перев.*

Итерированные связывающие гомоморфизмы удовлетворяют интересному соотношению антикоммутативности, имеющему место для произвольной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

с точными строками и столбцами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любой связанной последовательности ковариантных функторов $T = \{T^n\}$ и любого n имеет место антикоммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C'') & \longrightarrow & T^n(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(A'') & \longrightarrow & T^{n+1}(A') \end{array}$$

т. е. сквозные отображения

$$T^{n-1}(C'') \to T^n(C') \to T^{n+1}(A') \quad \text{и} \quad T^{n-1}(C'') \to T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$$

отличаются лишь знаком. Для контравариантных функторов следует переставить модули A' и C''.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сквозные отображения

$$T^{n-1}(C'') \to T^n(C') \to T^{n+1}(A'),$$
$$T^{n-1}(C'') \to T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$$

мы обозначим соответственно через Φ и Ψ. Нетрудно убедиться, что эти гомоморфизмы являются итерированными связывающими гомоморфизмами, соответствующими точным последовательностям

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow B'' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0.$$

Исходя из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ B' & \xrightarrow[\delta]{} & B \end{array}$$

определим гомоморфизмы

$$A' \xrightarrow{\pi} A + B' \xrightarrow{\tau} B,$$

полагая

$$\pi(a') = (\alpha a', \beta a'), \quad \tau(a, b') = \gamma a - \delta b'.$$

Легко проверить, что получающаяся последовательность

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A + B' \longrightarrow B \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

точна. Рассмотрим, наконец, отображения $A + B' \to A$ и $A + B' \to B'$, определенные соответствиями $(a, b') \to a$, $(a, b') \to -b'$, и отображение $\varepsilon : A' \to A'$, определенное формулой $\varepsilon(a') = -a'$. Очевидно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[u, dash, dashed] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A + B' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда вытекает, что $T^{n+1}(\varepsilon)\Psi' = \Phi$. Так как функтор T^{n+1} аддитивен и $\varepsilon(a') = -a'$, то, следовательно, $-\Psi = \Phi$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Для любого аддитивного ковариантного функтора T и любого n имеет место антикоммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1}T(C'') \arrow[r] \arrow[d] & S^n T(C') \arrow[d] \\
S^n T(A'') \arrow[r] & S^{n+1} T(A')
\end{tikzcd}$$

Для контравариантного функтора следует переставить модули A' и C''.

5. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ САТЕЛЛИТОВ

В этом параграфе мы дадим аксиоматическое определение связанной последовательности ST сателлитов произвольного функтора T.

Пусть $T = \{T^n\}$, $U = \{U^n\}$ — две связанные последовательности ковариантных функторов. Отображением $\Phi : T \to U$ связанной последовательности T в связанную последовательность U мы будем называть последовательность естественных отображений $\varphi^n : T^n \to U^n$, перестановочных со связывающими гомоморфизмами, т. е. таких, что для любой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^n(A'') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^n"] & T^{n+1}(A') \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\
U^n(A'') \arrow[r] & U^{n+1}(A')
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Отображения связанных последовательностей контравариантных функторов определяются аналогично (с перестановкой модулей A' и A''). Если при любом n естественное отображение φ^n является эквивалентностью, то отображение Φ называется изоморфизмом. Заметим, что можно рассматривать отображения $\Phi : T \to U$, определенные только для $n \geq 0$ или только для $n \leq 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Связанная последовательность $T = \{T^n\}$ ковариантных функторов изоморфна связанной последовательности ST^0 сателлитов функтора T^0, если:*

(с.3) *для любой точной последовательности $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P и любого $n < 0$ имеет место точная последовательность $0 \to T^n(A) \to T^{n+1}(M) \to T^{n+1}(P)$;*

(с.4) *для любой точной последовательности $0 \to A \to Q \to N \to 0$ с инъективным модулем Q и любого $n > 0$ имеет место точная последовательность $T^{n-1}(Q) \to T^{n-1}(N) \to T^n(A) \to 0$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующего более общего предложения[1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть $T = \{T^n\}$, $U = \{U^n\}$ — две связанные последовательности ковариантных функторов, и пусть $\varphi^0 : T^0 \to U^0$ — произвольное естественное отображение. Тогда, если последовательность U удовлетворяет условию* (с.3), *то отображение φ^0 допускает единственное продолжение до некоторого отображения $\Phi : T \to U$, определенного для всех $n \leq 0$. Если же последовательность T удовлетворяет условию* (с.4), *то отображение φ^0 допускает единственное продолжение до некоторого отображения $\Phi : T \to U$, определенного для всех $n \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что связанная последовательность U удовлетворяет условию (с.3), и пусть для всех q, подчиненных неравенствам $n < q \leq 0$, уже определены естественные отображения $\varphi^q : T^q \to U^q$, перестановочные со связывающими гомоморфизмами. Выбрав для произвольного модуля A точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & T^n(A) \arrow[r, "\partial'"] & T^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(M)"] & T^{n+1}(P) \arrow[d, "\varphi^{n+1}(P)"] \\
0 \arrow[r] & U^n(A) \arrow[r, "\partial"] & U^{n+1}(M) \arrow[r] & U^{n+1}(P)
\end{tikzcd}$$

Так как, согласно условию (с.3) (для связанной последовательности U), нижняя строка этой диаграммы является точной последовательностью и, согласно условию (с.1) (для связанной последовательности T), композиция гомоморфизмов верхней строки диаграммы равна нулю, то существует единственный гомоморфизм $\varphi^n(A) : T^n(A) \to U^n(A)$, добавление которого оставляет диаграмму коммутативной.

[1] Речь идет о доказательстве достаточности; необходимость условий (с. 3) и (с. 4) следует из формул 1, (5'), (6'). — *Прим. ред.*

Рассмотрим теперь произвольный гомоморфизм $f: A_1 \to A$. Пусть гомоморфизм $\varphi^n(A_1)$ построен с помощью точной последовательности $0 \to M_1 \to P_1 \to A_1 \to 0$. Поскольку модуль P_1 проективен, существуют такие гомоморфизмы $g: P_1 \to P$ и $h: M_1 \to M$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Поэтому

$$\begin{aligned}
\partial U^n(f)\,\varphi^n(A_1) &= U^{n+1}(h)\,\partial_1\varphi^n(A_1) = U^{n+1}(h)\,\varphi^{n+1}(M_1)\,\partial_1' = \\
&= \varphi^{n+1}(M)\,T^{n+1}(h)\,\partial_1' = \varphi^{n+1}(M)\,\partial' T^n(f) = \\
&= \partial\varphi^n(A)\,T^n(f).
\end{aligned}$$

Следовательно, так как ядро гомоморфизма $\partial: U^n(A) \to U^{n+1}(M)$ равно нулю, то

$$U^n(f)\,\varphi^n(A_1) = \varphi^n(A)\,T^n(f).$$

Тем самым доказано, что φ^n является естественным отображением; попутно доказано, что гомоморфизм $\varphi^n(A)$ не зависит от выбора вспомогательной последовательности $0 \to M \to P \to A \to 0$.

Для доказательства перестановочности естественного отображения φ^n со связывающими гомоморфизмами рассмотрим произвольную точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Пусть $0 \to M'' \to P'' \to A'' \to 0$ — точная последовательность с проективным модулем P''. Тогда существуют такие гомоморфизмы $f: P'' \to A$ и $g: M'' \to A'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Следовательно, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^n(A'') \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(M'') \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(A') \arrow[d] \\
U^n(A'') \arrow[r] & U^{n+1}(M'') \arrow[r] & U^{n+1}(A')
\end{tikzcd}$$

также коммутативна. Требуемое соотношение коммутативности следует отсюда непосредственно. Тем самым первая часть предложения 5.2 доказана. Доказательство второй части двойственно доказательству первой части, и мы его опускаем.

Для контравариантных функторов условия (c.3) и (c.4) необходимо заменить следующими:

(c.3′) *для любой точной последовательности* $0 \to A \to Q \to N \to 0$ *с инъективным модулем* Q *и любого* $n < 0$ *имеет место точная последовательность* $0 \to T^n(A) \to T^{n+1}(N) \to T^{n+1}(Q)$;

(c.4′) *для любой точной последовательности* $0 \to M \to P \to A \to 0$ *с проективным модулем* P *и любого* $n > 0$ *имеет место точная последовательность* $T^{n-1}(P) \to T^{n-1}(M) \to T^n(A) \to 0$.

Во всех других отношениях теорема 5.1 и предложение 5.2 при переходе от ковариантных к контравариантным функторам не изменяются.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Любое естественное отображение функторов*

$$\varphi : T \longrightarrow U$$

однозначно продолжается до некоторого отображения $\Phi : ST \to SU$. *Соответствующие естественные отображения*

$$\varphi^n : S^nT \longrightarrow S^nU \qquad (-\infty < n < \infty)$$

перестановочны со связывающими гомоморфизмами.

Как правило, областью определения функтора от одного аргумента является категория $\mathscr{M}_\Lambda$ *всех* Λ-модулей. Тем не менее иногда в том или ином конкретном случае функторы целесообразнее рассматривать не на всей категории $\mathscr{M}_\Lambda$, а лишь на некоторой соответствующим образом подобранной подкатегории $\mathscr{M}$ категории $\mathscr{M}_\Lambda$. Например, пусть T — ковариантный полуточный функтор, и пусть $\mathscr{M}$ — подкатегория категории $\mathscr{M}_\Lambda$, состоящая из всех модулей A, для которых $S_nT(A) = 0$ при любом $n > 0$, и из всех гомоморфизмов таких модулей. Очевидно, что категории $\mathscr{M}$ принадлежат все проективные модули и что если в точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ модули A, A'' принадлежат категории $\mathscr{M}$, то и модуль A' принадлежит $\mathscr{M}$. На категории $\mathscr{M}$ функтор T точен слева. Легко видеть, что все, что выше было сказано о левых сателлитах ковариантных функторов и правых сателлитах контравариантных функторов, остается справедливым и для функторов, рассматриваемых лишь на категории $\mathscr{M}$.

6. СЛОЖНЫЕ ФУНКТОРЫ

Пусть функтор $V = TU$ представляет собой результат композиции двух функторов T и U, каждый из которых является функтором одного аргумента. Рассмотрим последовательность TSU, состоящую из функторов $(TSU)^n = TS^{\varepsilon n}U$, где ε равно $+1$ или -1, в зависимости от того, ковариантен или контравариантен функтор T. Легко видеть, что TSU является связанной последовательностью функторов, причем $(TSU)^0 = V$. Следовательно, согласно предложению 5.2, существуют отображения

$$\lambda : TSU \to SV, \text{ определенное для } n \leq 0,$$
$$\varrho : SV \to TSU, \text{ определенное для } n \geq 0,$$

т. е. естественные отображения

$\lambda_n : T(S_nU) \to S_nV$, $\varrho^n : S^nV \to T(S^nU)$ (функтор T ковариантен),

$\lambda_n : T(S^nU) \to S_nV$, $\varrho^n : S^nV \to T(S_nU)$ (функтор T контравариантен), определенные для любого $n \geq 0$, перестановочные со связывающими гомоморфизмами и для $n = 0$ являющиеся тождественными отображениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если функтор T точен слева, то естественные отображения λ_n являются изоморфизмами. Если функтор T точен справа, то естественные отображения ϱ^n являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функтор T ковариантен и точен слева[1]. Пусть $0 \to M \to P \to A \to 0$ — произвольная точная последовательность с проективным модулем P. Тогда для любого $n > 0$ последовательность $0 \to S_nU(A) \to S_{n-1}U(M) \to \to S_{n-1}U(P)$, а следовательно, ввиду точности слева функтора T, и последовательность

$$0 \longrightarrow TS_nU(A) \longrightarrow TS_{n-1}U(M) \longrightarrow TS_{n-1}U(P)$$

будут точными последовательностями. Таким образом, связанная последовательность TSU удовлетворяет условию (с.3). Для окончания доказательства остается воспользоваться предложением 5.2. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Если функтор U точен, то последовательность функторов TSU сводится к одному члену $TU = V$, а естественные отображения λ_n и ϱ^n для любого $n \neq 0$ равны нулю. В этом случае мы можем рассмотреть связанную последовательность $(ST)\,U$, состоящую из функторов $(S^nT)\,U$. Из тех же соображений, что и выше, следует существование естественных отображений

$$\sigma_n : (S_nT)\,U \to S_nV, \quad \tau^n : S^nV \longrightarrow (S^nT)\,U,$$

определенных для любого $n \geq 0$. Если связанная последовательность $(ST)\,U$ удовлетворяет условию (с.3) [соответственно условию (с.4)], то естественные отображения σ_n (соответственно τ^n) будут изоморфизмами[2].

В качестве приложения этих результатов рассмотрим вопрос о замене основного кольца с помощью некоторого гомоморфизма колец $\varphi : \Lambda \to \Gamma$. Полагая $\lambda a = \varphi(\lambda)a$, мы можем любой Γ-модуль A рассматривать как некоторый Λ-модуль. Тем самым мы получаем ковариантный точный функтор U, определенный на категории Γ-модулей, значения которого принадлежат категории Λ-модулей. Если теперь T — произвольный аддитивный функтор, определенный на категории Λ-модулей, то $T' = TU$ будет функтором, определенным на категории Γ-модулей, причем, согласно сказанному выше, для любого $n \geq 0$ будут определены естественные отображения

$$\sigma_n : (S_nT)' \to S_n(T'), \qquad \tau^n : S^n(T') \to (S^nT)'.$$

[1] Предполагается также, что функтор U ковариантен. — *Прим. перев.*

[2] Это верно лишь в предположении, что оба функтора T и U одновременно либо ковариантны, либо контравариантны. Если же один из них ковариантен, а другой контравариантен, то связанная последовательность $(ST)U$ должна удовлетворять условию (с. 3') [соответственно условию (с. 4')]. — *Прим. перев.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если кольцо Γ, рассматриваемое как Λ-модуль, Λ-проективно, то естественные отображения σ_n (для ковариантного функтора T) и естественные отображения τ^n (для контравариантного функтора T) являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функтор T ковариантен (соответственно контравариантен). Достаточно показать, что связанная последовательность функторов $(S_nT)'$ удовлетворяет условию (c.3) [соответственно условию (c.4')]. Но это непосредственно следует из предложения II, 6.2.

7. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

До сих пор мы рассматривали сателлиты функторов одного аргумента. Пусть теперь $T(A, C)$ — произвольный функтор двух аргументов. Тогда, фиксируя значение аргумента C, мы получим функтор $T_C(A) = T(A, C)$ одного аргумента A. Сателлиты $S^nT_C(A)$ функтора $T_C(A)$ мы обозначим через

$$S^n_{(1)}T(A, C)\,; \tag{1}$$

индекс (1) означает, что сателлиты функтора $T(A, C)$ рассматриваются относительно первого аргумента. Произвольный гомоморфизм $\varphi: C \to C'$ (или $C' \to C$, если функтор T контравариантен по аргументу C) индуцирует естественное отображение $T_C(A) \to T_{C'}(A)$, которое в свою очередь индуцирует естественные отображения сателлитов этих функторов. Таким образом, сателлиты (1) можно рассматривать как функторы двух аргументов A и C. Аналогично определяются сателлиты $S^n_{(2)}T(A, C)$ функтора $T(A, C)$ относительно второго аргумента C.

Рассмотрим теперь произвольные точные последовательности

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0, \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow 0, \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P' \longrightarrow C \longrightarrow 0, \tag{4}$$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q' \longrightarrow N' \longrightarrow 0, \tag{5}$$

в которых модули P и P' проективны, а модули Q и Q' инъективны.

Предполагая, что функтор T ковариантен по обоим аргументам A и C, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
 & S^{-1}_{(2)}S^{-1}_{(1)}T(A, C) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & S^{-1}_{(1)}T(A, M') \arrow[r] \arrow[d] & T(M, M') \arrow[r] \arrow[d] & T(P, M') \\
0 \arrow[r] & S^{-1}_{(1)}T(A, P') \arrow[r] & T(M, P') &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и точным левым столбцом; из этой диаграммы вытекает, что имеет место следующая точная последовательность:

(6) $\quad 0 \longrightarrow S^{-1}_{(2)}S^{-1}_{(1)}T(A, C) \longrightarrow T(M, M') \longrightarrow T(P, M') + T(M, P').$

Подобным же образом, переменив роли переменных, мы получим точную последовательность

(7) $\quad 0 \to S^{-1}_{(1)}S^{-1}_{(2)}T(A, C) \to T(M, M') \to T(P, M') + T(M, P').$

Отсюда непосредственно следует естественная эквивалентность

(8) $$S^{-1}_{(2)}S^{-1}_{(1)} \approx S^{-1}_{(1)}S^{-1}_{(2)}.$$

Для правых сателлитов аналогично строятся точные последовательности

(6a) $\quad T(Q, N') + T(N, Q') \to T(N, N') \to S^{1}_{(2)}S^{1}_{(1)}T(A, C) \to 0,$

(7a) $\quad T(Q, N') + T(N, Q') \to T(N, N') \to S^{1}_{(1)}S^{1}_{(2)}T(A, C) \to 0,$

из которых вытекает естественная эквивалентность

(8a) $$S^{1}_{(2)}S^{1}_{(1)} \approx S^{1}_{(1)}S^{1}_{(2)}.$$

Мы рассматривали случай, когда функтор T ковариантен по обоим аргументам A и C. Если же функтор T контравариантен, например, по аргументу C, то в последовательностях (6), (7), (6a) и (7a) следует модули P' и M' переставить соответственно с модулями Q' и N'. Во всех же других отношениях доказательство изоморфизмов (8) и (8a) остается неизменным.

Итерация соотношений (8) и (8a) приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для произвольного (аддитивного) функтора T двух аргументов имеет место естественная эквивалентность*

(9) $$S^{m}_{(2)}S^{n}_{(1)} \approx S^{n}_{(1)}S^{m}_{(2)},$$

где m и n — произвольные целые числа одного и того же знака.

Теорема перестает быть верной, если знаки чисел m и n различны.

Мы предлагаем читателю самостоятельно исследовать вопрос о поведении естественных изоморфизмов (9) по отношению к связывающим гомоморфизмам (определенных относительно одного из двух аргументов).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что связанная последовательность ST сателлитов произвольного функтора T одного аргумента однозначно, с точностью до естественного изоморфизма, определяется следующими свойствами:

(i) $$S^0T = T.$$

(ii) Произвольное естественное отображение $\varphi^0 : U^0 \to T$, где U — некоторая связанная последовательность функторов, допускает единственное продолжение до отображения $\varphi : U \to ST$, определенного для всех $n \leq 0$.

(iii) Произвольное естественное отображение $\psi^0 : T \to U^0$, где U — некоторая связанная последовательность функторов, допускает единственное продолжение до некоторого отображения $\psi : ST \to U$, определенного для всех $n \geq 0$.

2. Пусть

$$g : T \to U$$

— естественное отображение точного справа ковариантного функтора T в точный слева ковариантный функтор U. Рассмотреть функторы

$$\widetilde{T} = \operatorname{Ker}(g), \qquad \widetilde{U} = \operatorname{Coker}(g).$$

Для произвольной точной последовательности модулей

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

рассмотреть коммутативную (см. следствие 5.3) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & S_1T(A') \arrow[r] \arrow[d] & S_1T(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_1T(A'') \arrow[r] \arrow[d] & T(A') \arrow[r] \arrow[d] & T(A) \arrow[r] \arrow[d] & T(A'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & U(A') \arrow[r] & U(A) \arrow[r] & U(A'') \arrow[r] & S^1U(A') \arrow[r] & S^1U(A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Применяя леммы 3.2 и 3.3 к соответствующим частям этой диаграммы, построить последовательность

$$\ldots \to S_1T(A') \to S_1T(A) \to S_1T(A'') \to \widetilde{T}(A') \to \widetilde{T}(A) \to \widetilde{T}(A'') \to$$
$$\to \widetilde{U}(A') \to \widetilde{U}(A) \to \widetilde{U}(A'') \to S^1U(A') \to S^1U(A) \to S^1U(A'') \to \ldots$$

и доказать ее точность.

Рассмотреть случай контравариантных функторов T и U.

3. Пусть

$$T \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

— точная последовательность ковариантных (соответственно контравариантных) функторов и их естественных отображений (точность означает, что для каждого модуля A имеет место точная последовательность

$$T(A) \longrightarrow U(A) \longrightarrow V(A) \longrightarrow 0).$$

Предположим, что всякий раз, когда модуль A проективен (соответственно инъективен), отображение $T(A) \to U(A)$ является мономорфизмом. Определим естественное отображение $\varphi : S_1V \to T$ следующим образом: предполагая, например, что все рассматриваемые функторы ковариантны, возьмем произвольную точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P. Затем по коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(M) & \longrightarrow & U(M) & \longrightarrow & V(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & T(P) & \longrightarrow & U(P) & \longrightarrow & V(P) & & \end{array}$$

построим точную последовательность

(1) $S_1T(A) \to S_1U(A) \to S_1V(A) \to \mathrm{Coker}\,(f') \to \mathrm{Coker}\,(f) \to \mathrm{Coker}\,(f'')$.

Наконец, используя естественный гомоморфизм $\mathrm{Coker}\,(f') \to T(A)$, определим гомоморфизм $S_1V(A) \to T(A)$; системой так построенных гомоморфизмов и определяется естественное отображение φ.

Определить для всех $n \geq 0$ аналогичные естественные отображения $\varphi_n : S_{n+1}V \to S_nT$ и показать, что композиция любых двух последовательных гомоморфизмов последовательности

(Σ) $\ldots \to S_{n+1}T \to S_{n+1}U \to S_{n+1}V \to S_nT \to \ldots \to S_1V \to T \to U \to V \to 0$

равна нулю.

4. Доказать точность последовательности (Σ) (см. упражнение 3), предполагая, что функтор T точен справа, а функтор U полуточен.

(Указание: сначала, используя последовательность (1) из упражнения 3, показать, что имеет место точная последовательность

$$S_1T \longrightarrow S_1U \longrightarrow S_1V \longrightarrow T \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Затем, по индукции, для любого $n \geq 0$ доказать, что имеет место точная последовательность

$$S_nT \longrightarrow S_nU \longrightarrow S_nV \longrightarrow S_{n-1}T \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_1V \longrightarrow T \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

5. Перенести упражнения 3 и 4 на двойственный случай точной последовательности функторов

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow U \longrightarrow V,$$

для которой отображение $U(A) \to V(A)$ является эпиморфизмом всякий раз, когда модуль A инъективен (если все рассматриваемые функторы ковариантны) или проективен (если все рассматриваемые функторы контравариантны). В этом случае последовательность (Σ'), двойственная последовательности (Σ), точна, если функтор V точен слева, а функтор U полуточен.

ГЛАВА IV

ГОМОЛОГИИ

Введение. В этой главе строится весь необходимый для дальнейшего алгебраический аппарат теории гомологий, за исключением спектральных последовательностей, которые будут рассмотрены в гл. XV. Наше построение отличается от обычного тем, что большое внимание уделяется сохранению всех симметрий, в связи с чем мы все время придерживаемся двойственной себе системы изложения. Например, модуль гомологий $H(A)$ обычно определяется как некоторый фактормодуль модуля «циклов» $Z(A)$, т. е. ядра дифференциального оператора $d: A \to A$. Мы же, наряду с модулем $Z(A)$ вводим «двойственный» модуль $Z'(A)$, представляющий собой коядро дифференциального оператора d, и показываем, что модуль гомологий $H(A)$ с тем же правом можно определить как некоторый подмодуль модуля $Z'(A)$. Читатель будет иметь достаточно много возможностей, чтобы убедиться в целесообразности сохранения такого рода двойственности.

В § 3 рассматриваются градуированные и дважды градуированные модули и комплексы. В § 5 вводится некоторое соглашение о знаках, благодаря которому вычисления освобождаются от большого числа знаков, обычно появляющихся в формулах алгебраической топологии.

В § 6 и 7 изучаются обобщения известных гомоморфизмов

$$\alpha: H(A) \otimes H(C) \longrightarrow H(A \otimes C)$$

и

$$\alpha': H(\mathrm{Hom}(A, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H(A), H(C))$$

на любые функторы. В качестве приложения получаемых при этом результатов в § 8 доказывается элементарный вариант (не использующий спектральные последовательности) точной последовательности Кюннета. Для функторов $\otimes$ и Hom эти результаты уточняются в § VI, 3. Изложение этого вопроса на более высоком уровне мы должны отложить до гл. XVII.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДУЛИ

Λ-модуль A, в котором выделен такой Λ-эндоморфизм $d: A \to A$, что $dd = 0$, называется *дифференциальным модулем*, или *модулем с дифференциалом*[1]. Для дифференциальных модулей мы будем

[1] Эндоморфизм d называется *дифференциальным оператором* или *дифференциалом*. — *Прим. перев.*

пользоваться следующими обозначениями:

$$Z(A) = \operatorname{Ker}(d), \quad Z'(A) = \operatorname{Coker}(d),$$
$$B(A) = \operatorname{Im}(d), \quad B'(A) = \operatorname{Coim}(d).$$

Заметим, что хотя дифференциальный оператор d и индуцирует изоморфизм $\delta : B'(A) \approx B(A)$, но тем не менее отождествлять модуль $B'(A)$ с модулем $B(A)$ не всегда удобно. Оператор d допускает представление в виде сквозного отображения

$$A \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A) \xrightarrow{\delta} B(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow A,$$

где $B(A) \to Z(A)$ — мономорфизм, имеющий место в силу соотношения $dd = 0$, а $Z'(A) \to B'(A)$ — эпиморфизм, индуцированный отображением $A \to B'(A)$.

Это разложение позволяет построить гомоморфизм

$$\tilde{d} : Z'(A) \longrightarrow Z(A)$$

и точную последовательность

$$0 \longrightarrow B(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A) \longrightarrow 0.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Coker}(\tilde{d}) = Z(A)/B(A) = \operatorname{Ker}(Z'(A) \longrightarrow B'(A)) = \operatorname{Ker}(\tilde{d}).$$

Модуль $\operatorname{Coker}(\tilde{d}) = \operatorname{Ker}(\tilde{d})$ обозначается через $H(A)$ и называется *модулем гомологий* модуля A. Он входит в точную последовательность

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow H(A) \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0$$

и в коммутативную диаграмму

$$(2) \qquad \begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & Z \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & B' \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & B' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами.

Отображением $f : A \to A'$ дифференциального модуля A в дифференциальный модуль A' называется такой Λ-гомоморфизм $f : A \to A'$, что $df = fd$, где одним и тем же символом d обозначены дифференциальные операторы в обоих модулях A и A'. Такое отображение индуцирует, очевидно, гомоморфизмы $f : Z(A) \to Z(A')$, ...

$\ldots, f: H(A) \to H(A')$. *Гомотопией* $s: f \simeq g$, связывающей два отображения $f, g: A \to A'$, называется такой Λ-гомоморфизм $s: A \to A'$, что $ds + sd = g - f$. Легко видеть, что гомотопные отображения[1] f и g индуцируют один и тот же гомоморфизм $H(A) \to H(A')$.

Для любой точной последовательности дифференциальных модулей

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{tikzcd} & Z'(A') \arrow[r] \arrow[d] & Z'(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z'(A'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z(A') \arrow[r] & Z(A) \arrow[r] & Z(A'') & \end{tikzcd}$$

вертикальными отображениями которой являются гомоморфизмы $\tilde{d}$. Применяя к этой диаграмме лемму III, 3.3, мы получим точную последовательность

$$(4) \quad H(A') \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A'') \xrightarrow{\Delta} H(A') \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A'').$$

Входящий в эту последовательность связывающий гомоморфизм Δ определяется согласно § III,3. В нашем случае этот гомоморфизм строится следующим образом: для произвольного элемента $h \in H(A'')$ выбирается его прообраз $x \in Z'(A)$; ясно, что элемент $\tilde{d}(x) \in Z(A)$ является образом некоторого элемента $z \in Z(A')$; соответствующий элементу z элемент модуля $H(A')$ и есть $\Delta(h)$.

Рассмотрим теперь гомоморфизмы

$$H(A'') \longrightarrow Z'(A'), \qquad Z(A'') \longrightarrow H(A'),$$

являющиеся композициями гомоморфизма Δ с гомоморфизмами $H(A') \to Z'(A')$ и $Z(A'') \to H(A'')$ соответственно. Тогда, как легко видеть, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любой точной последовательности* (3) *имеют место точные последовательности*

$$\ldots \to H(A'') \to H(A') \to H(A) \to H(A'') \to Z'(A') \to Z'(A) \to Z'(A'') \to 0,$$
$$0 \to Z(A') \to Z(A) \to Z(A'') \to H(A') \to H(A) \to H(A'') \to H(A') \to \ldots.$$

Вертикальные отображения любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

[1] То есть связанные некоторой гомотопией. — *Прим. ред.*

строками которой являются точные последовательности (дифференциальных модулей), индуцируют, очевидно, гомоморфные отображения точных последовательностей, отвечающих верхней строке, в соответствующие точные последовательности, отвечающие нижней строке.

ЗАМЕЧАНИЕ. Указанные в теореме точные последовательности имеют одну и ту же главную часть (4). Эту часть часто изображают в виде «точного» треугольника

$$\begin{tikzcd} H(A') \arrow[rr] & & H(A) \arrow[dl] \\ & H(A'') \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Отметим, что любой Λ-модуль A можно рассматривать как модуль с дифференциалом $d = 0$. В этом случае $Z(A) = Z'(A) = H(A) = A$, $B'(A) = B(A) = 0$. Для любого дифференциального модуля A мы будем модули $Z(A)$, $Z'(A)$, $H(A)$, $B'(A)$, $B(A)$ рассматривать как модули с таким нулевым дифференциалом.

2. КОЛЬЦА ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Кольцо двойных чисел $\Gamma = (\Lambda, d)$ над кольцом Λ определяется как свободный модуль с образующими 1 и d (где 1 — единица кольца Λ), в котором умножение определено согласно следующей формуле:

$$(\lambda + \lambda' d)(\mu + \mu' d) = \lambda\mu + (\lambda\mu' + \lambda'\mu).d, \qquad \lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \Lambda.$$

В частности, $dd = 0$ и $\lambda d = d\lambda$.

Легко видеть, что любой дифференциальный (в смысле предыдущего параграфа) Λ-модуль A можно рассматривать как Γ-модуль. Отображения дифференциальных Λ-модулей являются тогда не чем иным, как Γ-гомоморфизмами. Отсюда следует, что $Z(A)$, $Z'(A)$, $B(A)$, $B'(A)$ и $H(A)$ можно рассматривать как ковариантные функторы, определенные на категории левых Γ-модулей и принимающие значения в категории левых Λ-модулей. Каждый Λ-модуль A можно рассматривать как Γ-модуль (полагая $da = 0$ для любого $a \in A$). В частности, само кольцо Λ можно рассматривать как левый (или правый) Γ-модуль. Тогда из естественных отождествлений $A = \Lambda \otimes_\Lambda A$ и $A = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)$ легко следует, что

$$Z'(A) = \Lambda \otimes_\Gamma A, \qquad Z(A) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\Lambda, A).$$

Отсюда, в частности, вытекает (этот факт содержится уже в теореме 1.1), что функтор Z' точен справа, а функтор Z точен слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для любой коммутативной диаграммы вида*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

строками и столбцами которой являются точные последовательности дифференциальных модулей, имеет место антикоммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H(C'') \arrow[r] \arrow[d] & H(C') \arrow[d] \\ H(A'') \arrow[r] & H(A') \end{tikzcd}$$

Аналогичное утверждение имеет место при замене модуля $H(C'')$ модулем $Z(C'')$, или модуля $H(A')$ модулем $Z'(A')$, или при одновременной замене этих модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $T^n = H$, мы получим связанную последовательность функторов, определенных в категории Γ-модулей. Поэтому предложение 2.1 непосредственно следует из общего предложения III, 4.1. Доказательство в остальных случаях проводится аналогично с помощью других связанных последовательностей функторов, построенных в предыдущем параграфе.

ТЕОРЕМА 2.2. *Сателлиты функторов Z', Z и H определяются следующими формулами:*

$$S^n Z' = H, \text{ если } n < 0; \quad S^n Z' = 0, \text{ если } n > 0;$$

$$S^n Z = 0, \text{ если } n < 0; \quad S^n Z = H, \text{ если } n > 0;$$

$$S^n H = H \text{ для всех } n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся аксиоматическим определением сателлитов. В силу теоремы 1.1 и соображений, приведенных непосредственно после формулировки этой теоремы, нам достаточно показать, что $H(A) = 0$ для каждого Γ-проективного или Γ-инъективного модуля A. Но это утверждение непосредственно вытекает из формулируемого ниже следствия 2.4.

Пусть $\eta: \Lambda \to \Gamma$ — естественное отображение вложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *Γ-модуль A η-проективен;*

(a′) *Γ-модуль A η-инъективен;*

(b) *существует такой Λ-эндоморфизм $s: A \to A$, что $ds + sd$ является тождественным отображением;*

(c) *существует такой Λ-модуль B, что $A \approx_{(\eta)} B$;*
(c′) *существует такой Λ-модуль B, что $A \approx^{(\eta)} B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольному Λ-модулю B сопоставим Γ-модуль $B^{x} = B + B$, в котором оператор d действует по формуле $d(b_1, b_2) = (0, b_1)$. Легко видеть, что

$$_{(\eta)}B = \Gamma \otimes_{\Lambda} B \approx B^{x} \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Gamma, B) = {}^{(\eta)}B.$$

Предположим теперь, что Γ-модуль A допускает эндоморфизм s, обладающий свойством (b), и определим Λ-гомоморфизм $\varphi : A \to B^{x}$, где $B = B(A)$, полагая $\varphi(a) = (da, dsa)$. Тогда $\varphi(da) = (dda, dsda) = (0, da) = d\varphi(a)$. Если $\varphi(a) = 0$, то $a = dsa + sda = 0$. Так как $dsb = b$ и $dssb = 0$ для любого элемента $b \in B$, то $\varphi(b) = (0, b)$ и $\varphi(sb) = (b, 0)$. Таким образом, φ является Γ-изоморфизмом. Тем самым импликации (b) $\Rightarrow$ (c) и (b) $\Rightarrow$ (c′) доказаны. Импликации (c) $\Rightarrow$ (a) и (c′) $\Rightarrow$ (a′) непосредственно вытекают из предложения II, 6.3. Следовательно, остается лишь показать, что (a) $\Rightarrow$ (b) и (a′) $\Rightarrow$ (b).

При отождествлении модуля $_{(\eta)}A$ с модулем A^{x} естественное отображение $_{(\eta)}A \to A$ переходит в отображение $f : A^{x} \to A$, определенное формулой $f(a_1, a_2) = a_1 + da_2$. Если модуль A η-проективен, то существует такое Γ-отображение $g : A \to A^{x}$, что композиция fg является тождественным отображением. Пусть $g(a) = (ta, sa)$. Тогда $ta = sda$, поскольку $dg = gd$; в то же время $ta + dsa = a$, так как $fg(a) = a$. Следовательно, $dsa + sda = a$. Тем самым импликация (a) $\Rightarrow$ (b) доказана. Импликация (a′) $\Rightarrow$ (b) доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Для любого η-проективного или η-инъективного Γ-модуля A модуль гомологий $H(A)$ равен нулю.*

Действительно, согласно свойству (b) из равенства $da = 0$ следует, что $a = dsa$.

Читателю предлагается доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Γ-модуль A тогда и только тогда Γ-проективен, когда $A \approx {}_{(\eta)}B$, где B — некоторый проективный Λ-модуль. Аналогично Γ-модуль A тогда и только тогда Γ-инъективен, когда $A \approx {}^{(\eta)}B$, где B — некоторый инъективный Λ-модуль.*

3. ГРАДУИРОВАННЫЕ МОДУЛИ. КОМПЛЕКСЫ

Модуль A называется *градуированным*, если в нем выделена такая система подмодулей A^n (индекс n пробегает все целые числа), что модуль A является прямой суммой $\sum_n A^n$ подмодулей A^n. В градуированном модуле каждый элемент $a \in A$ однозначно представляется в виде суммы $a = \sum_n a^n$, $a^n \in A^n$, в которой лишь конечное число слагаемых a^n отлично от нуля; слагаемое a^n называется *однородной компонентой степени n* элемента a. Элементы подмодуля

A^n называются *однородными элементами степени* n[1]. Элемент 0 является однородным элементом степени n для любого n.

Модуль A называется *положительно градуированным*, если $A^n = 0$ для всех $n < 0$, и *отрицательно градуированным*, если $A^n = 0$ для всех $n > 0$. Подмодуль A^{-n} мы систематически будем обозначать через A_n; это обозначение особенно удобно при рассмотрении отрицательно градуированных модулей.

Подмодуль B градуированного модуля A называется однородным, если $B = \sum_n B^n$, где $B^n = B \cap A^n$. Фактормодуль A/B градуированного модуля A по однородному подмодулю B можно рассматривать как градуированный модуль, полагая

$$(A/B)^n = (A^n + B)/B \approx A^n/B^n.$$

Модули A/B и $\sum_n A^n/B^n$ удобно отождествлять.

Пусть A и C — градуированные Λ-модули. Мы будем говорить, что Λ-гомоморфизм $f: A \to C$ имеет степень p, если $f(A^n) \subset C^{n+p}$ для всех n. Гомоморфизм $f^n: A^n \to C^{n+p}$, индуцированный гомоморфизмом f, называется *n-й компонентой* гомоморфизма f. Модули $\operatorname{Ker}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ являются однородными подмодулями соответственно модулей A и C; модули $\operatorname{Coim}(f)$ и $\operatorname{Coker}(f)$ градуируются согласно указанному выше соглашению о градуировках фактормодулей. Степень изоморфного отображения $\operatorname{Coim}(f) \to \operatorname{Im}(f)$, индуцированного гомоморфизмом f, равна p; это показывает, что отождествлять градуированные модули $\operatorname{Coim}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ нельзя, хотя они и Λ-изоморфны.

Градуированный Λ-модуль A, рассматриваемый вместе с некоторым эндоморфизмом $d: A \to A$ степени 1, для которого $dd = 0$, называется *Λ-комплексом*. Таким образом, комплекс полностью определяется последовательностью

$$\ldots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

в которой для любого n выполняется равенство $d^n d^{n-1} = 0$. Заметим, что мы называем «комплексом» то, что обычно принято называть «коцепным комплексом». Опуская вниз индексы в последовательности, определяющей наш комплекс, мы получим «цепной комплекс». Поскольку комплексы являются частным случаем дифференциальных модулей, на них распространяются все введенные в § 1 понятия. В частности, для любого комплекса A определены модули $Z(A), \ldots, H(A)$, являющиеся в этом случае градуированными модулями. Основные диаграммы (1) и (2) из § 1 для комплексов принимают следующий вид:

$$(1') \qquad 0 \longrightarrow H^n \longrightarrow Z'^n \longrightarrow Z^{n+1} \longrightarrow H^{n+1} \longrightarrow 0,$$

---

[1] Подмодули A^n называются *однородными составляющими* или *однородными компонентами* градуированного модуля A. — *Прим. перев.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B^n \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & Z^n \arrow[r] \arrow[d] & H^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^n \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[d] & Z'^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & B'^n \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & B'^n \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2'}
$$

Пусть A и C — произвольные комплексы. *Отображением* $f: A \to C$ комплекса A в комплекс C называется такой гомоморфизм f градуированных модулей степени 0, что $fd = df$, т. е. $f^{n+1}d^n = d^n f^n$, где одним и тем же символом d обозначены дифференциальные операторы в обоих комплексах A и C. Любое такое отображение f индуцирует, очевидно, гомоморфные отображения диаграмм (1′) и (2′), построенных для комплекса A, в соответствующие диаграммы, построенные для комплекса C.

Пусть $f, g: A \to C$ — произвольные отображения комплексов. *Гомотопией* $s: f \simeq g$, связывающей эти отображения, называется такой гомоморфизм $s: A \to C$ степени -1, что $ds + sd = g - f$, т. е. $d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n = g^n - f^n$. Гомотопные отображения f и g индуцируют, очевидно, одни и те же гомоморфизмы $H^n(A) \to H^n(C)$.

Любая точная последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ комплексов и их отображений определяет (см. в § 1 соответствующее построение для дифференциальных модулей) некоторые гомоморфизмы

$$H^n(A'') \longrightarrow H^{n+1}(A'),$$

а также соответствующие связывающие гомоморфизмы

$$H^n(A'') \longrightarrow Z'^{n+1}(A'),$$
$$Z^n(A'') \longrightarrow H^{n+1}(A').$$

Получающиеся последовательности

$$\ldots \to H^{n-2}(A'') \to H^{n-1}(A') \to H^{n-1}(A) \to H^{n-1}(A'') \to$$
$$\to Z'^n(A') \to Z'^n(A) \to Z'^n(A'') \to 0,$$

$$0 \to Z^n(A') \to Z^n(A) \to Z^n(A'') \to$$
$$\to H^{n+1}(A') \to H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(A'') \to H^{n+2}(A') \to \ldots,$$

а также бесконечная в обе стороны последовательность

$$\ldots \to H^{n-1}(A'') \to H^n(A') \to H^n(A) \to H^n(A'') \to H^{n+1}(A') \to \ldots,$$

которую обычно называют гомологической (или, точнее, когомологической) последовательностью, являются точными последовательностями.

4. ДВАЖДЫ ГРАДУИРОВАННЫЕ МОДУЛИ И ДВОЙНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Λ-модуль A называется *дважды градуированным* (или биградуированным), если в нем выделена такая система подмодулей $A^{n,m}$ (индексы n, m независимо друг от друга пробегают все множество целых чисел), что модуль A является прямой суммой $\sum\limits_{n,m} A^{n,m}$ подмодулей $A^{n,m}$. Элементы подмодуля $A^{n,m}$ называются *дважды однородными элементами двойной степени* (n, m). Любому дважды градуированному модулю A сопоставляется *ассоциированный градуированный модуль* (также обозначаемый через A), однородными составляющими которого являются прямые суммы

$$A^p = \sum_{n+m=p} A^{n,m}.$$

Дважды однородные элементы двойной степени (n, m) в ассоциированном градуированном модуле являются однородными элементами степени $n+m$.

Модуль A называется *положительно дважды градуированным*, если $A^{n,m}=0$, когда $n<0$ или $m<0$, и *отрицательно дважды градуированным*, если $A^{n,m}=0$, когда $n>0$ или $m>0$. Подмодуль $A^{-n,-m}$ мы будем часто обозначать через $A_{n,m}$; это обозначение особенно удобно при рассмотрении отрицательно дважды градуированных модулей.

Подмодуль B дважды градуированного модуля A называется дважды однородным, если $B=\sum B^{n,m}$, где $B^{n,m}=B\cap A^{n,m}$. Как и в предыдущем параграфе, фактормодуль A/B отождествляется в этом случае с прямой суммой $\sum A^{n,m}/B^{n,m}$.

Пусть A и C — произвольные дважды градуированные модули. Мы будем говорить, что гомоморфизм $f: A\to C$ имеет двойную степень (p, q), если для всех n, m

$$f(A^{n,m})\subset C^{n+p,m+q}.$$

Гомоморфизм $f^{n,m}: A^{n,m}\to C^{n+p,m+q}$, индуцированный гомоморфизмом f двойной степени (p, q), называется его (n, m)-й компонентой. Замечания, сделанные в § 3 по поводу модулей $\operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ и т. д., остаются справедливыми и в рассматриваемом случае. Заметим еще, что гомоморфизм $f: A\to C$ двойной степени (p, q) индуцирует гомоморфизм степени $p+q$ градуированного модуля, ассоциированного с дважды градуированным модулем A, в градуированный модуль, ассоциированный с дважды градуированным модулем C.

Двойным комплексом A называется дважды градуированный модуль, рассматриваемый вместе с парой антикоммутирующих между собой дифференциальных операторов d_1 и d_2 двойных степеней (1,0) и (0,1) соответственно. Таким образом,

$$\begin{gathered} d_1^{n,m}: A^{n,m}\longrightarrow A^{n+1,m}, \qquad d_2^{n,m}: A^{n,m}\longrightarrow A^{n,m+1}, \\ d_1^{n,m}\, d_1^{n-1,m}=0, \qquad d_2^{n,m}\, d_2^{n,m-1}=0, \\ d_2^{n+1,m}\, d_1^{n,m}+d_1^{n,m+1}\, d_2^{n,m}=0. \end{gathered} \tag{1}$$

Эти соотношения можно изобразить в виде антикоммутативной диаграммы

(2)
$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n+1,m} \arrow[u] \arrow[r, "d_2^{n+1,m}"] & A^{n+1,m+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n,m} \arrow[u, "d_1^{n,m}"] \arrow[r, "d_2^{n,m}"'] & A^{n,m+1} \arrow[u, "d_1^{n,m+1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Градуированный модуль, ассоциированный с дважды градуированным модулем двойного комплекса A, является (одинарным) комплексом[1] относительно *полного* дифференциального оператора d, p-я компонента которого $d^p : A^p \to A^{p+1}$ на подмодуле $A^{n,m}$ совпадает с оператором

(3)
$$d_1^{n,m} + d_2^{n,m}.$$

Таким образом,

(4)
$$d(A^{n,m}) \subset A^{n+1,m} + A^{n,m+1}.$$

Из соотношений (1) следует, что $dd = 0$. Обратно, любой дифференциальный оператор d ассоциированного градуированного модуля, удовлетворяющий соотношению (4), однозначно определяет два дифференциальных оператора d_1 и d_2, относительно которых дважды градуированный модуль A является двойным комплексом с полным дифференциалом d.

Под модулями $Z^n(A), \ldots, H^n(A)$, где A — произвольный двойной комплекс, всегда понимаются соответствующие модули, построенные для ассоциированного (одинарного) комплекса.

Отображением $f: A \to C$ двойного комплекса A в двойной комплекс C называется гомоморфизм f двойной степени (0, 0) дважды градуированного модуля A в дважды градуированный модуль C, перестановочный с дифференциальными операторами, определенными в двойных комплексах A и C. Очевидно, что такое отображение f индуцирует отображение ассоциированных (одинарных) комплексов.

Гомотопией $(s_1, s_2) : f \simeq g$, связывающей отображения $f, g : A \to C$ двойных комплексов, называется такая пара гомоморфизмов $s_1, s_2 : A \to C$ соответственно двойных степеней $(-1, 0)$ и $(0, -1)$, что

$$d_1 s_1 + s_1 d_1 + d_2 s_2 + s_2 d_2 = g - f,$$
$$s_1 d_2 + d_2 s_1 = 0, \qquad s_2 d_1 + d_1 s_2 = 0,$$

[1] Этот комплекс авторы далее называют *ассоциированным комплексом*. — *Прим. перев.*

где d_1 и d_2 — первый и второй дифференциальные операторы двойных комплексов A и C. Для одинарных комплексов, ассоциированных соответственно с двойными комплексами A и C, гомотопия (s_1, s_2) определяет гомоморфизм s, p-я компонента которого $s^p : A^p \to C^{p-1}$ на подмодуле $A^{n,m}$ совпадает с гомоморфизмом

$$s_1^{n,m} + s_2^{n,m}.$$

Гомоморфизм s является, очевидно, гомотопией, связывающей отображения f и g ассоциированных одинарных комплексов, и удовлетворяет условию

$$s(A^{n,m}) \subset C^{n-1,m} + C^{n,m-1}.$$

Обратно, каждая такая гомотопия определяет пару гомоморфизмов (s_1, s_2), являющуюся гомотопией, связывающей соответствующие отображения двойных комплексов.

Аналогично тому, как были введены понятия дважды градуированных модулей и двойных комплексов, можно ввести понятия n-градуированных модулей и n-кратных комплексов. Например, четырехкратный комплекс определяется как четырежды градуированный модуль $A = \sum A^{n,m,p,q}$, рассматриваемый вместе с четырьмя попарно антикоммутирующими дифференциальными операторами

$$\begin{aligned}
d_1^{n,m,p,q} &: A^{n,m,p,q} \longrightarrow A^{n+1,m,p,q},\\
d_2^{n,m,p,q} &: A^{n,m,p,q} \longrightarrow A^{n,m+1,p,q},\\
d_3^{n,m,p,q} &: A^{n,m,p,q} \longrightarrow A^{n,m,p+1,l},\\
d_4^{n,m,p,q} &: A^{n,m,p,q} \longrightarrow A^{n,m,p,q+1}.
\end{aligned}$$

Соответствующий полный дифференциальный оператор d ассоциированного (одинарного) комплекса определяется формулой $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$.

Вместо того чтобы по n-кратному комплексу непосредственно строить ассоциированный одинарный комплекс, можно, группируя сначала соответственным образом индексы, для любого $m < n$ построить m-кратный комплекс, а затем уже от него перейти к ассоциированному одинарному комплексу. Например, группируя в приведенном выше четырехкратном комплексе первый индекс с третьим, а второй с четвертым, мы получим двойной комплекс

$$A^{r,s} = \sum A^{n,m,p,q}, \qquad n + p = r,\ m + q = s,$$

$$\delta_1^{r,s} : A^{r,s} \longrightarrow A^{r+1,s}, \quad \delta_2^{r,s} : A^{r,s} \longrightarrow A^{r,s+1},$$

дифференциальными операторами δ_1 и δ_2 которого являются гомоморфизмы $d_1 + d_3$ и $d_2 + d_4$. При этом исходный четырехкратный комплекс и построенный по нему двойной комплекс имеют один и тот же ассоциированный одинарный комплекс.

5. ФУНКТОРЫ КОМПЛЕКСОВ

Пусть $T(A_1, \ldots, A_r)$ — функтор r аргументов, по одним из которых он ковариантен, а по другим — контравариантен; значениями аргумента A_i являются Λ_i-модули, а значениями функтора

T — Λ-модули. Предполагая, что каждый из аргументов A_i является градуированным Λ_i-модулем, рассмотрим r-градуированный Λ-модуль $T(A_1, \ldots, A_r)$, определив его r-однородные составляющие формулами

$$T^{n_1,\ldots,n_r}(A_1, \ldots, A_r) = T(A_1^{\varepsilon_1 n_1}, \ldots, A_r^{\varepsilon_r n_r}),$$

где ε_i равно $+1$ или -1 в зависимости от того, ковариантен или контравариантен аргумент A_i в функторе T. От r-градуированного модуля можно перейти к ассоциированному градуированному модулю, однородными составляющими которого служат модули $T^n(A_1, \ldots, A_r)$, являющиеся прямыми суммами модулей $T^{n_1,\ldots,n_r}(A_1, \ldots, A_r)$, где $n_1 + \ldots + n_r = n$.

Следует подчеркнуть, что r-градуированный модуль $T(A_1, \ldots, A_r)$ отличен от модуля $T(|A_1|, \ldots, |A_r|)$, где $|A_i|$ — неградуированный модуль с той же аддитивной группой, что и градуированный модуль A_i. Например, модули $\operatorname{Hom}(A, C)$ и $\operatorname{Hom}(|A|, |C|)$ отличаются не только тем, что первый из них дважды градуирован, — они по существу отличны друг от друга. Здесь мы находимся примерно в такой же ситуации, как и в случае топологических групп. Если A и C — топологические абелевы группы, а $|A|$ и $|C|$ — эти же группы, рассматриваемые без топологии, то группа $\operatorname{Hom}(A, C)$ всех непрерывных гомоморфизмов $A \to C$ отлична от группы $\operatorname{Hom}(|A|, |C|)$ произвольных гомоморфизмов $|A| \to |C|$.

Пусть теперь для каждого $i = 1, \ldots, r$ задано отображение $f_i : A_i \to A'_i$, если аргумент A_i в функторе T ковариантен, или отображение $f_i : A'_i \to A_i$, если аргумент A_i контравариантен. Определим отображение

$$T(f_1, \ldots, f_r) : T(A_1, \ldots, A_r) \longrightarrow T(A'_1, \ldots, A'_r)$$

r-степени $(p_1, \ldots, p_r)$, где p_i — степень отображения f_i, приняв за его $(n_1, \ldots, n_r)$-компоненту $T^{n_1,\ldots,n_r}(f_1, \ldots, f_r)$ гомоморфизм

$$(-1)^{\varepsilon} T(f_1^{l_1}, \ldots, f_r^{l_r}) : T(A_1^{\varepsilon_1 n_1}, \ldots, A_r^{\varepsilon_r n_r}) \longrightarrow T(A_1'^{\varepsilon_1(n_1+p_1)}, \ldots, A_r'^{\varepsilon_r(n_r+p_r)}),$$

где $\varepsilon = \sum n_i p_j$ (суммирование производится по всем i и j, удовлетворяющим неравенству $i < j$[1]), $l_i = n_i$, если функтор T ковариантен по аргументу A_i, и $l_i = -(n_i + p_i)$, если функтор T контравариантен по аргументу A_i.

Если $h_i = g_i f_i : A_i \to A''_i$ (соответственно $h_i = f_i g_i : A''_i \to A_i$), где $g_i : A'_i \to A''_i$ (соответственно $g_i : A''_i \to A'_i$) — некоторые отображения степени q_i, то, как нетрудно проверить,

$$T(h_1, \ldots, h_r) = (-1)^{\eta} T(g_1, \ldots, g_r) T(f_1, \ldots, f_r),$$

где $\eta = \sum p_i q_j$, $i < j$.

[1] Таким образом,

$$\varepsilon = n_1 p_2 + (n_1 + n_2) p_3 + \ldots + (n_1 + \ldots + n_{r-1}) p_r.$$

В частности, ε не зависит от p_1 и n_r. — *Прим. ред.*

Пусть теперь аргументы A_i являются комплексами с дифференциальными операторами d_i. Тогда, полагая

$$\delta_i = T(A_1, \ldots, d_i, \ldots, A_r),$$

мы получим систему попарно антикоммутирующих дифференциальных операторов $\delta_1, \ldots, \delta_r$, относительно которых r-градуированный модуль $T(A_1, \ldots, A_r)$ является r-кратным комплексом[1]. Если f_i являются отображениями комплексов (такие отображения имеют степень 0), то $T(f_1, \ldots, f_r)$ будет отображением r-кратных комплексов. Отметим, что при построении этого отображения никакого дополнительного знака не вводится[2]. Если для всех $i = 1, \ldots, r$ существуют гомотопии $s_i : f_i \simeq f'_i$, то, полагая $t_i = T(A_1, \ldots, s_i, \ldots, A_r)$, мы получим гомотопию

$$(t_1, \ldots, t_r) : T(f_1, \ldots, f_r) \simeq T(f'_1, \ldots, f'_r).$$

Для иллюстрации введенных нами определений рассмотрим тензорное произведение $A \otimes C$ градуированных модулей A и C. По определению, дважды градуированный модуль $A \otimes C$ является суммой $\sum\limits_{n,m} A^n \otimes C^m$ модулей $A^n \otimes C^m$. Если $f : A \to A'$ — отображение степени p, а $g : C \to C'$ — отображение степени q, то отображение

$$(f \otimes g) : A \otimes C \longrightarrow A' \otimes C'$$

двойной степени (p, q) на дважды однородной составляющей $A^n \otimes C^m$ определяется формулой

$$(f \otimes g)(a \otimes c) = (-1)^{nq} f(a) \otimes g(c), \qquad a \in A^n, \ c \in C^m.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае знак зависит лишь от степени отображения g и степени однородного элемента a. Если A и C — комплексы с дифференциальными операторами d_1 и d_2 соответственно, то произведение $A \otimes C$ является двойным комплексом с дифференциальными операторами $d_1 \otimes C$ и $A \otimes d_2$. Полным дифференциальным оператором в ассоциированном комплексе $A \otimes C$ является отображение $d = d_1 \otimes C + A \otimes d_2$. В явном виде это отображение определяется формулой

$$d(a \otimes c) = d_1 a \otimes c + (-1)^n a \otimes d_2 c.$$

---

[1] В частности, для функтора $T(A, C)$ от двух аргументов дифференциалы δ_1 и δ_2 двойного комплекса $T(A, C) = \sum\limits_{n,m} T(A^n, C^m)$ (для определенности функтор T предполагается ковариантным) определяются формулами

$$\delta_1^{n,m} = T(d_A^n, C^m), \quad \delta_2^{n,m} = (-1)^n T(A^n, d_C^m),$$

где d_A и d_C — дифференциалы комплексов A и C соответственно. — *Прим. ред.*

[2] Ибо $p_i = 0$ для всех i. — *Прим. ред.*

6. ГОМОМОРФИЗМ α

Начиная с этого параграфа и до конца главы, мы будем изучать некоторые соотношения между модулем гомологий $H(T(A, C))$ и модулем $T(H(A), H(C))$, играющие в дальнейшем весьма существенную роль.

Мы будем рассматривать случай, когда $T(A, C)$ — функтор от двух аргументов A и C, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму, как типичный. Если A и C являются комплексами, то $T(A, C)$ будет двойным комплексом; переходя к ассоциированному комплексу, мы можем рассматривать $T(A, C)$ и как (одинарный) комплекс.

Легко видеть, что коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z(A) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \arrow[d] \\ A \arrow[r] & Z'(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z(C) \arrow[r] \arrow[d] & H(C) \arrow[d] \\ C \arrow[r] & Z'(C) \end{tikzcd}$$

индуцируют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} T(Z(A), Z'(C)) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta"'] & T(H(A), H(C)) \arrow[d, "\tau"] \\ H(T(A, C)) \arrow[r, "\zeta"'] & T(Z'(A), Z(C)) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Действительно, в коммутативной диаграмме, получающейся при применении к заданным диаграммам функтора HT, можно в трех из ее модулей опустить символ H, поскольку эти модули обладают нулевыми дифференциалами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любого точного справа функтора T существует единственный гомоморфизм*

$$\alpha : T(H(A), H(C)) \longrightarrow H(T(A, C))$$

нулевой степени, включение которого в диаграмму (1) не нарушает ее коммутативности. Гомоморфизм α естественен по отношению к отображениям $A \to A'$ и $C' \to C$ и является тождественным отображением, если в комплексах A и C дифференциалы равны нулю. Последние два свойства также полностью характеризуют гомоморфизм α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функтор T точен справа, то отображение ξ является эпиморфизмом. Поэтому не может существовать более одного гомоморфизма α, удовлетворяющего условию $\alpha\xi = \eta$. Если такой гомоморфизм α существует, то он должен также удовлетворять условию $\zeta\alpha\xi = \zeta\eta = \tau\xi$, из которого следует, что $\zeta\alpha = \tau$. Для доказательства существования такого гомоморфизма α достаточно показать, что $\operatorname{Ker}(\xi) \subset \operatorname{Ker}(\eta)$. Но из точности справа функтора T и предложения II, 4.3 следует, что $\operatorname{Ker}(\xi)$ совпадает с суммой образов гомоморфизмов

$$T(B(A), Z'(C)) \longrightarrow T(Z(A), Z'(C)) \longleftarrow T(Z(A), B'(C)).$$

Следовательно, включение $\operatorname{Ker}(\xi) \subset \operatorname{Ker}(\eta)$ равносильно равенству нулю гомоморфизмов

$$T(B(A), Z'(C)) \longrightarrow H(T(A, C)) \longleftarrow T(Z(A), B'(C)).$$

Но эти гомоморфизмы можно соответственно представить в виде сквозных гомоморфизмов

$$T(B(A), Z'(C)) \xrightarrow{\beta} H(T(A, Z'(C))) \longrightarrow H(T(A, C)),$$

$$T(Z(A), B'(C)) \xrightarrow{\gamma} H(T(Z(A), C)) \longrightarrow H(T(A, C)),$$

так что достаточно показать, что нулевыми являются гомоморфизмы β и γ. С этой целью рассмотрим следующие разложения дифференциальных операторов комплексов $T(A, Z'(C))$ и $T(Z(A), C)$ соответственно :

$$T(A, Z'(C)) \longrightarrow T(B'(A), Z'(C)) \xrightarrow{T(\delta_A, Z(C))} T(B(A), Z'(C)) \xrightarrow{\beta'} T(A, Z'(C)),$$

$$T(Z(A), C) \longrightarrow T(Z(A), B(C)) \xrightarrow{T(Z(A), \delta_c)} T(Z(A), B'(C)) \xrightarrow{\gamma'} T(Z(A), C),$$

где δ — изоморфные отображения $B' \to B$, индуцируемые дифференциальными операторами d. Ввиду точности справа функтора T первые слева гомоморфизмы в рассматриваемых последовательностях являются эпиморфизмами ; в то же время средние гомоморфизмы в этих последовательностях являются изоморфизмами. Но в таком случае образом гомоморфизма β' будет подмодуль $B(T(A, Z'(C)))$, а образом гомоморфизма γ' — подмодуль $B(T(Z(A), C))$, откуда и следует, что гомоморфизмы β и γ равны нулю.

Утверждения о естественности гомоморфизма α и о его тождественности в случае, когда A и C являются комплексами с нулевыми дифференциалами, очевидны. Для доказательства утверждения о том, что эти свойства полностью характеризуют гомоморфизм α, предположим, что существует еще один гомоморфизм $\bar{\alpha}$: $T(H(A), H(C)) \to H(T(A, C))$, обладающий этими же двумя свойствами. Тогда отображения $Z(A) \to A$ и $C \to Z'(C)$ будут порождать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T(Z(A), Z'(C)) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & T(H(A), H(C)) \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\
T(Z(A), Z'(C)) \arrow[r, "\eta"'] & H(T(A, C))
\end{tikzcd}$$

из которой следует, что $\bar{\alpha}\xi = \eta = \alpha\xi$. Поэтому $\bar{\alpha} = \alpha$, ибо отображение ξ эпиморфно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1а. *Для любого точного слева функтора T существует единственный гомоморфизм*

$$\alpha' : H(T(A, C)) \longrightarrow T(H(A), H(C))$$

нулевой степени, включение которого в диаграмму (1) *не нарушает ее коммутативности. Гомоморфизм α' естественен по отношению* *к отображениям $A \to A'$ и $C' \to C$ и является тождественным отображением, если в комплексах A и C дифференциалы равны нулю. Последние два свойства также полностью характеризуют гомоморфизм α'.*

Доказательство двойственно доказательству предложения 6.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если функтор T точен справа и точные последовательности*

$$0 \longrightarrow H(A) \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow B(C) \longrightarrow Z(C) \longrightarrow H(C) \longrightarrow 0$$

расщепляемы, то отображение α является мономорфизмом, а его образ служит прямым слагаемым модуля $H(T(A, C))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиции расщепляющих гомоморфизмов $Z'(A) \to H(A)$ и $H(C) \to Z(C)$ с естественными гомоморфизмами $A \to Z'(A)$ и $Z(C) \to C$ являются гомоморфизмами $\beta : A \to H(A)$ и $\bar{\gamma} : H(C) \to C$, индуцирующими тождественные отображения $\beta_* : H(A) \to H(A)$ и $\bar{\gamma}_* : H(C) \to H(C)$. Поэтому иэ коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T(H(A), H(C)) & \xrightarrow{\alpha} & H(T(A, C)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ T(H(A), H(C)) & \longrightarrow & T(H(A), H(C)) \end{array}$$

вертикальные гомоморфизмы которой индуцируются отображением $T(\beta, \bar{\gamma})$, следует, что $\delta\alpha$ является тождественным отображением. Предложение 6.2 вытекает отсюда непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2а. *Если функтор T точен слева и точные последовательности*

$$0 \longrightarrow B(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H(C) \longrightarrow Z'(C) \longrightarrow B'(C) \longrightarrow 0$$

расщепляемы, то отображение α' является эпиморфизмом, а его ядро служит прямым слагаемым модуля $H(T(A, C))$.

Доказательство двойственно доказательству предложения 6.2.

7. ГОМОМОРФИЗМ α (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Здесь мы установим некоторые менее элементарные свойства гомоморфизмов α и α', которые нам понадобятся в дальнейшем. В первую очередь мы докажем, что эти гомоморфизмы перестановочны со связывающими гомоморфизмами гомологических последовательностей.

Мы будем рассматривать функтор $T(A, C)$, в котором выделен один ковариантный аргумент C, а все остальные аргументы, как предшествующие (по расположению), так и следующие за аргументом C, обозначены одной буквой A. Предполагается, что значениями каждого аргумента являются комплексы.

Пусть

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\varphi} C'' \longrightarrow 0$$

— такая точная последовательность комплексов (степени отображений ψ и φ равны нулю), что последовательность

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow T(A, C') \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C'') \longrightarrow 0$$

также точна. Тогда определены связывающие гомоморфизмы

$$(3) \qquad \delta : H(C'') \longrightarrow H(C'),$$

$$(4) \qquad \varDelta : H(T(A, C'')) \longrightarrow H(T(A, C')).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если функтор T точен справа, то имеет место коммутативная диаграмма*

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} T(H(A), H(C'')) & \xrightarrow{T(H(A),\delta)} & T(H(A), H(C')) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\ H(T(A, C'')) & \xrightarrow[\varDelta]{} & H(T(A, C')) \end{array}$$

Для точного слева функтора T следует заменить гомоморфизмы α_2 и α_1 соответственно гомоморфизмами α_2' и α_1' и изменить на противоположные направления вертикальных стрелок.

Для контравариантного по аргументу C функтора T следует в формулах (2), (4) *и* (5) *переставить между собой комплексы C' и C''.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при построении входящего в диаграмму (5) гомоморфизма $T(H(A), \delta)$ принимается во внимание соглашение о знаках (см. § 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради краткости мы будем пользоваться такими обозначениями, как если бы функтор T был ковариантен по всем аргументам A. Так, например, мы будем писать $T(Z(A), Z(C))$, тогда как на самом деле при построении этого функтора мы должны подставлять модуль $Z(A_i)$ лишь вместо ковариантных аргументов A_i, подставляя вместо контравариантных аргументов модуль $Z'(A_i)$.

Доказательство предложения 7. 1 опирается на некоторое новое определение связывающего гомоморфизма δ. Обозначая через X ядро сквозного отображения

$$C \xrightarrow{d_C} C \xrightarrow{\varphi} C'',$$

рассмотрим сквозные гомоморфизмы

$$H(C'') \xleftarrow{\mu''} Z(C'') \xleftarrow{\tau''} X \xrightarrow{\tau'} Z(C') \xrightarrow{\mu'} H(C'),$$

где μ' и μ'' — естественные отображения, τ' — гомоморфизм, определенный дифференциалом d_C в силу соотношения $d_C(X) \subset \operatorname{Im}(\psi)$, а τ'' — гомоморфизм, определенный гомоморфизмом φ в силу соотношения $\varphi(X) = Z(C'')$. Отображения τ'' и μ'' являются эпиморфизмами и, как легко видеть,

$$(6) \qquad \mu'\tau' = \delta\mu''\tau''.$$

Подобным же образом, обозначая через Y ядро сквозного отображения

$$(7)\qquad T(A, C) \xrightarrow{d} T(A, C) \longrightarrow T(A, C'')$$

и рассматривая сквозные гомоморфизмы

$$H(T(A, C'')) \xleftarrow{\varrho''} Z(T(A, C'')) \xleftarrow{\sigma''} Y \xrightarrow{\sigma'} Z(T(A, C')) \xrightarrow{\varrho'} H(T(A, C')),$$

мы получим, что

$$(8)\qquad \varrho'\sigma' = \Delta\varrho''\sigma''.$$

Так как композиция гомоморфизма $T(Z(A), X) \to T(A, C)$ с отображением (7) является нулевым гомоморфизмом, то определено отображение

$$\Theta : T(Z(A), X) \longrightarrow Y.$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T(H(A), H(C'')) \arrow[d, "\alpha_2"'] & T(Z(A), Z(C'')) \arrow[l] \arrow[d] & T(Z(A), X) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\Theta"] & T(Z(A), Z(C')) \arrow[r] \arrow[d] & T(H(A), H(C')) \arrow[d, "\alpha_1"] \\
H(T(A, C'')) & Z(T(A, C'')) \arrow[l, "\varrho''"] & Y \arrow[l, "\sigma''"] \arrow[r, "\sigma'"'] & Z(T(A, C')) \arrow[r, "\varrho'"'] & H(T(A, C'))
\end{tikzcd}$$

гомоморфизмами верхней строки которой являются соответственно отображения

$$T(\mu, \mu''), \qquad T(Z(A), \tau''), \qquad T(Z(A), \tau'), \qquad T(\mu, \mu').$$

Коммутативность крайних двух квадратов диаграммы следует из определения гомоморфизмов α_1 и α_2; используя определение гомоморфизма Θ, нетрудно убедиться в коммутативности и остальных двух квадратов. Принимая теперь во внимание равенства (6) и (8), мы получим, что

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_2 T(\mu, \mu''\tau'') &= \Delta\varrho''\sigma''\Theta = \varrho'\sigma'\Theta = \alpha_1 T(\mu, \mu'\tau') = \\ &= \alpha_1 T(\mu, \delta\mu''\tau'') = \alpha_1 T(H(A), \delta)\, T(\mu, \mu''\tau'').\end{aligned}$$

Но так как μ, μ'', τ'' являются эпиморфизмами, а функтор T точен справа, то и отображение $T(\mu, \mu''\tau'')$ является эпиморфизмом. Поэтому из полученного равенства следует, что диаграмма (5) коммутативна.

В случае, когда функтор T точен слева, вместо ядра X нужно рассмотреть коядро X' сквозного отображения $C' \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{d_C} C$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Для точного функтора T гомоморфизмы α и α' являются взаимно обратными изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что для точного функтора T (в обозначениях диаграммы (1) предыдущего параграфа)

$$\tau\xi = \zeta\eta = \tau\alpha'\alpha\xi,$$

откуда, поскольку $\mathrm{Ker}\,(\tau) = 0 = \mathrm{Coker}\,(\xi)$, следует, что $\alpha'\alpha$ является тождественным отображением. Таким образом, нужно только показать, что отображение α изоморфно. Это очевидно в случае, когда значениями всех аргументов являются комплексы с нулевыми дифференциалами. Поэтому доказательство будем вести индукцией по числу аргументов, значениями которых являются комплексы с ненулевыми дифференциалами.

Обозначив один из таких аргументов через C, мы запишем наш функтор в виде $T(A, C)$, объединяя все остальные аргументы в одной букве A. Предполагая, что функтор T ковариантен по аргументу C, рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z(C) \longrightarrow C \longrightarrow B(C) \longrightarrow 0.$$

Соответствующая гомологическая последовательность имеет вид

$$\ldots \longrightarrow B(C) \xrightarrow{\delta} Z(C) \longrightarrow H(C) \longrightarrow B(C) \xrightarrow{\delta} Z(C) \longrightarrow \ldots$$

Применяя к этой последовательности точный функтор T, мы получим точную последовательность

$$T(H(A), B(C)) \xrightarrow{\delta'} T(H(A), Z(C)) \longrightarrow T(H(A), H(C)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow T(H(A), B(C)) \xrightarrow{\delta'} T(H(A), Z(C)),$$

где $\delta' = T(H(A), \delta)$.

С другой стороны, из предложения 7.1 и свойства естественности гомоморфизма α вытекает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(H(A), B(C)) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\alpha_2"] & T(H(A), Z(C)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_1"] & T(H(A), H(C)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"] & T(H(A), B(C)) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\alpha_2"] & T(H(A), Z(C)) \arrow[d, "\alpha_1"] \\
H(T(A, B(C))) \arrow[r] & H(T(A, Z(C))) \arrow[r] & H(T(A, C)) \arrow[r] & H(T(A, B(C))) \arrow[r] & H(T(A, Z(C)))
\end{tikzcd}$$

нижней строкой которой служит отрезок гомологической последовательности для точной последовательности

$$0 \longrightarrow T(A, Z(C)) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, B(C)) \longrightarrow 0.$$

Таким образом, строками рассматриваемой диаграммы являются точные последовательности ; кроме того, согласно предположению индукции, отображения α_1 и α_2 являются изоморфизмами. Поэтому применимо предложение I, 1.1 («лемма о пяти гомоморфизмах»), из которого следует, что отображение α также является изоморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Пусть функтор $T(A, C)$ точен справа и ковариантен по аргументу C. Тогда, если отображение*

$$T(A, Z(C)) \longrightarrow T(A, C)$$

является мономорфизмом, а отображение

$$\alpha : T(H(A), B(C)) \longrightarrow H(T(A, B(C)))$$

— эпиморфизмом, то имеет место точная последовательность

$$(9)\quad \ldots \longrightarrow H(T(A,C)) \xrightarrow{k^*} H(T(A,\,B(C))) \xrightarrow{i^*} H(T(A,\,Z(C))) \xrightarrow{j^*}$$
$$\xrightarrow{j^*} H(T(A,C)) \longrightarrow \ldots$$

гомоморфизмы которой индуцированы естественными отображениями

$$(10)\qquad C \xrightarrow{k} B(C) \xrightarrow{i} Z(C) \xrightarrow{j} C.$$

Для контравариантного по аргументу C функтора T следует модули $B(C)$ и $Z(C)$ заменить соответственно модулями $B'(C)$ и $Z'(C)$ и в последовательности (10) *изменить направления стрелок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность (9) отличается от гомологической последовательности для точной последовательности

$$0 \longrightarrow T(A,\,Z(C)) \longrightarrow T(A,C) \longrightarrow T(A,\,B(C)) \longrightarrow 0$$

лишь тем, что в нее вместо связывающего гомоморфизма Δ входит гомоморфизм i^*. Следовательно, достаточно доказать, что в рассматриваемом случае $\Delta = i^*$.

Согласно предложению 7.1, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(H(A),\,B(C)) \arrow[r, "T(H(A)\text{,}\delta)"] \arrow[d, "\alpha"] & T(H(A),\,Z(C)) \arrow[d, "\alpha_1"] \\
H(T(A,\,B(C))) \arrow[r, "\Delta"'] & H(T(A,\,Z(C)))
\end{tikzcd}$$

где $\delta : B(C) \to Z(C)$ — связывающий гомоморфизм гомологической последовательности для точной последовательности $0 \to Z(C) \to C \to B(C) \to 0$. Ясно, что $\delta = i$. Поэтому в силу естественности гомоморфизма α имеет место равенство $i^*\alpha = \alpha_1\, T(H(A),\delta)$, из которого непосредственно вытекает, что $\Delta\alpha = i^*\alpha$. Следовательно, $\Delta = i^*$, ибо отображение α эпиморфно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3а. *Пусть функтор T точен слева и ковариантен по аргументу C. Тогда, если отображение*

$$T(A,C) \longrightarrow T(A,\,Z'(C))$$

является эпиморфизмом, а отображение

$$\alpha' : H(T(A,\,B'(C))) \longrightarrow T(H(A),\,B'(C))$$

мономорфизмом, то имеет место точная последовательность

$$(9a)\quad \ldots \longrightarrow H(T(A,C)) \longrightarrow H(T(A,\,Z'(C))) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H(T(A,\,B'(C))) \longrightarrow H(T(A,C)) \longrightarrow \ldots,$$

гомоморфизмы которой индуцированы естественными отображениями

$$(10a)\qquad C \longrightarrow Z'(C) \longrightarrow B'(C) \longrightarrow C.$$

Для контравариантного по аргументу C функтора T следует модули $B'(C)$ и $Z'(C)$ заменить соответственно модулями $B(C)$ и $Z(C)$ и в последовательности (10a) *изменить направление стрелок.*

Эти результаты можно следующим образом усилить. Для каждого комплекса A обозначим через $\mathscr{M}(A)$ категорию, состоящую из комплексов A, $B(A)$, $B'(A)$, $Z(A)$, $Z'(A)$, $H(A)$, тождественных отображений, отображений, входящих в диаграмму 1, (2), изоморфизма $B'(A) \to B(A)$ и всех композиций этих отображений. Оказывается, что в доказанных выше предложениях условия «функтор T точен справа», «функтор T точен слева» и «функтор T точен» можно заменить соответственно более слабыми условиями: «функтор T точен справа на категориях $\mathscr{M}(A)$ и $\mathscr{M}(C)$», «функтор T точен слева на категориях $\mathscr{M}(A)$ и $\mathscr{M}(C)$» и «функтор T точен на категориях $\mathscr{M}(A)$ и $\mathscr{M}(C)$».

Комплекс A называется *расщепляемым*, если расщепляемы все точные последовательности, входящие в диаграмму 1, (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Если комплексы A и C расщепляемы, то отображения α и α' определены и являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Это утверждение непосредственно следует из предложения 7.2, так как ввиду расщепляемости комплексов A и C функтор $T(A, C)$ точен на категориях $\mathscr{M}(A)$ и $\mathscr{M}(C)$.

8. СООТНОШЕНИЯ КЮННЕТА

В этом параграфе мы будем рассматривать функтор T произвольного числа аргументов. Как и выше, один из аргументов мы обозначим через C, а все остальные — одной буквой A. Через S_1T и S^1T будут обозначаться соответственно левый и правый сателлиты функтора T относительно аргумента C. Кроме того, мы будем считать, что аргументами функтора T являются комплексы.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть функтор T точен справа и ковариантен по аргументу C. Тогда, если отображения*

$$\alpha_1 : T(H(A), B(C)) \longrightarrow H(T(A, B(C))),$$
$$\alpha_2 : T(H(A), Z(C)) \longrightarrow H(T(A, Z(C)))$$

являются изоморфизмами и если

$$(1) \qquad S_1T(A, B(C)) = 0 = S_1T(H(A), Z(C)),$$

то имеет место точная последовательность

$$(2) \quad 0 \longrightarrow T(H(A), H(C)) \xrightarrow{\alpha} H(T(A, C)) \xrightarrow{\beta} S_1T(H(A), H(C)) \longrightarrow 0,$$

где β — некоторый гомоморфизм степени 1. Для контравариантного по аргументу C функтора T следует модули $B(C)$ и $Z(C)$ заменить соответственно модулями $B'(C)$ и $Z'(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T(H(A),B(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & T(H(A),Z(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & T(H(A),H(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 & \\
H(T(A,B(C))) \arrow[r] & H(T(A,Z(C))) \arrow[r] & H(T(A,C)) \arrow[r] & H(T(A,B(C))) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1^{-1}"] & H(T(A,Z(C))) \arrow[d, "\alpha_2^{-1}"] \\
 & 0 \arrow[r] & S_1T(H(A),H(C)) \arrow[r] & T(H(A),B(C)) \arrow[r] & T(H(A),Z(C))
\end{tikzcd}$$

Так как $S_1T(A, B(C)) = 0$, то отображение $T(A, Z(C)) \to T(A, C)$ является мономорфизмом[1]. Согласно предложению 7.3, отсюда и из изоморфности отображения α_1 следует, что средняя строка диаграммы является точной последовательностью. Так как $S_1T(H(A), Z(C)) = 0$, то остальные две строки диаграммы также являются точными последовательностями[2]. Отсюда, как легко видеть, вытекает, что существует единственный гомоморфизм

$$\beta : H(T(A,C)) \to S_1T(H(A), H(C)),$$

включение которого в диаграмму не нарушает ее коммутативности. Точность последовательности (2) теперь непосредственно следует из коммутативности пополненной диаграммы.

Точная последовательность (2) является естественной в следующем смысле: для любой другой пары комплексов A', C', удовлетворяющей условиям теоремы 8.1, и любых отображений $f : A \to A'$, $g : C \to C'$ (под f подразумевается система, состоящаяиз отображений $f_i : A_i \to A'_i$ для всех ковариантных аргументов из A и отображений $f_i : A'_i \to A_i$ для всех контравариантных аргументов из A) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(H(A),H(C)) \arrow[r] \arrow[d] & H(T(A,C)) \arrow[r] \arrow[d] & S_1T(H(A),H(C)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(H(A'),H(C')) \arrow[r] & H(T(A',C')) \arrow[r] & S_1T(H(A'),H(C')) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Отметим также, что в случае, когда T — функтор одного аргумента C, условия, налагаемые в теореме 8.1 на отображения α_1 и α_2, выполняются автоматически, а условие (1) принимает вид

$$(1') \qquad S_1T(B(C)) = 0 = S_1T(Z(C)).$$

Так как степени отображений α и β равны соответственно 0 и 1, то точную последовательность (2) можно переписать в следующем виде:

$$0 \to \sum_{p+q=n} T(H^p(A), H^q(C)) \xrightarrow{\alpha} H^n(T(A,C)) \xrightarrow{\beta} \sum_{p+q=n+1} S_1T(H^p(A), H^q(C)) \to 0.$$

---

[1] Здесь использована теорема III, 3.1; см. замечание, помещенное выше теоремы 8.1a. — *Прим. перев.*

[2] Допущена небольшая неточность. Из условия $S_1T(H(A), Z(C)) = 0$ следует лишь точность нижней строки диаграммы; точность же верхней строки следует из точности справа функтора T. — *Прим. перев.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Единственное свойство сателлита S_1T, использованное в доказательстве теоремы 8.1, состоит в том, что любой точной последовательности $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ соответствует точная последовательность

$$S_1T(C) \longrightarrow S_1T(C'') \longrightarrow T(C') \longrightarrow T(C)$$

(функтор T предполагается ковариантным по аргументу C[1]).

ТЕОРЕМА 8.1а. *Пусть функтор T точен слева и ковариантен по аргументу C. Тогда, если отображения*

$$\alpha'_1 : H(T(A, B'(C))) \longrightarrow T(H(A), B'(C)),$$
$$\alpha'_2 : H(T(A, Z'(C))) \longrightarrow T(H(A), Z'(C))$$

являются изоморфизмами и если

$$S^1T(A, B'(C)) = 0 = S^1T(H(A), Z'(C)), \tag{1a}$$

то имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow S^1T(H(A), H(C)) \xrightarrow{\beta'} H(T(A, C)) \xrightarrow{\alpha'} T(H(A), H(C)) \longrightarrow 0, \tag{2a}$$

где β' — некоторый гомоморфизм степени 1. *Для контравариантного по аргументу C функтора T следует модули $B'(C)$ и $Z'(C)$ заменить соответственно модулями $B(C)$ и $Z(C)$.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть A и A' — два Λ-комплекса. *Отображением* $f : A \to A'$ *степени* u называется гомоморфизм степени u, для которого $df = (-1)^u fd$. *Гомотопией* $s : f \simeq g$, связывающей отображения $f, g : A \to A'$ одной и той же степени u, называется такой гомоморфизм $s : A \to A'$ степени $u - 1$, что $ds + (-1)^u sd = g - f$.

Доказать, что если $f : A \to A'$ — отображение степени u, а $f' : A' \to A''$ — отображение степени v, то композиция $f'f : A \to A''$ является отображением степени $u + v$. Доказать также, что если $s : f \simeq g$ и $s' : f' \simeq g'$, то

$$s'f + (-1)^v g's : f'f \simeq g'g.$$

2. Обобщить понятия, введенные в предыдущем упражнении, на двойные и n-кратные комплексы. Показать, в частности, что если $f : A \to A'$, $g : C \to C'$ — отображения степени u и v соответственно, то гомоморфизмы

$$f \otimes g : A \otimes C \to A' \otimes C', \qquad \mathrm{Hom}\,(f, g) : \mathrm{Hom}\,(A', C) \to \mathrm{Hom}\,(A, C')$$

являются отображениями комплексов двойной степени (u, v). Вывести соответствующие заключения из соотношений $s : f \simeq f'$, $t : g \simeq g'$.

3. Пусть A' и A'' — два комплекса и пусть $f : A'' \to A'$ — отображение нулевой степени. В прямой сумме $A = A' + A''$ модулей A' и A''

[1] И полуточным. — *Прим. перев.*

введем градуировку и дифференциальный оператор d_f, полагая $A^n = A'^n + A''^{n+1}$,

$$d_f(a', a'') = (da' + f(a''), -da'').$$

Доказать, что при таком определении дифференциального оператора гомоморфизмы

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0,$$

определенные формулами $\psi(a') = (a', 0)$, $\varphi(a', a'') = a''$, являются отображениями комплексов соответственно степени 0 и 1. Доказать также, что любой дифференциальный оператор градуированного модуля A, обладающий указанными выше свойствами, имеет вид d_f, где $f: A'' \to A'$ — некоторое отображение нулевой степени.

Точной последовательности (1) соответствует гомологическая последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^n(A') \xrightarrow{\psi^*} H^n(A) \xrightarrow{\varphi^*} H^{n+1}(A'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A') \longrightarrow \ldots.$$

Показать, что гомоморфизм δ совпадает с гомоморфизмом, индуцированным отображением f.

4. Обозначим комплекс A, построенный в упражнении 3, через (A', A'', f). Пусть (C', C'', g) — другой комплекс такого же вида. Доказать, что отображение $h: (A', A'', f) \to (C', C'', g)$ нулевой степени, совместимое с заданными отображениями $h': A' \to C'$ и $h'': A'' \to C''$ нулевой степени, существует тогда и только тогда, когда $gh'' \simeq h'f$. Доказать, что отображения h указанного вида и гомотопии $s: gh'' \simeq \simeq h'f$ взаимно однозначно определяют друг друга.

В частности, любое отображение $(A', A'', f) \to C$ задается отображением $h: A' \to C$ и гомотопией $s: 0 \simeq hf$, а отображение $A \to \to (C', C'', g)$ задается отображением $h: A \to C''$ и гомотопией $s: gh \simeq 0$.

5. Для любых градуированных Λ-модулей A и C обозначим через $M^u(A, C)$ группу всех Λ-гомоморфизмов $A \to C$ степени u. В случае, когда A и C являются комплексами, выделим в группе $M^u(A, C)$ подгруппу $\mathrm{Map}^u(A, C)$, состоящую из всех отображений этих комплексов степени u; подгруппу группы $\mathrm{Map}^u(A, C)$, состоящую из всех гомотопных нулю отображений степени u, обозначим через $\mathrm{Map}_0^u(A, C)$.

Обратим градуированную группу $M(A, C) = \sum_u M^u(A, C)$ в комплекс, полагая

$$(dg)\, a = g(da) + (-1)^{u+1} d(ga), \qquad a \in A,\ g \in M^u(A, C).$$

Доказать, что

$$Z^u(M(A, C)) = \mathrm{Map}^u(A, C), \qquad B^u(M(A, C)) = \mathrm{Map}_0^u(A, C).$$

6. Пусть

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$$

— такая точная последовательность Λ-комплексов, что

$$\psi \in \mathrm{Map}^0 (A', A), \quad \varphi \in \mathrm{Map}^1 (A, A'')$$

и каждая точная последовательность $0 \to A'^n \to A^n \to A''^{n+1} \to 0$ расщепляема. Тогда имеет место точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow M(A'', C) \longrightarrow M(A, C) \longrightarrow M(A', C) \longrightarrow 0,$$

из которой в силу теоремы 1.1 вытекает точная последовательность

$$\mathrm{Map}^u (A, C) \longrightarrow \mathrm{Map}^u (A', C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Map}^u (A'', C)/\mathrm{Map}_0^u (A'', C).$$

Доказать, что в случае, когда комплекс A имеет вид (A', A'', f) (см. упражнения 3 и 4), гомоморфизм δ индуцируется отображением f. Сравнить это утверждение с последним утверждением упражнения 3.

Доказать аналогичные утверждения для точной последовательности

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0.$$

7. Пусть A и C — двойные комплексы, для которых $A^{p,q} = 0 = C^{p,q}$, если $p < 0$, и пусть A' и C' — двойные комплексы, модули и первые дифференциалы которых совпадают соответственно с модулями и первыми дифференциалами двойных комплексов A и C, а вторые дифференциалы равны нулю. Доказать, что если отображение $f: A \to C$ индуцирует изоморфизм $H(A') \approx H(C')$, то это же отображение f индуцирует изоморфизм $H(A) \approx H(C)$.

(Указание: доказать, что $A' = \sum\limits_r F^r(A)/F^{r+1}(A)$, где $F^r(A) = \sum\limits_p \sum\limits_{q \geq r} A^{p,q}$, и аналогично для комплекса C'. Затем показать, что для любых n и r отображение $H^n(F^r(A)) \to H^n(F^r(C))$ является изоморфизмом; для $r > n$ это тривиально, а для $r \leq n$ доказывается индукцией по убыванию индекса r с помощью леммы о пяти гомоморфизмах (предложение I, 1.1). Наконец, доказать, что отображение $H^n(A) \to H^n(C)$ является изоморфизмом.)

8. Доказать, что точный справа функтор T тогда и только тогда точен, когда для любых комплексов A и C отображение α : $T(H(A), H(C)) \to H(T(A, C))$ является изоморфизмом. Доказать аналогичное утверждение для точных слева функторов.

ГЛАВА V

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

Введение. Настоящая глава занимает в этой книге центральное место, и поэтому читатель должен ее изучить со всей тщательностью. Каждому модулю A мы сопоставляем некоторые комплексы, называемые проективными и инъективными резольвентами модуля A. Подставляя в данный функтор $T(A, C)$ вместо модулей A и C их проективные или инъективные резольвенты X и Y (в зависимости от того, ковариантны или контравариантны эти аргументы), мы получаем двойной комплекс $T(X, Y)$. Группы гомологий этого двойного комплекса не зависят от выбора резольвент X и Y и называются в зависимости от некоторых дополнительных обстоятельств левыми или правыми производными функторами $L_nT(A, C)$ и $R^nT(A, C)$ функтора T. Эти функторы для различных значений индекса n связаны друг с другом определенными гомоморфизмами, которые мы включим в соответствующим образом построенные точные последовательности. Все это делается в § 1—4.

Основные свойства производных функторов изучаются в § 5—9. В последнем § 10 рассматриваются некоторые более специальные вопросы. Материал этого параграфа нам понадобится только в гл. XII, посвященной конечным группам.

1. КОМПЛЕКСЫ НАД МОДУЛЯМИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать произвольный Λ-модуль A как комплекс, для которого $A^0 = A$ и $A^n = 0$, если $n \neq 0$, а дифференциальный оператор равен нулю. В этом случае модули $Z(A)$, $Z'(A)$ и $H(A)$ совпадают с модулем A, а модули $B(A)$ и $B'(A)$ равны нулю.

Отрицательно градуированный комплекс X (т. е. комплекс, для которого $X^n = 0$ для всех $n > 0$), рассматриваемый вместе с некоторым отображением комплексов $\varepsilon : X \to A$, называется *левым комплексом над модулем* A, а ε называется *пополняющим отображением*. Так как $A^n = 0$ для всех $n \neq 0$, то отображение ε сводится к единственному гомоморфизму $X^0 \to A$, такому, что сквозное отображение $X^{-1} \to X^0 \to A$ равно нулю. Левый комплекс X над модулем A называется *проективным*, если все его однородные составляющие X^n проективны. Левый комплекс X над модулем A называется *ацикличным*, если отображение ε индуцирует изоморфизм $H(X) \approx A$. Очевидно, условие ацикличности равносильно точности последовательности

$$\ldots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

В этой последовательности мы пишем индексы внизу, чтобы не пользоваться отрицательными числами; так мы всегда будем поступать при рассмотрении левых комплексов.

Левый комплекс X над модулем A, одновременно проективный и ацикличный, называется *проективной резольвентой* модуля A.

Пусть $f : A \to A'$ — произвольный гомоморфизм модулей и пусть X и X' — левые комплексы над модулями A и A' соответственно с пополняющими отображениями ε и ε'. Любое отображение $F : X \to X'$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A' \end{array}$$

мы будем называть *отображением над гомоморфизмом* f.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Для любого проективного левого комплекса X над модулем A и любого ацикличного левого комплекса X' над модулем A' существует над произвольным гомоморфизмом $f : A \to A'$ по крайней мере одно отображение $F : X \to X'$. Любые два таких отображения гомотопны между собой* (см. § IV, 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом доказательстве, так же как и в аналогичных доказательствах в дальнейшем, мы будем пользоваться следующим свойством проективных модулей, непосредственно вытекающим из их определения: если в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \\ A'' & \xrightarrow[\psi]{} & A & \xrightarrow[\varphi]{} & A' \end{array}$$

строка является точной последовательностью, модуль P проективен и $\varphi\tau = 0$, то существует такой гомоморфизм $\sigma : P \to A''$, что $\tau = \psi\sigma$.

Начнем с построения отображения $F : X \to X'$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f\varepsilon} & & \\ X_0' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Так как модуль X_0 проективен, то существует такой гомоморфизм $F_0 : X_0 \to X'_0$, что $\varepsilon' F_0 = f\varepsilon$. Рассмотрим далее диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle F_0 d_1} & & \\ X'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & X'_0 & \xrightarrow[\varepsilon']{} & A' \end{array}$$

Так как $\varepsilon' F_0 d_1 = f\varepsilon d_1 = 0$, то существует такой гомоморфизм $F_1 : X_1 \to X'_1$, что $d'_1 F_1 = F_0 d_1$. Пусть теперь для каждого $n < p$ (где $p > 1$) уже построен такой гомоморфизм $F_n : X_n \to X'_n$, что $d'_n F_n = F_{n-1}\, d_n$ (если $n > 0$). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_p & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle F_{p-1} d_p} & & \\ X'_p & \xrightarrow[d'_p]{} & X'_{p-1} & \xrightarrow[c'_{p-1}]{} & X'_{p-2} \end{array}$$

Так как $d'_{p-1} F_{p-1} d_p = F_{p-2} d_{p-1} d_p = 0$, то существует такой гомоморфизм $F_p : X_p \to X'_p$, что $d'_p F_p = F_{p-1} d_p$. Тем самым существование отображения F доказано.

Пусть теперь F и F' — два отображения комплекса X в комплекс X' над гомоморфизмом f. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\ X'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & X'_0 & \xrightarrow[\varepsilon']{} & A' \end{array}$$

в которой $\tau = F'_0 - F_0$. Так как $\varepsilon'\tau = \varepsilon' F'_0 - \varepsilon' F_0 = f\varepsilon - f\varepsilon = 0$, то существует такой гомоморфизм $s_0 : X_0 \to X'_1$, что $d'_1 s_0 = F'_0 - F_0$. Пусть теперь для каждого $n < p$ (где $p > 0$) уже построен такой гомоморфизм $s_n : X_n \to X'_{n+1}$, что $d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n = F'_n - F_n$ (если $n > 0$). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_p & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\ X'_{p+1} & \xrightarrow[d'_{p+1}]{} & X'_p & \xrightarrow[c'_p]{} & X'_{p-1} \end{array}$$

в которой $\tau = F'_p - F_p - s_{p-1} d_p$. Поскольку, как нетрудно убедиться, $d'_p \tau = 0$, существует такой гомоморфизм $s_p : X_p \to X'_{p+1}$, что $\tau = d'_{p+1} s_p$, т. е. $d'_{p+1} s_p + s_{p-1} d_p = F'_p - F_p$. Тем самым построена и гомотопия $s : F \simeq F'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для любого модуля существует проективная резольвента. Для любых проективных резольвент X и X' модулей A и A' соответственно и любого гомоморфизма $f : A \to A'$ существует по крайней мере одно отображение $F : X \to X'$ над гомоморфизмом f. Любые два отображения $F, F' : X \to X'$ над одним и тем же гомоморфизмом $A \to A'$ гомотопны между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО существования состоит в последовательном применении теоремы I, 2.3. Отправляясь от модуля A, последовательно строим точные последовательности

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow Z_0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0, \\
0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Z_0 \longrightarrow 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow X_n \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

с проективными модулями X_n. Комплекс X, однородными составляющими которого являются модули X_n, а n-й компонентой d_n дифференциального оператора — сквозное отображение $X_n \to Z_{n-1} \to X_{n-1}$, будет проективной резольвентой модуля A. Остальные утверждения предложения 1.2 непосредственно вытекают из предложения 1.1.

Отметим, что изложенное доказательство приводит к проективной резольвенте, однородными составляющими которой являются не просто проективные, а свободные модули.

Из предложения 1.2 следует также, что любые две резольвенты X и X' одного и того же модуля A принадлежат к одному *гомотопическому типу*, т. е. над тождественным отображением модуля A существуют такие отображения $F : X \to X'$ и $F' : X' \to X$, что композиции $F'F$ и FF' гомотопны тождественным отображениям.

Изложим вкратце и без доказательств аналогичные построения для правых комплексов.

Положительно градуированный комплекс X, рассматриваемый вместе с некоторым отображением $\varepsilon : A \to X$, называется *правым комплексом* над модулем A, а ε называется *пополняющим отображением*. Правый комплекс X над модулем A называется *инъективным*, если все его однородные составляющие X^n инъективны. Правый комплекс X называется *ацикличным*, если отображение ε индуцирует изоморфизм $A \approx H(X)$. Очевидно, условие ацикличности равносильно точности последовательности

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \ldots.$$

Правый комплекс X, одновременно инъективный и ацикличный, называется *инъективной резольвентой* модуля A.

Если X и X' — правые комплексы над модулями A и A' соответственно и $f : A \to A'$ — произвольный гомоморфизм, то отображение $F : X \to X'$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & A' \\
{\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\
X & \xrightarrow[F]{} & X'
\end{array}$$

называется *отображением над гомоморфизмом* f.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1a. *Для любого ацикличного правого комплекса X над модулем A и любого инъективного правого комплекса X' над модулем A' существует над произвольным гомоморфизмом $f: A \to A'$ по крайней мере одно отображение $F: X \to X'$. Любые два таких отображения гомотопны между собой.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2a. *Для любого модуля существует инъективная резольвента. Для любых инъективных резольвент X и X' модулей A и A' соответственно и любого гомоморфизма $f: A \to A'$ существует по крайней мере одно отображение $F: X \to X'$ над гомоморфизмом f. Любые два отображения $F, F': X \to X'$ над одним и тем же гомоморфизмом $A \to A'$ гомотопны между собой.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если кольцо Λ нетерово слева, то для любого левого Λ-модуля A с конечным числом образующих существует проективная резольвента X, однородными составляющими X_n которой являются свободные модули с конечной базой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точные последовательности, построенные при доказательстве предложения 1.2. Так как теперь модуль A имеет конечное число образующих, то в качестве модуля X_0 можно выбрать свободный модуль с конечной базой. Но тогда, поскольку кольцо Λ нетерово слева, ядро Z_0 также будет модулем с конечным числом образующих. Поэтому и в качестве модуля X_1 можно выбрать свободный модуль с конечной базой и т. д.

2. РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$$

— произвольная точная последовательность модулей и

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$$

— такая точная последовательность комплексов, что X', X, X'' — левые комплексы над модулями A', A, A'' соответственно, Ψ — отображение над гомоморфизмом ψ, а Φ — отображение над гомоморфизмом φ[1]. Если комплексы X', X, X'' являются проективными резольвентами модулей A', A, A'' соответственно, то последовательность (2) называется *проективной резольвентой точной последовательности* (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если комплексы X' и X'' проективны, то комплекс X также проективен. Если комплексы X' и X'' ацикличны, то комплекс X также ацикличен. Если комплексы X' и X'' являются проективными резольвентами модулей A' и A'' соответственно, то последовательность* (2) *является проективной резольвентой последовательности* (1).

[1] В дальнейшем точную последовательность (2) авторы называют последовательностью левых комплексов над точной последовательностью (1). — *Прим. перев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого n имеет место точная последовательность $0 \to X'_n \to X_n \to X''_n \to 0$. Если модуль X''_n проективен, то эта последовательность расщепляема и, следовательно, модуль X_n изоморфен прямой сумме $X'_n + X''_n$. Поэтому, если модуль X'_n также проективен, то проективен и модуль X_n.

Предположим теперь, что комплексы X' и X'' ацикличны. Это означает, что последовательности

$$\ldots \longrightarrow X'_n \longrightarrow X'_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X'_0 \longrightarrow A' \to 0,$$
$$\ldots \longrightarrow X''_n \longrightarrow X''_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X''_0 \longrightarrow A'' \to 0$$

точны. Пусть $\bar{X}'$, $\bar{X}''$ — комплексы, определяемые этими последовательностями, и $\bar{X}$ — аналогичный комплекс, построенный для комплекса X. Так как имеет место точная последовательность $H(\bar{X}') \to H(\bar{X}) \to H(\bar{X}'')$, то $H(\bar{X}) = 0$, т. е. левый комплекс X над модулем A ацикличен.

Точная последовательность (2) называется *нормальной*, если для каждого n точная последовательность $0 \to X'_n \to X_n \to X''_n \to 0$ расщепляема. Например, так всегда будет, если комплекс X'' проективен. Если точная последовательность (2) нормальна, то модули X_n можно заменить прямыми суммами $X'_n + X''_n$, причем можно предполагать, что

$$\Psi(x'_n) = (x'_n, 0), \quad \Phi(x'_n, x''_n) = x''_n.$$

В этом случае

$$d_n(x'_n, x''_n) = (d'_n x'_n + \Theta_n x''_n,\ d''_n x''_n),$$
$$\varepsilon(x'_0, x''_0) = \psi\varepsilon' x'_0 + \sigma x''_0,$$

где

$$\sigma : X''_0 \longrightarrow A,$$
$$\Theta_n : X''_n \longrightarrow X'_{n-1}, \qquad n > 0,$$

— некоторые гомоморфизмы, удовлетворяющие условиям:

$$\varepsilon'' = \varphi\sigma,$$
$$(3) \qquad \psi\varepsilon'\Theta_1 + \sigma d''_1 = 0,$$
$$d'_{n-1}\Theta_n + \Theta_{n-1}d''_n = 0, \qquad n > 1,$$

равносильным соотношениям $\varepsilon''\Phi_0 = \varphi\varepsilon$, $\varepsilon\, d_1 = 0$ и $d_{n-1}d_n = 0$. О нормальной точной последовательности, записанной в таком виде мы будем говорить, что она представлена в *нормальной форме.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для любой точной последовательности* (1), *любого ацикличного левого комплекса X' над модулем A' и любого проективного левого комплекса X'' над модулем A'' существует такой левый комплекс X над модулем A и такие отображения Ψ и Φ над гомоморфизмами ψ и φ соответственно, что получающаяся последовательность* (2) *является точной последовательностью. При этом,* *если комплексы X' и X'' — проективные резольвенты модулей A' и A'' соответственно, то комплекс X является проективной резольвентой модуля A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее утверждение непосредственно вытекает из предложения 2.1. Для доказательства первого утверждения достаточно построить гомоморфизмы $\sigma : X_0'' \to A$ и $\Theta_n : X_n'' \to X_{n-1}'$, удовлетворяющие условиям (3). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0'' & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} & & \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Так как модуль X_0'' проективен, то существует такой гомоморфизм $\sigma : X_0'' \to A$, что $\varphi\sigma = \varepsilon''$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1'' & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle -\sigma d_1''} & & \\ X_0' & \xrightarrow[\psi\varepsilon']{} & A & \xrightarrow[\varphi]{} & A'' \end{array}$$

Так как ее строка является точной последовательностью, модуль X_1'' проективен и $\varphi\sigma d_1'' = \varepsilon'' d_1'' = 0$, то существует такой гомоморфизм $\Theta_1 : X_1'' \to X_0'$, что $\psi\varepsilon'\Theta_1 = -\sigma d_1''$. Рассмотрим далее диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2'' & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle -\Theta_1 d_2''} & & \\ X_1' & \xrightarrow[d_1']{} & X_0' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & A' \end{array}$$

Так как $-\psi\varepsilon'\Theta_1 d_2'' = \sigma d_1'' d_2'' = 0$, а $\operatorname{Ker}(\psi) = 0$, то $-\varepsilon'\Theta_1 d_2'' = 0$. Следовательно, существует такой гомоморфизм $\Theta_2 : X_2'' \to X_1'$, что $d_1'\Theta_2 = -\Theta_1 d_2''$. Гомоморфизмы Θ_p для $p > 2$ определяются аналогично с помощью диаграмм

$$\begin{array}{ccccc} & & X_p'' & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle -\Theta_{p-1} d_p''} & & \\ X_{p-1}' & \longrightarrow & X_{p-2}' & \longrightarrow & X_{p-3}' \end{array}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[\psi^*]{} & B & \xrightarrow[\varphi^*]{} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками, и пусть

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\Psi^*} Y \xrightarrow{\Phi^*} Y'' \longrightarrow 0$$

— нормальные точные последовательности левых комплексов над верхней и нижней строками этой диаграммы соответственно. Если комплекс X'' проективен, а комплекс Y' ацикличен, то для любых отображений $F' : X' \to Y'$ и $F'' : X'' \to Y''$ над гомоморфизмами f' и f'' соответственно существует такое отображение $F : X \to Y$ над гомоморфизмом f, что имеет место коммутативная диаграмма.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\
0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Если G', G, G'' — другая тройка отображений над гомоморфизмами f', f, f'', обладающая теми же свойствами, то для любых гомотопий $s' : F' \simeq G'$ и $s'' : F'' \simeq G''$ существует такая гомотопия $s : F \simeq G$, что для любого $n \geq 0$ имеет место коммутативная диаграмма.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle s'_n} & & \downarrow{\scriptstyle s_n} & & \downarrow{\scriptstyle s''_n} & & \\
0 & \longrightarrow & Y'_{n+1} & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y''_{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предполагать, что комплексы X и Y представлены в нормальной форме. Тогда, если σ^X, Θ_n^X, σ^Y, Θ_n^Y — соответствующие гомоморфизмы, то требуемое отображение $F : X \to Y$ можно определить формулой

$$F_n(x'_n, x''_n) = (F'_n x'_n + \gamma_n x''_n,\ F''_n x''_n),$$

где $\gamma_n : X''_n \to Y'_n$ — некоторые гомоморфизмы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
&(4) \qquad & \psi^* \varepsilon' \gamma_0 + \sigma^Y F''_0 &= f \sigma^X, & \\
& & d'_n \gamma_n - \gamma_{n-1} d''_n &= F'_{n-1}\Theta_n^X - \Theta_n^Y F''_n, \qquad & n > 0.
\end{aligned}$$

(Эти условия являются перефразировкой соотношений $\varepsilon^Y F_0 = f\varepsilon^X$ и $d_n^Y F_n = F_{n-1} d_n^X$, $n > 0$.) С помощью уравнений (4) мы можем последовательно определить все гомоморфизмы γ_n (см. выше аналогичное построение гомоморфизмов Θ_n).

Аналогично доказывается второе утверждение. Искомая гомотопия $s : F \simeq G$ должна иметь следующий вид:

$$s_n(x'_n, x''_n) = (s'_n x'_n + t_n x''_n,\ s''_n x''_n),$$

где $t_n : X''_n \to Y'_{n+1}$ некоторые гомоморфизмы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
d'_1 t_0 + \Theta_1^Y s''_0 &= \gamma_0^G - \gamma_0^F, & \\
d'_{n+1} t_n + t_{n-1} d''_n + \Theta_{n+1}^Y s''_n + s'_{n-1}\Theta_n^X &= \gamma_n^G - \gamma_n^F, \qquad & n > 0,
\end{aligned}$$

равносильным соотношениям $d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = G_n - F_n$. Как и выше, эти уравнения можно последовательно решить относительно гомоморфизмов $t_0, t_1, \ldots$.

Аналоги результатов этого параграфа для правых комплексов настолько очевидны, что мы не будем их даже формулировать.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКТОРОВ

Хотя мы будем иметь в виду, так же как и в предыдущих главах, аддитивные функторы T любого числа ковариантных или контравариантных аргументов, но для определенности ограничимся рассмотрением функтора $T(A, C)$, ковариантного по аргументу A и контравариантного по аргументу C. При этом почти во всех определениях и результатах под символом A можно подразумевать любое число ковариантных, а под символом C — любое число контравариантных аргументов. Все случаи, когда число аргументов имеет какое-нибудь значение, будут в дальнейшем особо оговариваться.

Итак, рассмотрим (аддитивный) функтор $T(A, C)$, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. Значениями аргумента A мы будем считать Λ_1-модули, значениями аргумента C — Λ_2-модули и значениями функтора $T(A, C)$ — Λ-модули. Согласно § IV, 5, для любого правого комплекса X над модулем A и любого левого комплекса Y над модулем C определен двойной комплекс $T(X, Y)$. Ассоциированный с этим двойным комплексом одинарный комплекс, который мы также будем обозначать через $T(X, Y)$, является, очевидно, правым комплексом над модулем $T(A, C)$. Для любых отображений $F: X \to X'$ и $G: Y' \to Y$ над гомоморфизмами $f: A \to A'$ и $g: C' \to C$ соответственно отображение

$$T(F, G): T(X, Y) \longrightarrow T(X', Y')$$

является отображением над гомоморфизмом

$$T(f, g): T(A, C) \longrightarrow T(A', C').$$

Кроме того, если $F \simeq F'$ и $G \simeq G'$, то $T(F, G) \simeq T(F', G')$ (см. § IV, 5).

Предположим теперь, что комплексы X и X' являются инъективными резольвентами Λ_1-модулей A и A', а комплексы Y и Y' — проективными резольвентами Λ_2-модулей C и C' соответственно. Тогда, согласно предложениям 1.2 и 1.2a, над данными гомоморфизмами $f: A \to A'$ и $g: C' \to C$ существуют отображения $F: X \to X'$ и $G: Y' \to Y$, причем если $F': X \to X'$ и $G': Y' \to Y$ — другие отображения того же вида, то $F \simeq F'$ и $G \simeq G'$. Следовательно, $T(F, G) \simeq T(F', G')$, а потому отображения $T(F, G)$ и $T(F', G')$ индуцируют один и тот же гомоморфизм

$$H(T(X, Y)) \longrightarrow H(T(X', Y')) \tag{1}$$

соответствующих модулей гомологий. Другими словами, гомоморфизм (1) не зависит от выбора отображений F и G, т. е. зависит только от гомоморфизмов f и g. Этот гомоморфизм мы будем обозначать символом $(RT)(f, g)$. Очевидно, что если $A = A'$, $C = C'$, а f и g — тождественные отображения, то гомоморфизм (1) является изоморфизмом. Следовательно, с точностью до естественного изоморфизма модуль гомологий $H(T(X, Y))$ не зависит от выбора резольвент X и Y; мы будем обозначать его символом $(RT)(A, C)$[1]. Модули $(RT)(A, C)$ и гомоморфизмы $(RT)(f, g)$ определяют новый (аддитивный) функтор RT, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C, значениями которого являются градуированные Λ-модули. Однородные составляющие степени n этих модулей определяют функтор R^nT, который мы будем называть *n-м правым производным функтором функтора* T. Так как комплекс $T(X, Y)$ положительно градуирован, то $R^nT = 0$ для всех $n < 0$.

Пусть X — произвольный ацикличный правый комплекс над модулем A, а Y — произвольный ацикличный левый комплекс над модулем C. Оказывается, что имеет место естественный гомоморфизм

$$H(T(X, Y)) \longrightarrow RT(A, C). \tag{2}$$

Действительно, пусть X' — инъективная резольвента модуля A, а Y' — проективная резольвента модуля C, использованные при определении модуля $RT(A, C)$. Согласно предложениям 1.1 и 1.1a, над тождественными отображениями модулей A и C существуют отображения $F: X \to X'$ и $G: Y' \to Y$. Мы определим гомоморфизм (2) как гомоморфизм, индуцированный отображением $T(F, G)$. Поскольку в силу тех же предложений 1.1 и 1.1a отображения F и G с точностью до гомотопии определяются однозначно, гомоморфизм (2) от выбора этих отображений не зависит.

Совершенно аналогично для любого инъективного правого комплекса X над модулем A и любого проективного левого комплекса Y над модулем C строится гомоморфизм

$$RT(A, C) \longrightarrow H(T(X, Y)). \tag{3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если модуль A инъективен, а модуль C проективен, то $RT(A, C) = T(A, C)$, т. е. $R^nT(A, C) = 0$ для всех $n > 0$ и $R^0T(A, C) = T(A, C)$. Если функтор T точен, то эти соотношения имеют место для любых модулей A и C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль A инъективен, то он (рассматриваемый как комплекс) является инъективной резольвентой самого себя. Аналогично, если модуль C проективен, то он является проективной резольвентой самого себя. Поэтому $RT(A, C) = H(T(A, C)) = T(A, C)$.

Предполагая теперь, что функтор T точен, рассмотрим произвольную инъективную резольвенту X модуля A и произвольную проективную резольвенту Y модуля C. Так как пополняющие отображения $\varepsilon: A \to X$ и $\mu: Y \to C$ являются отображениями комплексов, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(A, C) & \longrightarrow & H(T(X, Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(A, C) & \longrightarrow & T(H(X), H(Y)) \end{array}$$

[1] А также символом RT (A, C). — *Прим. ред.*

вертикальными отображениями которой являются определенные в § IV, 6 гомоморфизмы α'. Но отображение α' в рассматриваемом случае является изоморфизмом. Следовательно, поскольку отображения $A \to H(X)$ и $H(Y) \to C$ также являются изоморфизмами, отображение $T(A, C) \to H(T(X, Y)) = RT(A, C)$ изоморфно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если аргументами функтора T являются модули над наследственными кольцами, то $R^nT = 0$ для всех значений n, превышающих число аргументов функтора T.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся, как и выше, случаем двух аргументов. Так как для любого модуля A над наследственным кольцом существует инъективная резольвента X, для которой $X^n = 0$, если $n > 1$, и аналогично для любого модуля C над наследственным кольцом существует проективная резольвента Y, для которой $Y_n = 0$, если $n > 1$, то в комплексе $T(X, Y)$ все однородные составляющие $T^n(X, Y)$ степени $n > 2$ равны нулю. Следовательно, $R^nT = 0$, если $n > 2$.

При определении функтора RT мы для ковариантных аргументов рассматривали инъективные резольвенты, а для контравариантных — проективные. Если же для ковариантных аргументов мы возьмем проективные резольвенты, а для контравариантных — инъективные, то мы получим функтор $LT = \sum L_nT$, однородные составляющие L_nT которого называются *n-ми левыми производными функторами функтора T*. Если $n < 0$, то $L_nT = 0$ (чтобы избежать отрицательных чисел, мы пишем здесь индексы внизу).

Как и выше, для любого ацикличного левого комплекса X над модулем A и любого ацикличного правого комплекса Y над модулем C определен естественный гомоморфизм

$$LT(A, C) \longrightarrow H(T(X, Y)). \tag{2a}$$

Аналогично для любого проективного левого комплекса X над модулем A и любого инъективного правого комплекса Y над модулем C определен естественный гомоморфизм

$$H(T(X, Y)) \longrightarrow LT(A, C). \tag{3a}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1a. *Если модуль A проективен, а модуль C инъективен, то $LT(A, C) = T(A, C)$, т. е. $L_nT(A, C) = 0$ для всех $n > 0$ и $L_0T(A, C) = T(A, C)$. Если функтор T точен, то эти соотношения имеют место для любых модулей A и C.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2a. *Если аргументами функтора T являются модули над наследственными кольцами, то $L_nT = 0$ для всех значений n, превышающих число аргументов функтора T.*

4. СВЯЗЫВАЮЩИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пусть $T(A, C)$ — такой же, как и в § 3, функтор, и пусть

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

произвольная точная последовательность. Согласно предложению 2.2[1]), существует точная последовательность комплексов

(2) $$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0,$$

являющаяся инъективной резольвентой последовательности (1). Так как ограничиваясь в последовательности (2) однородными составляющими некоторой данной степени, мы получаем расщепляющуюся последовательность модулей, то для любой проективной резольвенты Y некоторого модуля C имеет место точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow T(X', Y) \longrightarrow T(X, Y) \longrightarrow T(X'', Y) \longrightarrow 0.$$

Поэтому для любого n определен связывающий гомоморфизм

$$H^n(T(X'', Y)) \longrightarrow H^{n+1}(T(X', Y)),$$

который можно рассматривать как гомоморфизм

(3) $$R^nT(A'', C) \longrightarrow R^{n+1}T(A', C).$$

Тот факт, что гомоморфизм (3) не зависит от выбора резольвенты (2), непосредственно следует из предложения 2.3.

Аналогично определяются связывающие гомоморфизмы

(4) $$R^nT(A, C') \longrightarrow R^{n+1}T(A, C'')$$

для любой точной последовательности

(5) $$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любых коммутативных диаграмм*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1' & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1' & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_1'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R^n T(A'', C) & \longrightarrow & R^{n+1} T(A', C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n T(A_1'', C) & \longrightarrow & R^{n+1} T(A_1', C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R^n T(A, C') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A, C'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n T(A, C_1') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A, C_1'') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R^n T(A'', C) & \longrightarrow & R^{n+1} T(A', C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n T(A'', C_1) & \longrightarrow & R^{n+1} T(A', C_1) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R^n T(A, C') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A, C'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n T(A_1, C') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A_1, C'') \end{array}$$

[1]) Здесь (как и всюду в дальнейшем при рассмотрении правых комплексов) под ссылкой на некоторое предложение из § 2 нужно понимать ссылку на аналог этого предложения для правых комплексов. — *Прим. перев.*

антикоммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R^n T(A'', C') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A', C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{n+1} T(A'', C'') & \longrightarrow & R^{n+2} T(A', C'') \end{array}$$

и точные последовательности

(6) $\ldots \to R^nT(A', C) \to R^nT(A, C) \to R^nT(A'', C) \to R^{n+1}T(A', C) \to \ldots,$

(7) $\ldots \to R^nT(A, C'') \to R^nT(A, C) \to R^nT(A, C') \to R^{n+1}T(A, C'') \to \ldots.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность первых четырех диаграмм непосредственно следует из определений и предложения 2.3. Точность последовательностей (6) и (7) вытекает из того, что они являются гомологическими последовательностями соответствующих точных последовательностей комплексов. Таким образом, доказательства требует лишь антикоммутативность пятой диаграммы.

Пусть $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ — инъективная резольвента точной последовательности (1) и $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ — проективная резольвента точной последовательности (5). Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(X', Y'') & \longrightarrow & T(X, Y'') & \longrightarrow & T(X'', Y'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(X', Y) & \longrightarrow & T(X, Y) & \longrightarrow & T(X'', Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(X', Y') & \longrightarrow & T(X, Y') & \longrightarrow & T(X'', Y') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

и, следовательно, согласно предложению IV, 2.1, антикоммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(T(X'', Y')) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(X', Y')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n+1}(T(X'', Y'')) & \longrightarrow & H^{n+2}(T(X', Y'')) \end{array}$$

Остается заметить, что последняя диаграмма отличается лишь обозначениями от указанной в теореме.

Из предложения 4.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Функтор R^0T точен слева. Если $R^{n+1}T = 0$, то функтор R^nT точен справа.*

Для левых производных функторов вместо гомоморфизмов (3) и (4) имеют место гомоморфизмы

(3a) $$L_nT(A'', C) \longrightarrow L_{n-1}T(A', C),$$

(4a) $$L_nT(A, C') \longrightarrow L_{n-1}T(A, C'').$$

8 № 1074

Предложение 4.1 и следствие 4.2 остаются справедливыми и для левых производных функторов (после очевидных формальных изменений).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для любого инъективного правого комплекса X над модулем A и любой точной последовательности $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ проективных левых комплексов над точной последовательностью модулей $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ имеют место точная последовательность $0 \to T(X, Y'') \to T(X, Y) \to T(X, Y') \to 0$ и коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} R^n T(A, C') & \longrightarrow & R^{n+1} T(A, C'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(T(X, Y')) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(X, Y'')) \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого n последовательность $0 \to Y'_n \to Y_n \to Y''_n \to 0$ расщепляема, то последовательность $0 \to T(X, Y'') \to T(X, Y) \to T(X, Y') \to 0$ точна. Пусть далее $0 \to Z' \to \to Z \to Z'' \to 0$ — проективная резольвента последовательности $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$. Согласно предложению 2.3, над соответствующими тождественными отображениями существуют такие отображения F', F и F'', что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Коммутативность указанной в теореме диаграммы вытекает отсюда непосредственно.

Предложение 4.3 является лишь одним из серии аналогичных предложений, относящихся к ковариантным аргументам (вместо контравариантных) или к левым комплексам (вместо правых). Мы предоставляем читателю в качестве упражнения сформулировать и доказать несколько таких предложений.

Функторы $RT = \{R^nT\}$ и $LT = \{L_nT\}$ являются примерами так называемых многократно связанных последовательностей функторов. Для того чтобы сформулировать определение этого понятия в общем виде, рассмотрим произвольную последовательность $\{T^n\}$ функторов одних и тех же аргументов, причем по любому аргументу эти функторы либо все контравариантны, либо все ковариантны. Если для каждого аргумента заданы такие связывающие гомоморфизмы, что 1) относительно каждого аргумента последовательность $\{T^n\}$ является связанной последовательностью функторов и 2) в условиях предложения 4.1 имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'', C) & \longrightarrow & T^{n+1}(A', C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(A'', C_1) & \longrightarrow & T^{n+1}(A', C_1) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^n(A, C') & \longrightarrow & T^{n+1}(A, C'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(A_1, C') & \longrightarrow & T^{n+1}(A_1, C'') \end{array}$$

то последовательность $\{T^n\}$, рассматриваемую вместе с заданными связывающими гомоморфизмами, мы будем называть *многократно* *связанной последовательностью функторов.* Никакого соотношения антикоммутативности, относящегося к связывающим гомоморфизмам для различных аргументов, при этом не постулируется. Многократно связанная последовательность функторов называется *точной*, если относительно любого аргумента имеют место точные последовательности, аналогичные последовательностям (6) и (7).

Гомоморфизмом $\Phi : \{T^n\} \to \{U^n\}$ многократно связанной последовательности функторов $\{T^n\}$ в многократно связанную последовательность функторов $\{U^n\}$ называется последовательность естественных отображений $\Phi^n : T^n \to U^n$, перестановочных со связывающими гомоморфизмами.

Пусть, например, $\varphi : T \to U$ — произвольное естественное отображение функторов. Соответствующий этому отображению гомоморфизм $T(X, Y) \to U(X, Y)$, где X и Y — резольвенты некоторых модулей A и C, индуцирует гомоморфизмы модулей гомологий $R^nT(A, C) \to R^nU(A, C)$, перестановочные, очевидно, со связывающими гомоморфизмами, т. е. определяющие некоторый гомоморфизм $\{R^nT\} \to \{R^nU\}$. Аналогичное обстоятельство имеет место и для левых производных функторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4 (Критерий изоморфизма). *Пусть* $\Phi : \{T^n\} \to \{U^n\}$ *— такой гомоморфизм точных многократно связанных последовательностей функторов, что отображение* $\Phi^0 : T^0 \to U^0$ *является естественной эквивалентностью.*

Тогда, если для любого $n > 0$ *отображение*

$$T^n(A_1, \ldots, A_p) \longrightarrow U^n(A_1, \ldots, A_p) \tag{8}$$

изоморфно, когда значениями всех ковариантных аргументов являются инъективные, а всех контравариантных — проективные модули, то для любого $n > 0$ *отображение* (8) *является изоморфизмом при любых значениях аргументов.*

Аналогично, если для всех $n < 0$ *отображение* (8) *изоморфно, когда значениями всех ковариантных аргументов являются проективные, а всех контравариантных — инъективные модули, то для любого* $n < 0$ *отображение* (8) *является изоморфизмом при любых значениях аргументов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $n > 0$. Пусть p — число аргументов функторов T^n и U^n. Сначала мы рассмотрим случай, когда $p = 1$. Пусть функторы T^n и U^n контравариантны, и пусть для любого i, подчиненного неравенствам $0 \leq i < n$, уже доказано, что отображения $\Phi^i : T^i \to U^i$ являются изоморфизмами. Произвольно выбрав точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с проективным модулем P, построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
T^{n-1}(P) & \longrightarrow & T^{n-1}(M) & \longrightarrow & T^n(A) & \longrightarrow & T^n(P) & \longrightarrow & T^n(M) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_5} \\
U^{n-1}(P) & \longrightarrow & U^{n-1}(M) & \longrightarrow & U^n(A) & \longrightarrow & U^n(P) & \longrightarrow & U^n(M)
\end{array}$$

с точными строками. Так как отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ являются изоморфизмами, то в силу предложения I, 1.1 («лемма о пяти гомоморфизмах») отображение φ_3 является мономорфизмом. Так как это верно для любого модуля A, то отображение φ_5 также является мономорфизмом. Следовательно, в силу той же леммы о пяти гомоморфизмах отображение φ_3 является изоморфизмом.

Для случая ковариантного аргумента A доказательство проводится аналогично, причем используется точная последовательность $0 \to A \to Q \to N \to 0$ с инъективным модулем Q.

Предполагая теперь, что предложение уже доказано для любых функторов с числом аргументов, не превышающим $p-1$, рассмотрим функторы T^n и U^n от p аргументов ; для определенности предположим, что по последнему аргументу эти функторы контравариантны. Подставляя вместо последнего аргумента A_p фиксированный проективный модуль, мы можем рассматривать функторы T^n и U^n как функторы $p-1$ аргументов. По предположению индукции в этом случае отображение (8) будет изоморфизмом при любых значениях остальных аргументов $A_1, \ldots, A_{p-1}$. Теперь, фиксируя аргументы $A_1, \ldots, A_{p-1}$, мы можем рассматривать функторы T^n и U^n как функторы одного аргумента A_p. Так как для этих функторов отображение (8) является изоморфизмом всякий раз, когда значением аргумента A_p является проективный модуль, то тем самым общий случай сведен к уже рассмотренному случаю $p=1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Для любой точной многократно связанной последовательности функторов $\{T^n\}$ связывающие гомоморфизмы, соответствующие расщепляемой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем, в рассматриваемом случае отображение $T^n(A) \to T^n(A'')$ является эпиморфизмом, а отображение $T^{n+1}(A') \to T^{n+1}(A)$ — мономорфизмом (аргумент A мы предполагаем ковариантным и опускаем все остальные аргументы). Следовательно, связывающий гомоморфизм $T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$ равен нулю.

5. ФУНКТОРЫ R^0T И L_0T

Пусть X — инъективная резольвента модуля A, Y — проективная резольвента модуля C и

$$T(A, C) \longrightarrow T(X, Y)$$

— отображение, индуцированное пополняющими отображениями $A \to X$ и $Y \to C$ (модули A, C и $T(A, C)$ рассматриваются как комплексы, состоящие лишь из однородных элементов нулевой степени). Эти отображения определяют, очевидно, естественное отображение функторов

$$\tau^0 : T \longrightarrow R^0T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Отображение τ^0 тогда и только тогда является естественной эквивалентностью, когда функтор T точен слева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 4.2, функтор R^0T точен слева; следовательно, если τ^0 является естественной эквивалентностью, то функтор T тоже точен слева. Обратно, если функтор T точен слева, то, согласно предложению II, 4.3а, имеет место точная последовательность

$$0 \to T(A, C) \longrightarrow T(X^0, Y_0) \longrightarrow T(X^1, Y_0) + T(X^0, Y_1).$$

С другой стороны, ядро последнего гомоморфизма этой последовательности совпадает с модулем гомологий $H^0(T(X, Y)) = R^0T(A, C)$. Следовательно, отображение τ^0 является изоморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Точный слева функтор T тогда и только тогда точен, когда $R^1T = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функтор T точен, то, согласно предложению 3.1, $R^1T = 0$. Обратно, если $R^1T = 0$, то, согласно следствию 4.2, функтор R^0T, а потому, в силу предложения 5.1, и функтор T является точным функтором.

ТЕОРЕМА 5.3. *Для всех $n \geq 0$ естественные отображения $R^n\tau^0 : R^nT \to R^nR^0T$, индуцированные естественным отображением $\tau^0 : T \to R^0T$, являются естественными эквивалентностями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Очевидно, что отображение $R^0\tau^0$ совпадает с отображением $\tau^0 : R^0T \to$ $\to R^0(R^0T)$. Следовательно, поскольку функтор R^0T точен слева, это отображение, согласно предложению 5.1, является естественной эквивалентностью. Остается заметить, что к отображению $R^n\tau^0$ многократно связанных последовательностей функторов применимо предложение 4.4, поскольку, согласно предложению 3.1, функторы R^nR^0T и R^nT при любом $n > 0$ равны нулю, когда значениями их риантных аргументов являются инъективные, а контраковариантных — проективные модули.

Для любой проективной резольвенты X модуля A и любой инъективной резольвенты Y модуля C пополняющие отображения $X \to A$ и $C \to Y$ индуцируют некоторое отображение $T(X, Y) \to T(A, C)$. Тем самым определяется некоторое естественное отображение

$$\sigma_0 : L_0T \to T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1а. *Отображение σ_0 тогда и только тогда является эквивалентностью, когда функтор T точен справа.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2а. *Точный справа функтор T тогда и только тогда точен, когда $L_1T = 0$.*

ТЕОРЕМА 5.3а. *Для всех $n \geq 0$ естественные отображения $L_n\sigma_0 : L_nL_0T \to L_nT$, индуцированные естественным отображением $\sigma_0 : L_0T \to T$, являются естественными эквивалентностями.*

Теорема 5.3 показывает, что правые производные функторы по существу интересны лишь для точных слева функторов, ибо функтор R^nT всегда можно заменить функтором R^nT', где $T' = R^0T$ — точный слева функтор.

Аналогично левые производные функторы интересны главным образом лишь для точных справа функторов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функтор T рассматривать как связанную последовательность, все функторы которой, кроме функтора $T^0 = T$, равны нулю, то естественные отображения τ^0 и σ_0 будут гомоморфизмами связанных последовательностей[1]

$$LT \xrightarrow{\sigma_0} T \xrightarrow{\tau^0} RT.$$

6. СРАВНЕНИЕ С САТЕЛЛИТАМИ

В этом параграфе мы будем рассматривать функторы лишь одного аргумента.

---

[1] Утверждение, что τ^0 является гомоморфизмом связанных последовательностей функторов, означает, в частности, что для любой точной последовательности

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

композиция отображения

$$\tau^0(A'', C) : T(A'', C) \to R^0T(A'', C)$$

со связывающим гомоморфизмом

$$R^0T(A'', C) \to R^1T(A', C)$$

равна нулю. Однако это в общем случае неверно. Действительно, согласно предложению 5.1, для точного слева функтора Hom отображение τ^0 является изоморфизмом. В то же время, как указано в § VIII, 2, точная последовательность VIII, 1, (6а), построенная для алгебры $\Lambda = (K, d)$ двойных чисел, совпадает со второй точной последовательностью, указанной в теореме IV, 1.1. Поэтому для опровержения сформулированного выше утверждения достаточно построить точную последовательность

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

дифференциальных модулей, для которой в точной последовательности

$$0 \to Z(A') \to Z(A) \to Z(A'')$$

последнее отображение не эпиморфно. Пусть $A_1 + A_2 + A_3$ — прямая сумма трех экземпляров одного и того же K-модуля A. Определим в этой прямой сумме дифференциал d, полагая $d(a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, 0)$. Очевидно, что точная последовательность естественных отображений

$$0 \to A_2 \to A_1 + A_2 + A_3 \to A_1 + A_3 \to 0,$$

где модули A_2 и $A_1 + A_3$ снабжены нулевыми дифференциалами, является точной последовательностью дифференциальных модулей. В соответствующей точной последовательности ядер

$$0 \to A_2 \to A_2 + A_3 \to A_1 + A_3$$

последний гомоморфизм не является, очевидно, эпиморфизмом.

Утверждение авторов верно только тогда, когда отображение $T(A, C) \to T(A'', C)$ эпиморфно, т. е. когда функтор T перерабатывает эпиморфные отображения ковариантных аргументов снова в эпиморфные. Кроме того, функтор T должен перерабатывать в эпиморфизмы любые мономорфизмы контравариантных аргументов. Этим условиям удовлетворяют, в частности, точные справа функторы.

Соответствующие замечания можно сделать, конечно, и в отношении гомоморфизма σ_0. — *Прим. ред.*

ТЕОРЕМА 6.1. *Естественные отображения*

$$\sigma_0 : L_0T \longrightarrow T, \quad \tau^0 : T \longrightarrow R^0T$$

единственным образом продолжаются до отображений

$$\sigma_n : L_nT \longrightarrow S_nT, \quad \tau^n : S^nT \longrightarrow R^nT$$

связанных последовательностей функторов. Если функтор T точен справа, то отображения σ_n являются изоморфизмами. Если функтор T точен слева, то изоморфизмами являются отображения τ^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность отображений σ_n и τ^n непосредственно следуют из предложения III, 5.2. Если функтор T точен справа, то, согласно предложению 5.1a, отображение σ_0 является изоморфизмом и, следовательно, в силу предложения 4.4 изоморфизмами будут и все отображения σ_n. Те же соображения применимы и к случаю точного слева функтора T.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если кольцо Λ наследственно, то для любого $n \geq 1$ естественные отображения σ_n и τ^n являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $L_nT = 0 = S_nT$ и, аналогично, $S^nT = 0 = R^nT$ для любого $n \geq 2$. Для определенности предположим, что функтор T ковариантен. Так как каждый модуль A над наследственным кольцом Λ обладает проективной резольвентой вида

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

то $L_nT(A) = 0$, если $n \geq 2$. С другой стороны,

$$S_nT(A) = \operatorname{Ker}(S_{n-1}T(X_1) \longrightarrow S_{n-1}T(X_0)),$$

причем ввиду проективности модуля X_1 для любого $n \geq 2$ имеет место равенство $S_{n-1}T(X_1) = 0$. Остальные случаи разбираются аналогично. Таким образом, по существу нужно только доказать, что изоморфизмами являются отображения

$$\sigma_1 : L_1T \longrightarrow S_1T \text{ и } \tau^1 : S^1T \longrightarrow R^1T.$$

Мы докажем это для отображения σ_1 в предположении, что функтор T ковариантен.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_1L_0T & \xrightarrow{\alpha} & S_1L_0T \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ L_1T & \xrightarrow{\sigma_1} & S_1T \end{array}$$

в которой отображения β и γ индуцированы отображением $\sigma_0 : L_0T \to T$, а α представляет собой естественное отображение σ_1, построенное для функтора L_0T. Согласно следствию 4.2, функтор L_0T точен справа. Поэтому в силу теоремы 6.1 отображение α является изоморфизмом. Согласно предложению 5.3a, отображение β также является изоморфизмом. Таким образом, для доказательства изоморфности отображения σ_1 достаточно показать, что изоморфизмом является отображение γ. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_1 L_0 T(A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & L_0 T(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & L_0 T(X_0) \arrow[d, "v"] \\
0 \arrow[r] & S_1 T(A) \arrow[r] & T(X_1) \arrow[r] & T(X_0)
\end{tikzcd}$$

Так как модули X_1 и X_0 проективны, то, согласно предложению 3.1a, отображения u, v, а следовательно, и отображение γ являются изоморфизмами. Тем самым предложение 6.2 полностью доказано[1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Для любого функтора T и любого n*

$$R^n S^1 T = 0, \quad L_n S_1 T = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая функтор T ковариантным, рассмотрим произвольную инъективную резольвенту X модуля A. Очевидно, что $R^n S^1 T(A) = H^n(S^1 T(X))$. Но так как модули X^n инъективны, то $S^1 T(X^n) = 0$ для любого n и потому $R^n S^1 T = 0$. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

7. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Здесь будет доказано несколько предложений, полезных при вычислении производных функторов и связывающих гомоморфизмов. Естественно, что число таких предложений можно было бы пополнить, но мы ограничимся лишь теми случаями, которые нам понадобятся в дальнейшем. Рассмотрение других возможных случаев мы оставляем читателю.

Пусть X — произвольная проективная резольвента модуля A. Для любого $i > 0$ мы положим $A^{(i)} = \operatorname{Im}(X_i \to X_{i-1})$. Тогда имеют место следующие точные последовательности:

(1) $$0 \longrightarrow A^{(i)} \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

(2) $$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_i \longrightarrow A^{(i)} \longrightarrow 0.$$

После соответствующего изменения индексов последовательность (2) можно рассматривать как проективную резольвенту $X^{(i)}$ модуля $A^{(i)}$, пополняющее отображение $\varepsilon^{(i)}: X_i \to A^{(i)}$ которой индуцируется отображением $X_i \to X_{i-1}$. Естественное отображение

(3) $$X \longrightarrow X^{(i)},$$

[1] Если принять за последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$, с помощью которой определяется функтор $S_1 T$ (см. § III, 1), проективную резольвенту $0 \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$, то модуль $S_1 T(A)$ совпадает с модулем $L_1 T(A)$, а отображение σ_1 будет тождественным отображением. По сравнению с этими соображениями изложенное в тексте доказательство (формально более сложное) имеет преимущество инвариантности. — *Прим. ред.*

при котором однородная составляющая X_n градуированного модуля X для любого $n \geq i$ тождественно отображается на соответствующую однородную составляющую градуированного модуля $X^{(i)}$, а для любого $n < i$ переходит в нуль, имеет степень i и перестановочно с дифференциальными операторами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Для любого контравариантного функтора T одного аргумента итерированный связывающий гомоморфизм*

$$\delta : R^n T(A^{(i)}) \longrightarrow R^{n+i} T(A),$$

соответствующий точной последовательности (1), *и гомоморфизм*

$$\gamma : R^n T(A^{(i)}) \longrightarrow R^{n+i} T(A),$$

индуцированный отображением (3), *связаны соотношением*

$$\delta = (-1)^t \gamma, \quad \text{где} \quad t = ni + \frac{i(i+1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала в справедливости нашего утверждения для $i = 1$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & X_{n+2} + X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1} + X_n \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^{(1)}"] & X_1 + X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{(1)} \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

т. е. проективную резольвенту

$$0 \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0^{1)}$$

точной последовательности

$$0 \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Горизонтальные отображения этой диаграммы определяются формулами

$$x_{n+1} \longrightarrow (x_{n+1}, 0), \quad (x_{n+1}, x_n) \longrightarrow x_n, \qquad n \geq 0, \ x_{n+1} \in X_{n+1}, \ x_n \in X_n,$$

[1)] Однородными составляющими комплексов $X^{(1)}$ и Y являются модули $X_n^{(1)} = X_{n-1}$ и $Y_n = X_{n-1} + X_n$ соответственно. — *Прим. ред.*

а вертикальные отображения в среднем столбце диаграммы (т. е. в комплексе Y) — формулами

$$(x_{n+2}, x_{n+1}) \longrightarrow (dx_{n+2} + (-1)^{n+1} x_{n+1}, dx_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$
$$\eta(x_1, x_0) = dx_1 + x_0.$$

Применяя к этой диаграмме функтор T (при этом все стрелки в диаграмме изменят свои направления на противоположные), нетрудно убедиться[1], что связывающий гомоморфизм $H^n(T(X^{(1)})) \to H^{n+1}(T(X))$ отличается от гомоморфизма $H^n(T(X^{(1)})) \to H^{n+1}(T(X))$, индуцированного отображением $X \to X^{(1)}$, лишь знаком $(-1)^{n+1}$. Тем самым для $i = 1$ предложение доказано.

Общий случай легко сводится к рассмотренному индукцией по числу i. Связывающий гомоморфизм δ и гомоморфизм γ можно представить в виде сквозных отображений

$$R^n T(A^{(i)}) \underset{\gamma'}{\overset{\delta'}{\longrightarrow}} R^{n+i-1} T(A^{(1)}) \underset{\gamma''}{\overset{\delta''}{\longrightarrow}} R^{n+i} T(A), \qquad i > 1,$$

но ввиду доказанного выше и по индуктивному предположению

$$\delta' = (-1)^{t'}\gamma', \quad \delta'' = (-1)^{n+i}\gamma'', \quad t' = n(i-1) + \frac{(i-1)i}{2},$$

откуда и вытекает требуемый результат.

---

[1] Рассмотрим отображения

$$i_1 : X_{n+1} \longrightarrow Y_n, \quad p_1 : Y_n \longrightarrow X_{n+1}, \quad p_2 : Y_n \longrightarrow X_n,$$

заданные формулами

$$i_1 x_{n+1} = (x_{n+1}, 0), \quad p_1(x_{n+1}, x_n) = x_{n+1}, \qquad x_{n+1} \in X_{n+1}, \; x_n \in X_n,$$
$$p_2(x_{n+1}, x_n) = x_n.$$

В частности, i_1 и p_2 — горизонтальные отображения указанной в тексте диаграммы. Очевидно, что вертикальные отображения d (т. е. дифференциалы рассматриваемых резольвент) удовлетворяют соотношению

$$p_1 d = dp_1 + (-1)^{n+1} p_2.$$

Применяя к этому соотношению функтор T, получим, что

$$(*) \qquad T(d)\, T(p_1) = T(p_1)\, T(d) + (-1)^{n+1}\, T(p_2)$$

(напомним, что функтор T предполагается аддитивным).

Пусть теперь z — такой элемент модуля $T(X_{n+1})$, что $T(d)z = 0$. Так как отображение $p_1 i_1$ тождественно, то $z = T(i_1)\, T(p_1)\, z$. С другой стороны, ввиду соотношения $(*)$ и условия $T(d)\, z = 0$,

$$T(d)\, T(p_1)\, z = (-1)^{n+1}\, T(p_2)\, z.$$

Вспоминая определение связывающего гомоморфизма, мы видим, следовательно, что гомоморфизм $H^n(T(X^{(1)})) \to H^{n+1}(T(X))$ индуцируется соответствием

$$z \longrightarrow (-1)^{n+1} z.$$

Высказанное в тексте утверждение следует отсюда непосредственно. — *Прим. ред.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Для любого ковариантного функтора T одного аргумента итерированный связывающий гомоморфизм, соответствующий некоторой точной последовательности*

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \qquad n > 0,$$

с проективными модулями $X_{n-1}, \ldots, X_0$, определяет для любого $p > 0$ изоморфизм

$$L_{p+n}T(A) \approx L_pT(X_n),$$

а для $p = 0$ — точную последовательность

$$0 \longrightarrow L_nT(A) \longrightarrow L_0T(X_n) \longrightarrow L_0T(X_{n-1}).$$

Аналогично для любого контравариантного функтора T при $p > 0$ имеет место изоморфизм

$$R^pT(X_n) \approx R^{p+n}T(A),$$

а при $p = 0$ — точная последовательность

$$R^0T(X_{n-1}) \longrightarrow R^0T(X_n) \longrightarrow R^nT(A) \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ предложение непосредственно следует из точности связанных последовательностей производных функторов. Для $n > 1$ точную последовательность (4) следует разбить на две точные последовательности $0 \to X_n \to X_{n-1} \to X'_{n-1} \to 0$ и $0 \to X'_{n-1} \to \ldots \to X_0 \to A \to 0$ и применить доказываемое предложение к каждой из этих последовательностей в отдельности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Пусть X — ацикличный левый комплекс над модулем A и Y — ацикличный правый комплекс над модулем C, определяемые соответственно точными последовательностями*

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y^n \longrightarrow 0,$$

в первой из которых модули $X_{n-1}, \ldots, X_0$ проективны, а во второй модули $Y^{n-1}, \ldots, Y^0$ инъективны. Тогда для любого точного слева функтора $T(A, C)$, контравариантного по аргументу A и ковариантного по аргументу C, естественный гомоморфизм

$$H^k(T(X, Y)) \longrightarrow R^kT(A, C)$$

[*см. формулу* V, 3, (2)] *является при $k \leq n$ изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{X}$ — проективная резольвента модуля A, однородными составляющими $\overline{X}_k$ которой при $k < n$ являются проективные модули X_k, и пусть $\overline{Y}$ — инъективная резольвента модуля C, однородными составляющими $\overline{Y}^k$ которой при $k < n$ являются инъективные модули Y^k. Тогда имеют место точные последовательности

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow Y \longrightarrow \overline{Y} \longrightarrow Y' \longrightarrow 0,$$

где X' и Y' — ацикличные комплексы, для которых $X'_k = 0 = Y'^k$ при $k < n$.

Поскольку функтор T точен слева, в силу предложения II, 4.3а имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow T(X, Y) \longrightarrow T(\bar{X}, \bar{Y}) \longrightarrow T(X', \bar{Y}) + T(\bar{X}, Y').$$

Следовательно, обозначая через N коядро гомоморфизма $T(X, Y) \to T(\bar{X}, \bar{Y})$, мы получим точные последовательности

$$0 \longrightarrow T(X, Y) \longrightarrow T(\bar{X}, \bar{Y}) \longrightarrow N \longrightarrow 0, \tag{5}$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow T(X', \bar{Y}) + T(\bar{X}, Y'). \tag{6}$$

Из точности гомологической последовательности, соответствующей последовательности (5), вытекает, что для доказательства предложения, т. е. для доказательства изоморфности отображений $H^k(T(X, Y)) \to H^k(T(\bar{X}, \bar{Y}))$ при $k \leq n$, достаточно показать, что $H^k(N) = 0$ при $k \leq n$. Но при $k < n$ равенство $H^k(N) = 0$ очевидно, так как комплекс N не имеет отличных от нуля однородных элементов степеней $< n$. Для доказательства же равенства $H^n(N) = 0$ достаточно убедиться, что дифференциал $N^n \to N^{n+1}$ является мономорфизмом, т. е. ввиду точности последовательности (6) достаточно убедиться, что мономорфизмом является дифференциал $Z^n \to Z^{n+1}$ комплекса $Z = T(X', \bar{Y}) + T(\bar{X}, Y')$. Но поскольку однородной составляющей степени n комплекса Z служит модуль $T(X'_n, \bar{Y}^0) + T(\bar{X}_0, Y'^n)$, последнее утверждение непосредственно следует из точности последовательностей

$$0 \longrightarrow T(X'_n, \bar{Y}^0) \longrightarrow T(X'_{n+1}, \bar{Y}^0), \qquad 0 \longrightarrow T(\bar{X}_0, Y'^n) \longrightarrow T(\bar{X}_0, Y'^{n+1}),$$

вытекающей из точности последовательностей $X'_{n+1} \to X'_n \to 0$ и $0 \to Y'^n \to Y'^{n+1}$ и точности слева функтора T.

8. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

Пусть T — функтор p аргументов, по одним из которых он ковариантен, а по другим — контравариантен, и пусть s — некоторое подмножество множества $\{1, \ldots, p\}$. Аргументы функтора T, индексы которых принадлежат подмножеству s, мы назовем *активными*, а остальные аргументы — *пассивными*. Фиксируя значения всех пассивных аргументов, мы получим некоторый функтор T_s. Соответствующие правые производные функторы R^nT_s являются модулями гомологий комплекса, получающегося при подстановке в функтор T вместо ковариантных и контравариантных активных аргументов соответственно их инъективных и проективных резольвент, причем все пассивные аргументы остаются без изменений. Мы будем называть эти функторы *правыми частными производными функторами* и будем обозначать их через R^n_sT. Функторы R^n_sT мы рассматриваем как функторы всех p аргументов, как активных, так и пассивных.

Указанный в формуле 3, (2) гомоморфизм определяет, очевидно, естественные отображения

$$(1) \qquad R_s^n T \longrightarrow R^n T,$$

перестановочные со связывающими гомоморфизмами, соответствующими каждому активному аргументу.

ТЕОРЕМА 8.1. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *естественное отображение* (1) *является изоморфизмом для любого* $n \geq 0$;

(b) *если значениями всех ковариантных активных аргументов функтора* T *являются инъективные, а всех контравариантных — проективные модули, то функтор* T *является точным функтором пассивных аргументов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Если значениями всех активных аргументов функтора T являются модули, указанные в формулировке свойства (b), то, согласно предложению 3.1, $R_s^n T = 0$, когда $n > 0$, и $T \approx R_s^0 T$. Поэтому, если функтор T удовлетворяет условию (a), то $R^n T = 0$, когда $n > 0$, и $T \approx R^0 T$. Следовательно, T является точным функтором пассивных аргументов[1]).

(b) $\Rightarrow$ (a). Докажем сначала, что отображение $R_s^0 T \to R^0 T$ является изоморфизмом. Для простоты мы все активные аргументы функтора T обозначим одной буквой A, а все пассивные аргументы — одной буквой C; через X обозначим систему резольвент всех активных аргументов, а через Y — систему резольвент всех пассивных аргументов (для ковариантных аргументов резольвенты инъективны, а для контравариантных — проективны). Тогда $T(X, Y)$ можно рассматривать как двойной комплекс[2]) над модулем $T(A, C)$, дифференциальные операторы d_1 и d_2 которого определяются, исходя из систем резольвент X и Y соответственно. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T^0(X, C) & \xrightarrow{\varepsilon_2^0} & T^{0,0}(X, Y) & \xrightarrow{c_2^{0,0}} & T^{0,1}(X, Y) \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_1^0} & & \downarrow{\scriptstyle d_1^{0,0}} & & \\ 0 & \longrightarrow & T^1(X, C) & \xrightarrow{\varepsilon_2^1} & T^{1,0}(X, Y) & & \end{array}$$

Из условия (b) вытекает, что строки этой диаграммы точны. Следовательно, отображение ε_2^0 индуцирует изоморфизм

$$R_s^0 T(A, C) = \operatorname{Ker}(d_1^0) \approx \operatorname{Ker}(d_2^{0,0}) \cap \operatorname{Ker}(d_1^{0,0}) = R^0 T(A, C).$$

Остается доказать, что отображения $R_s^n T \to R^n T$ являются изоморфизмами и при $n > 0$. С этой целью мы рассмотрим последова-

---

[1]) Согласно предложениям 5.1 и 5.2, указанное в предложении 3.1 необходимое условие точности функтора T ($R^n T = 0$ для всех $n > 0$ и $R^0 T = T$) также и достаточно. — *Прим. перев.*

[2]) Понятие двойного комплекса над модулем определяется аналогично понятию одинарного комплекса над модулем (см. в § XVII, 1 общее определение двойного комплекса над одинарным комплексом). — *Прим. ред.*

тельности $\{R^nT\}$ и $\{R_s^nT\}$ как многократно связанные последовательности функторов от активных аргументов. Если $n > 0$, то R^nT и R_s^nT равны нулю, как только значениями всех ковариантных (контравариантных) активных аргументов являются инъективные (соответственно проективные) модули. Поэтому из критерия 4.4 вытекает, что все отображения (1) действительно являются изоморфизмами.

Другое доказательство импликации (b) $\Rightarrow$ (a) см. в упражнении 6.

Пусть теперь t — некоторое подмножество множества $\{1, \ldots, p\}$, содержащее подмножество s. Тогда каждое из отображений (1) можно разложить в композицию отображений

$$R_s^nT \longrightarrow R_t^nT \longrightarrow R^nT. \tag{2}$$

Если отображения (1) являются изоморфизмами, то, как следует из теоремы 8.1, изоморфизмами будут и отображения $R_s^nT \to R_t^nT$ и $R_t^nT \to R^nT$.

Для функторов R_s^nT связывающие гомоморфизмы относительно пассивных аргументов, вообще говоря, не определены. Однако, если выполняются условия теоремы 8.1, то естественные отображения (1) являются изоморфизмами, и мы можем определить связывающие гомоморфизмы для функторов R_s^nT, используя связывающие гомоморфизмы для функторов R^nT. Конечно, связывающие гомоморфизмы можно (при выполнении указанных условий) определить и непосредственно. При этом достаточно, ввиду разложения (2), рассмотреть случай, когда пассивен только один аргумент. Для определенности предположим, что единственный пассивный аргумент A ковариантен. Остальные (активные) ковариантные аргументы мы обозначим через A', а контравариантные (активные) аргументы — через C. Пусть $0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$ — произвольная точная последовательность модулей, X' — система инъективных резольвент аргументов из A' и Y — система проективных резольвент аргументов из C. Тогда в силу свойства (b) из теоремы 8.1 последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow T(A_1, X', Y) \longrightarrow T(A, X', Y) \longrightarrow T(A_2, X', Y) \longrightarrow 0$$

является точной последовательностью и, следовательно, определяет связывающий гомоморфизм

$$R_s^nT(A_2, A', C) \to R_s^{n+1}T(A_1, A', C).$$

Теперь остается только показать, что этот гомоморфизм совпадает со связывающим гомоморфизмом, получающимся из соответствующего связывающего гомоморфизма для функторов R^nT с помощью изоморфизма (1). С этой целью рассмотрим произвольную инъективную резольвенту $0 \to X_1 \to X \to X_2 \to 0$ точной последовательности $0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$ (см. предложение 2.2)[1] и соответствую-

[1] См. также сноску на стр. 112. — *Прим. перев.*

щую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T(A_1, X', Y) & \longrightarrow & T(A, X', Y) & \longrightarrow & T(A_2, X', Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(X_1, X', Y) & \longrightarrow & T(X, X', Y) & \longrightarrow & T(X_2, X', Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками.

Переходя к модулям гомологий, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R_s^n T(A_2, A', C) & \longrightarrow & R_s^{n+1} T(A_1, A', C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n T(A_2, A', C) & \longrightarrow & R^{n+1} T(A_1, A', C) \end{array}$$

что и доказывает наше утверждение.

Ввиду теоремы 8.1 целесообразно ввести следующее определение. Функтор T мы назовем *сбалансированным справа*, если 1) всякий раз, когда значением одного из ковариантных аргументов функтора T является инъективный модуль, T превращается в точный функтор от остальных аргументов и 2) всякий раз, когда значением одного из контравариантных аргументов функтора T является проективный модуль, T превращается в точный функтор от остальных аргументов.

Из теоремы 8.1 следует, что для сбалансированного справа функтора T производные функторы $R^n T$ можно отождествить с частными производными функторами $R_s^n T$, соответствующими любому непустому множеству s активных аргументов.

Аналогичные результаты имеют место и для левых производных функторов. При этом отображения (1) следует заменить естественными отображениями

$$L_n T(A, C) \longrightarrow L_n^s T(A, C), \tag{1a}$$

а в теореме 8.1 и в определении *сбалансированного слева* функтора следует переставить слова «проективный» и «инъективный».

В следующей главе будет показано, что функтор $A \otimes C$ сбалансирован слева, а функтор $\operatorname{Hom}(A, C)$ сбалансирован справа. Нам неизвестны сбалансированные функторы, отличные от функторов, тривиальным образом получающихся из этих двух. В частности, нам неизвестен пример сбалансированного функтора трех аргументов.

9. СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРЕДЕЛЫ

Пусть

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha, \tag{1}$$

$$C_\beta \xrightarrow{j_\beta} C \xrightarrow{q_\beta} C_\beta \tag{2}$$

— произвольные прямые системы гомоморфизмов (см. § I, 1). Тогда, как мы уже видели при доказательстве предложения II, 1.1, гомоморфизмы

$$(3)\qquad T(A_\alpha, C_\beta) \xrightarrow{T(i_\alpha, q_\beta)} T(A, C) \xrightarrow{T(p_\alpha, j_\beta)} T(A_\alpha, C_\beta)$$

также образуют прямую систему (как обычно, мы предполагаем функтор T ковариантным по аргументу A и контравариантным по аргументу C).

Введем следующие четыре типа функторов:

Тип $L\sum$ — всякий раз, когда система (1) определяет представление модуля A в виде прямой суммы, а система (2) — представление модуля C в виде прямого произведения, система (3) определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямой суммы.

Тип $R\sum$ — всякий раз, когда система (1) определяет представление модуля A в виде прямого произведения, а система (2) — представление модуля C в виде прямой суммы, система (3) определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямой суммы.

Тип $L\Pi$ — всякий раз, когда система (1) определяет представление модуля A в виде прямой суммы, а система (2) — представление модуля C в виде прямого произведения, система (3) определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямого произведения.

Тип $R\Pi$ — всякий раз, когда система (1) определяет представление модуля A в виде прямого произведения, а система (2) — представление модуля C в виде прямой суммы, система (3) определяет представление модуля $T(A, C)$ в виде прямого произведения.

Аналогичные типы можно определить и для функторов любого числа аргументов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Функтор* $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ *принадлежит к типу* $R\Pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая, что система (1) определяет представление модуля A в виде прямой суммы, а система (2) определяет представление модуля C в виде прямого произведения, мы должны показать, что прямая система гомоморфизмов

$$(4)\qquad \mathrm{Hom}(A_\alpha, C_\beta) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(p_\alpha, j_\beta)} \mathrm{Hom}(A, C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i_\alpha, q_\beta)} \mathrm{Hom}(A_\alpha, C_\beta)$$

определяет представление модуля $\mathrm{Hom}(A, C)$ в виде прямого произведения. Пусть $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ — произвольное семейство гомоморфизмов $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(A_\alpha, C_\beta)$. Так как система (1) определяет представление модуля A в виде прямой суммы, то для любого элемента $a \in A$ существуют такие элементы $a_\alpha \in A_\alpha$, среди которых только конечное число отлично от нуля, что $a = \sum i_\alpha a_\alpha$. Далее, поскольку система (2) определяет представление модуля C в виде прямого произведения, для каждого элемента a_α существует такой единственный элемент $c_\alpha \in C$, что $q_\beta c_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} a_\alpha$. Полагая $\varphi a = \sum c_\alpha$, мы получим, следовательно, гомоморфизм $\varphi: A \to C$, для которого $q_\beta \varphi i_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}$. Единственность гомоморфизма φ непосредственно вытекает из построения. Тем самым доказано, что система (4) определяет представление модуля $\operatorname{Hom}(A, C)$ в виде прямого произведения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Функтор $A \otimes_\Lambda C$ принадлежит к типу $L \sum$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть системы (1) и (2) определяют представления соответственно модулей A и C в виде прямой суммы. Так как каждый элемент модуля $A \otimes C$ представим в виде суммы конечного числа элементов вида $a \otimes c$, а элементы a и c представимы в виде конечных сумм $a = \sum i_\alpha a_\alpha$ и $c = \sum j_\beta c_\beta$, то каждый элемент модуля $A \otimes C$ представим в виде конечной суммы элементов вида $(i_\alpha \otimes j_\beta)(a_\alpha \otimes c_\beta)$. Следовательно, прямая система гомоморфизмов

$$A_\alpha \otimes C_\beta \longrightarrow A \otimes C \longrightarrow A_\alpha \otimes C_\beta$$

определяет представление модуля $A \otimes C$ в виде прямой суммы.

Рассмотрим теперь функторы $Z(A)$, $Z'(A)$ и $H(A)$ одного аргумента A, являющегося модулем с дифференциалом или комплексом. Пусть

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha \tag{5}$$

— произвольная прямая система. Тогда

$$Z(A_\alpha) \xrightarrow{Z(i_\alpha)} Z(A) \xrightarrow{Z(p_\alpha)} Z(A_\alpha), \tag{6}$$

$$Z'(A_\alpha) \xrightarrow{Z'(i_\alpha)} Z'(A) \xrightarrow{Z'(p_\alpha)} Z'(A_\alpha), \tag{7}$$

$$H(A_\alpha) \xrightarrow{H(i_\alpha)} H(A) \xrightarrow{H(p_\alpha)} H(A_\alpha) \tag{8}$$

также являются прямыми системами. Легко проверить, что если система (5) определяет представление в виде прямой суммы или прямого произведения, то тем же свойством обладают и системы (6)—(8). Таким образом, справедливо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. *Функторы Z, Z' и H принадлежат как к типу $L \sum$, так и к типу $R\,\Pi$; другими словами, функторы Z, Z' и H перестановочны с операциями взятия прямой суммы и прямого произведения.*

ТЕОРЕМА 9.4. *Если функтор T принадлежит к типу $L \sum$ или к типу $L\,\Pi$, то к тому же типу принадлежат и все его левые производные функторы $L_n T$. Если же функтор T принадлежит к типу $R \sum$ или к типу $R\,\Pi$, то к тому же типу принадлежат и все его правые производные функторы $R^n T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что система (1) определяет представление модуля A в виде прямой суммы. Пусть X_α — проективная резольвента модуля A_α и X — прямая сумма комплексов X_α. Очевидно, что X можно рассматривать как левый комплекс над модулем A. Согласно предложению I, 2.1, комплекс X проективен, а, согласно предложению 9.3, этот комплекс ацикличен. Таким образом, X является проективной резольвентой модуля A. Аналогично, если система (2) определяет представление модуля C в виде прямого произведения, а Y_β — инъективные резольвенты модулей C_β, то прямое произведение Y комплексов Y_β является инъективной резольвентой модуля C.

Предположим теперь, что функтор T принадлежит к типу $L\sum$ (к типу $L\,\Pi$). Тогда прямая система

$$T(X_\alpha, Y_\beta) \longrightarrow T(X, Y) \longrightarrow T(X_\alpha, Y_\beta)$$

определяет представление комплекса $T(X, Y)$ в виде прямой суммы (соответственно в виде прямого произведения). Но в таком случае, согласно предложению 9.3, то же самое справедливо для прямой системы

$$H(T(X_\alpha, Y_\beta)) \longrightarrow H(T(X, Y)) \longrightarrow H(T(X_\alpha, Y_\beta)),$$

т. е. для системы

$$LT(A_\alpha, C_\beta) \longrightarrow LT(A, C) \longrightarrow LT(A_\alpha, C_\beta).$$

Второе утверждение теоремы 9.4 доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналог теоремы 9.4 имеет место и для сателлитов функторов одного аргумента. Если функтор T принадлежит к типу $L\sum$ или к типу $L\,\Pi$, то к тому же типу принадлежат и все его сателлиты S_nT, $n > 0$. Если же функтор T принадлежит к типу $R\sum$ или к типу $R\,\Pi$, то к тому же типу принадлежат и все его сателлиты S^nT, $n > 0$.

Большинство из установленных выше результатов остаются справедливыми, если прямые суммы заменить пределами прямых спектров, а прямые произведения — пределами обратных спектров. Пусть $A = \varinjlim A_\alpha$ — предел прямого спектра модулей A_α, а $C = \varprojlim C_\beta$ — предел обратного спектра модулей C_β. Тогда модули $T(A_\alpha, C_\beta)$ образуют прямой спектр, причем имеет место естественный гомоморфизм

$$\varinjlim T(A_\alpha, C_\beta) \longrightarrow T(A, C).$$

Если этот гомоморфизм всегда является изоморфизмом, то мы будем говорить, что функтор T принадлежит к типу $L\sum^*$. Аналогично, если $A = \varprojlim A_\alpha$, $C = \varinjlim C_\beta$, то модули $T(A_\alpha, C_\beta)$ образуют обратный спектр, причем имеет место естественный гомоморфизм

$$T(A, C) \longrightarrow \varprojlim T(A_\alpha, C_\beta).$$

Если этот гомоморфизм всегда является изоморфизмом, то мы будем говорить, что функтор T принадлежит к типу $R\,\Pi^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1*. *Функтор* $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ *принадлежит к типу* $R\,\Pi^*$.

Поскольку это предложение в дальнейшем не используется, его доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2*. *Функтор* $A \otimes_\Lambda C$ *принадлежит к типу* $L\sum^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — предел прямого спектра, состоящего из модулей A_α и отображений $\varphi_{\alpha'\alpha}: A_\alpha \to A_{\alpha'}$, $\alpha < \alpha'$, а C — предел прямого спектра, состоящего из модулей C_β и отображений $\psi_{\beta'\beta}: C_\beta \to C_{\beta'}$, $\beta < \beta'$. Тогда модули $A_\alpha \otimes C_\beta$ в совокупности с отображениями $\varphi_{\alpha'\alpha} \otimes \psi_{\beta'\beta}$ образуют прямой спектр, множеством индексов которого является множество всех пар вида (α, β). Предел этого прямого спектра мы обозначим через D. Отображения $\varphi_\alpha \otimes \psi_\beta: A_\alpha \otimes C_\beta \to A \otimes C$ индуцируют некоторое отображение $\mu: D \to A \otimes C$, и нам нужно показать, что μ является изоморфизмом. С этой целью мы определим некоторое отображение $\xi: A \otimes C \to D$ и покажем, что композиции $\mu\xi$ и $\xi\mu$ являются тождественными отображениями. Пусть $x \in A$ и $y \in C$. Тогда существуют такие индексы α и β и такие элементы $x_\alpha \in A_\alpha$, $y_\beta \in C_\beta$, что $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$ и $y = \psi_\beta(y_\beta)$. Используя естественное проектирование $\chi_{\alpha,\beta}: A_\alpha \otimes C_\beta \to D$, определим элемент $u(x, y) \in D$, положив $u(x, y) = \chi_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta)$. Очевидно, что элемент $u(x, y)$ не зависит от выбора индексов α, β и элементов x_α, y_β. Построенная функция $u(x, y)$ билинейна и удовлетворяет соотношению $u(x\lambda, y) = u(x, \lambda y)$, $\lambda \in \Lambda$. Следовательно, существует единственный гомоморфизм $\xi: A \otimes C \to D$, для которого $\xi(x \otimes y) = u(x, y)$. Проверка того, что композиции $\mu\xi$ и $\xi\mu$ являются тождественными отображениями, тривиальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3*. *Функторы Z, Z' и H принадлежат к типу* $L\sum^*$; *другими словами, эти функторы перестановочны с операцией взятия предела прямого спектра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — предел прямого спектра, состоящего из дифференциальных модулей A_α и отображений $\varphi_{\alpha'\alpha}: A_\alpha \to A_{\alpha'}$. Тогда модули $H(A_\alpha)$ в совокупности с гомоморфизмами $H(\varphi_{\alpha'\alpha})$ образуют прямой спектр, предел которого мы обозначим через D. Кроме того, гомоморфизмы

$$H(\varphi_\alpha): H(A_\alpha) \longrightarrow H(A)$$

индуцируют отображение $\mu: D \to H(A)$, которое, как мы сейчас покажем, является изоморфизмом.

Действительно, пусть $a \in H(A)$, и пусть $x \in Z(A)$ — произвольный элемент смежного класса a. Как известно, существует такой индекс α и такой элемент $x_\alpha \in A_\alpha$, что $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$. Так как $0 = dx = d\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\alpha(dx_\alpha)$, то существует такой индекс $\alpha' > \alpha$, что $\varphi_{\alpha'\alpha} dx_\alpha = 0$. Полагая $x_{\alpha'} = \varphi_{\alpha'\alpha}(x_\alpha)$, мы получим, что $dx_{\alpha'} = 0$. Следовательно, элемент $x_{\alpha'}$ определяет некоторый элемент модуля $H(A_{\alpha'})$, который в свою очередь определяет некоторый элемент $\xi(a)$ модуля D. Нетрудно проверить, что элемент $\xi(a)$ не зависит от произвола построения, так что ξ является отображением $H(A) \to D$, как легко видеть, обратным к отображению μ.

Для функторов Z и Z' доказательство проводится аналогично и даже еще проще.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функтор Z принадлежит также и к типу $R\Pi^*$, тогда как функторы Z' и H к этому типу не принадлежат, т. е. функторы Z' и H не перестановочны с операцией взятия предела обратного спектра.

ТЕОРЕМА 9.4*. *Если ковариантный по всем аргументам функтор T принадлежит к типу $L\sum^*$, то к этому же типу принадлежат и все его левые производные функторы L_nT.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 9.5*. *Если $A = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, A_\alpha$, то существуют проективные резольвенты X_α модулей A_α, образующие прямой спектр, предел $X = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, X_\alpha$ которого является проективной резольвентой модуля A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_{0,\alpha}$ — свободный модуль F_{A_α}, порожденный всеми элементами модуля A_α, и пусть $X_0 = F_A$. Отображения $\varphi_{\alpha'\alpha}: A_\alpha \to A_{\alpha'}$ индуцируют, очевидно, отображения $X_{0,\alpha} \to X_{0,\alpha'}$, относительно которых модули $X_{0,\alpha}$ образуют прямой спектр, причем модуль X_0 можно отождествить с пределом $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, X_{0,\alpha}$ этого прямого спектра. Пусть R_α — ядро естественного гомоморфизма $X_{0,\alpha} \to A_\alpha$. Модули R_α образуют прямой спектр, пределом которого является модуль $R = \mathrm{Ker}\,(X_0 \to A)$. Далее ту же конструкцию применяем к прямому спектру модулей R_α и т. д.; в результате мы построим все требуемые комплексы X_α.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы вынуждены были в теореме 9.4* требовать ковариантности функтора по всем аргументам потому, что для инъективных резольвент и обратных спектров аналог леммы 9.5* не имеет места.

10. ПРОИЗВОДНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $f: T \to U$ — произвольное естественное отображение функторов. Как обычно, мы предполагаем T и U функторами двух аргументов, ковариантными по первому аргументу и контравариантными по второму. Обозначая через $\tilde{f}$ естественное отображение

$$\tilde{f}: L_0T \longrightarrow R^0U,$$

определяемое из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} L_0T & \longrightarrow & T & \longrightarrow & R^0T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_0U & \longrightarrow & U & \longrightarrow & R^0U \end{array}$$

введем функторы

$$L_0f = \mathrm{Ker}\,(\tilde{f}) \text{ и } R^0f = \mathrm{Coker}\,(\tilde{f}).$$

Последовательность функторов

(1) $$\ldots, L_nT, \ldots, L_1T, L_0f, R^0f, R^1U, \ldots, R^nU, \ldots$$

мы будем называть *производной последовательностью отображения* f.

Функторы последовательности (1) мы свяжем друг с другом некоторыми гомоморфизмами. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 10.1. *Если в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A_1' \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] & A_1'' \arrow[r] & A_0' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & B_0' \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_0'' \arrow[r] & B_1' \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_1'' \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

строки являются точными последовательностями, то имеет место точная последовательность

$$\ldots \to A_1' \to A_1 \to A_1'' \to \widetilde{A}_0' \to \widetilde{A}_0 \to \widetilde{A}_0'' \to$$
$$\to \widetilde{B}_0' \to \widetilde{B}_0 \to \widetilde{B}_0'' \to B_1' \to B_1 \to B_1'' \to \ldots,$$

где

$$\widetilde{A}_0 = \operatorname{Ker}\varphi, \qquad \widetilde{B}_0 = \operatorname{Coker}\varphi,$$
$$\widetilde{A}_0' = \operatorname{Ker}\varphi', \qquad \widetilde{B}_0' = \operatorname{Coker}\varphi',$$
$$\widetilde{A}_0'' = \operatorname{Ker}\varphi'', \qquad \widetilde{B}_0'' = \operatorname{Coker}\varphi'',$$

а $\widetilde{A}_0'' \to \widetilde{B}_0'$ — *связывающий гомоморфизм, определенный в* § III, 3.

Точность последовательности $\widetilde{A}_0' \to \widetilde{A}_0 \to \widetilde{A}_0'' \to \widetilde{B}_0' \to \widetilde{B}_0 \to \widetilde{B}_0''$ следует из леммы III, 3.3. Точность всей рассматриваемой последовательности вытекает отсюда непосредственно.

Рассмотрим теперь произвольную точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Применяя к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & L_1T(A'',C) \arrow[r] \arrow[d] & L_0T(A',C) \arrow[r] \arrow[d] & L_0T(A,C) \arrow[r] \arrow[d] & L_0T(A'',C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & R^0U(A',C) \arrow[r] & R^0U(A,C) \arrow[r] & R^0U(A'',C) \arrow[r] & R^1U(A',C) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

с точными строками лемму 10.1, мы получим связывающие гомоморфизмы для последовательности (1) (относительно первого аргумента) и тем самым определим последовательность (1) как точную связанную последовательность функторов. Аналогичные соображения применимы и ко второму аргументу. Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *Производная последовательность* (1) *естественного отображения* $f: T \to U$ *является точной многократно связанной последовательностью функторов.*

Отметим, однако, что называть последовательность (1) многократно связанной последовательностью функторов, строго говоря, не вполне правильно, поскольку в этой последовательности нет должного порядка в нумерации ее членов. Для устранения этого дефекта достаточно, очевидно, соответствующим образом перенумеровать члены последовательности (1). Тем не менее, ввиду того, что при любом изменении нумерации нарушается естественная симметрия в обозначениях левых и правых производных функторов, мы предпочитаем не вводить новой нумерации членов последовательности (1).

Предположим теперь, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\psi"] \\ T' \arrow[r, "g"'] & U' \end{tikzcd}$$

естественных отображений функторов. Тогда отображения φ и ψ индуцируют, очевидно, некоторое отображение производной последовательности отображения f в производную последовательность отображения g.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. *Если отображение $\varphi: T(A, C) \to T'(A, C)$ изоморфно всякий раз, когда модуль A проективен и модуль C инъективен, а отображение $\psi: U(A, C) \to U'(A, C)$ изоморфно всякий раз, когда модуль A инъективен и модуль C проективен, то индуцированное отображениями φ и ψ отображение производной последовательности отображения f в производную последовательность отображения g является изоморфизмом.*

Для доказательства достаточно заметить, что из условия теоремы следует, согласно предложению 4.4, что отображения φ и ψ индуцируют изоморфизмы

$$L_nT \approx L_nT', \quad R^nU \approx R^nU'.$$

Для частного случая, когда f является тождественным отображением $T \to T$, мы будем обозначать функторы L_0f и R^0f через $\tilde{L}_0T$ и $\tilde{R}^0T$. Таким образом,

$$\tilde{L}_0T = \operatorname{Ker}(L_0T \longrightarrow R^0T), \qquad \tilde{R}^0T = \operatorname{Coker}(L_0T \longrightarrow R^0T).$$

В этом случае производная последовательность имеет вид

$$(2) \qquad \ldots, L_nT, \ldots, L_1T, \tilde{L}_0T, \tilde{R}^0T, R^1T, \ldots, R^nT, \ldots$$

и называется *производной последовательностью функтора T*.

Перейдем теперь к задаче вычисления производной последовательности отображения $f: T \to U$ с помощью резольвент.

Пусть X — произвольный левый комплекс над модулем A и Y — произвольный правый комплекс над модулем C. Для любого отображения $\varphi: A \to C$ мы будем обозначать через (X, φ, Y) комплекс

$$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow Y^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y^n \longrightarrow \ldots,$$

где $X_0 \to Y^0$ — сквозной гомоморфизм $X_0 \to A \xrightarrow{\varphi} C \to Y^0$, являющийся композицией гомоморфизма φ и пополняющих отображений $X \to A$, $C \to Y$. (Строго говоря, последовательность (X, φ, Y) становится комплексом только после соответствующего изменения нумерации ее членов.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.4. *Пусть* $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ — *точная последовательность левых комплексов над точной последовательностью* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *и* $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ — *точная последовательность правых комплексов над точной последовательностью* $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$, *и пусть имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Тогда гомологическая последовательность, соответствующая точной последовательности

$$0 \longrightarrow (X', \varphi', Y') \longrightarrow (X, \varphi, Y) \longrightarrow (X'', \varphi'', Y'') \longrightarrow 0,$$

совпадает с точной последовательностью, получающейся, согласно лемме 10.1, *из коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \to H_1(X) & \to & H_1(X'') & \to & H_0(X') & \to & H_0(X) & \to & H_0(X'') & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(Y') & \to & H^0(Y) & \to & H^0(Y'') & \to & H^1(Y') & \to & H^1(Y) \to \ldots \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $H_n(X) = H_n(X, \varphi, Y)$ и $H^n(Y) = H^n(X, \varphi, Y)$ для любого $n > 0$. Далее,

$$\begin{aligned} H_0(X, \varphi, Y) &= \operatorname{Ker}(X_0 \to Y^0)/\operatorname{Im}(X_1 \to X_0) = \\ &= \operatorname{Ker}(X_0/\operatorname{Im}(X_1 \to X_0) \to Y^0) = \\ &= \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Coker}(X_1 \to X_0) \to \operatorname{Ker}(Y^0 \to Y^1)\big) = \\ &= \operatorname{Ker}\big(H_0(X) \to H^0(Y)\big). \end{aligned}$$

Аналогично $H^0(X, \varphi, Y) = \operatorname{Coker}\big(H_0(X) \to H^0(Y)\big)$. Следовательно, остается убедиться в совпадении соответствующих связывающих гомоморфизмов. Это не очевидно лишь для связывающего гомоморфизма

$$(3) \qquad H_0(X'', \varphi'', Y'') \longrightarrow H^0(X', \varphi', Y').$$

Но этот гомоморфизм определяется (см. § IV, 1) из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z_0'(X', \varphi', Y') & \longrightarrow & Z_0'(X, \varphi, Y) & \longrightarrow & Z_0'(X'', \varphi'', Y'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z^0(X', \varphi', Y') & \longrightarrow & Z^0(X, \varphi, Y) & \longrightarrow & Z^0(X'', \varphi'', Y'') \end{array}$$

которая, как легко проверить, совпадает с диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_0(X') & \longrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & H_0(X'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(Y') & \longrightarrow & H^0(Y) & \longrightarrow & H^0(Y'') \end{array}$$

откуда и следует, что связывающий гомоморфизм (3) совпадает со связывающим гомоморфизмом, получающимся согласно лемме 10.1.

Вернемся теперь к отображению $f: T \to U$. Пусть X и $\bar{X}$ — соответственно проективная и инъективная резольвенты модуля A, а Y и $\bar{Y}$ соответственно проективная и инъективная резольвенты модуля C. Тогда, как следует из предложения 10.4, группы гомологий комплекса

$$(4) \qquad (T(X, \bar{Y}), f, U(\bar{X}, Y))$$

совпадают со значениями соответствующих членов производной последовательности отображения f при данных значениях аргументов A и C. Из предложения 10.4 вытекает, кроме того, что таким же путем можно найти и связывающие гомоморфизмы производной последовательности. Если функтор T сбалансирован слева, то при построении комплекса (4) можно в комплексе $T(X, \bar{Y})$ резольвенту X заменить модулем A или резольвенту $\bar{Y}$ — модулем C. Аналогично, если функтор U сбалансирован справа, то при построении комплекса (4) можно в комплексе $U(\bar{X}, Y)$ резольвенту $\bar{X}$ заменить модулем A или резольвенту Y — модулем C.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть

$$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

— проективная резольвента модуля A и пусть Z_n — образ гомоморфизма $X_{n+1} \to X_n$ (см. доказательство предложения 1.2). Предполагая, что T — ковариантный функтор одного аргумента, доказать, что

$$S_nT(A) = \operatorname{Ker}(T(Z_{n-1}) \longrightarrow T(X_{n-1})), \qquad n \geq 1,$$
$$L_nT(A) = \operatorname{Ker}(T(X_n) \longrightarrow T(X_{n-1}))/\operatorname{Im}(T(X_{n+1}) \longrightarrow T(X_n)).$$

В силу этих соотношений отображение $T(X_n) \to T(Z_{n-1})$ индуцирует некоторое отображение

$$L_nT(A) \longrightarrow S_nT(A), \qquad n \geq 1.$$

Показать, что это отображение совпадает с отображением σ_n, указанным в предложении 6.1. Показать также, что отображение σ_n является изоморфизмом, когда либо функтор T точен справа, либо кольцо Λ наследственно.

Исследовать другие аналогичные случаи.

2. Пусть T — ковариантный полуточный функтор одного аргумента (см. § II, 4). Доказать, что для любой точной последовательности $0 \to A \to Q \to N \to 0$ с инъективным модулем Q имеет место изоморфизм

$$S^1S_1T(A) \approx \operatorname{Ker}(T(A) \longrightarrow T(Q)).$$

Доказать, что

$$\operatorname{Ker}(T(A) \longrightarrow T(Q)) = \operatorname{Ker}(T(A) \longrightarrow R^0T(A)),$$

и построить точную последовательность естественных отображений функторов

$$0 \longrightarrow S^1S_1T \longrightarrow T \longrightarrow R^0T.$$

Показать, что для контравариантного полуточного функтора T получается та же точная последовательность.

3. Применяя результат упражнения III, 5 к точной последовательности функторов, указанной в упражнении 2, доказать, что для любого полуточного функтора T одного аргумента имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow S^1S_1T \longrightarrow T \longrightarrow R^0T \longrightarrow S^2S_1T \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow S^{n+1}S_1T \longrightarrow S^nT \longrightarrow R^nT \longrightarrow S^{n+2}S_1T \longrightarrow \ldots.$$

Построить двойственную точную последовательность.

4. Доказать, что для любого точного справа функтора T одного аргумента имеют место изоморфизмы

$$R^nT \approx S^{n+2}L_1T, \qquad \text{если } n > 0,$$

и точная последовательность

$$0 \longrightarrow S^1L_1T \longrightarrow T \longrightarrow R^0T \longrightarrow S^2L_1T \longrightarrow 0.$$

(Указание: учесть, что $L_1T \approx S_1T$ и $S^nT = 0$ для любого $n > 0$.)

Сформулировать двойственные утверждения.

5. Доказать, что для любого полуточного функтора T одного аргумента и любого $n > 0$

$$S^nS_1S^1T \approx S^nT.$$

(Указание: в точной последовательности, указанной в упражнении 3, заменить функтор T его правым сателлитом S^1T.)

6. В теореме 8.1 дать другое доказательство импликации (b) $\Rightarrow$ (a), применяя результат упражнения IV, 7 к отображению $T(X, C) \to T(X, Y)$.

7. Пусть $T(A, C)$ — произвольный сбалансированный справа функтор двух аргументов, контравариантный по аргументу A и ковариантный по аргументу C. Доказать, что

$$R^nT(A, C) \approx H^n(T(X, Y)),$$

где X — произвольная проективная резольвента модуля A, а Y — произвольный ацикличный правый комплекс над модулем C (как и в упражнении 6, воспользоваться результатом упражнения IV, 7).

Рассмотреть случай, когда X — произвольный ацикличный левый комплекс над модулем A, а Y — произвольная инъективная резольвента модуля C. Рассмотреть случай сбалансированных слева функторов и, в частности, функтор $A \otimes C$.

8. Любую точную последовательность

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{1}$$

мы можем рассматривать как левый ацикличный комплекс X над модулем A. Доказать, что для каждого контравариантного функтора T одного аргумента диаграмма

$$\begin{tikzcd} T(X_n) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & H^n(T(X)) \arrow[d] \\ R^0\, T(X_n) \arrow[r, "\delta"'] & R^n\, T(A) \end{tikzcd}$$

где δ — итерированный связывающий гомоморфизм, соответствующий последовательности (1), коммутативна или антикоммутативна в зависимости от того, четно или нечетно число $n(n+1)/2$. (Указание: воспользоваться предложением 7.1.)

9. Пусть T — полуточный ковариантный функтор, принадлежащий к типу $L\sum^*$ (т. е. перестановочный с операцией взятия предела прямого спектра). Доказать, что если $T(\Lambda/I)=0$ для каждого (левого) идеала I кольца Λ, то $T=0$.

ГЛАВА VI

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ ДЛЯ ФУНКТОРОВ $\otimes$ и Hom

Введение. Развитые в гл. V методы применяются здесь к функторам $A \otimes C$ и $\operatorname{Hom}(A, C)$. Левые производные функторы функтора $A \otimes C$ обозначаются через $\operatorname{Tor}_n(A, C)$; правые производные функторы функтора $\operatorname{Hom}(A, C)$ — через $\operatorname{Ext}^n(A, C)$. Эти функторы можно также рассматривать как сателлиты функторов $A \otimes C$ и $\operatorname{Hom}(A, C)$ относительно любого из их аргументов A или C. Указанные обозначения производных функторов найдут себе оправдание в § VII, 4 и в § XIV, 1.

В § 2 мы вводим в дальнейшем широко используемое понятие *проективной размерности* произвольного Λ-модуля A. Это понятие является аналогом понятия топологической размерности пространства, определяемой гомологическими методами. Вводятся также понятия *инъективной размерности* модуля и *глобальной размерности* кольца. Полупростые кольца совпадают с кольцами глобальной размерности нуль, а наследственные кольца — с кольцами глобальной размерности, не большей единицы.

В § 3 мы детально изучаем установленные в § IV, 8 соотношения Кюннета в их применении к функторам $\otimes$ и Hom, а в § 4 возвращаемся к вопросам, связанным с «заменой колец», изучение которых было начато в § II, 6. Получающиеся при этом результаты будут впоследствии использованы в теории гомологий групп (§ X, 7) и алгебр Ли (§ XIII, 4).

1. ФУНКТОРЫ Tor И Ext

Эта глава целиком посвящена функторам $A \otimes_\Lambda C$, $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, C)$ и их производным функторам. Символ Λ мы будем опускать всякий раз, когда это не может привести к недоразумению.

Как мы уже знаем (предложение II, 4.4), функтор $\operatorname{Hom}(A, C)$ точен слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Функтор* $\operatorname{Hom}(A, C)$ *сбалансирован справа.*

Непосредственно следует из предложения II, 4.6.

Как мы уже знаем (предложение II, 4.5), функтор $A \otimes C$ точен справа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1a. *Функтор* $A \otimes C$ *сбалансирован слева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — произвольный свободный модуль. Так как этот модуль является прямой суммой модулей F_a, каждый из которых изоморфен кольцу Λ, то функтор $T(C) = F \otimes C$ является прямой суммой функторов $T_a(C) = F_a \otimes C$. Но каждый из функторов T_a точен; следовательно, точен и функтор T. Далее, для любого модуля A, являющегося прямым слагаемым модуля F, функтор $T(C) = F \otimes C$ разлагается в прямую сумму функтора $T'(C) = A \otimes C$ и некоторого функтора T''. Так как функтор T точен, то и его прямое слагаемое T' является точным функтором. Аналогичные соображения применимы и ко второму аргументу.

Применим теперь к сбалансированным функторам $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ и $A \otimes_\Lambda C$ результаты гл. V. Правые производные функторы функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ мы будем обозначать через $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, C)$ (или, опуская символ Λ, через $\mathrm{Ext}^n(A, C)$). Заметим, что $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$. Модуль $\mathrm{Ext}_\Lambda(A, C) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, C)$ можно рассматривать как модуль гомологий любого из комплексов $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)$ и $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, Y)$, где X — некоторая проективная резольвента модуля A, а Y — некоторая инъективная резольвента модуля C. В силу теоремы V, 6.1 производный функтор Ext^n_Λ можно также рассматривать как n-й сателлит функтора Hom_Λ относительно любого из двух его аргументов.

Левые производные функторы функтора $A \otimes_\Lambda C$ мы будем обозначать через $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A, C)$ (или, опуская символ Λ, через $\mathrm{Tor}_n(A, C)$). Заметим, что $\mathrm{Tor}^\Lambda_0(A, C) = A \otimes_\Lambda C$. Модуль $\mathrm{Tor}^\Lambda(A, C) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Tor}^\Lambda_n(A, C)$ можно рассматривать как модуль гомологий любого из трех комплексов $X \otimes_\Lambda Y$, $X \otimes_\Lambda C$ и $A \otimes_\Lambda Y$, где X и Y — некоторые проективные резольвенты модулей A и C соответственно. Производный функтор Tor^Λ_n можно также рассматривать как n-й сателлит функтора $\otimes_\Lambda$ относительно любого из двух его аргументов.

Левые производные функторы функтора Hom и правые производные функторы функтора $\otimes$ мы рассматривать не будем (см. упражнения VII, 2—6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Функторы Ext^n_Λ принадлежат к типу $R\Pi$.*

Непосредственно следует из предложений V, 9.1 и V, 9.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2а. *Функторы Tor^Λ_n принадлежат к типу $L\sum$.*

Непосредственно следует из предложений V, 9.2 и V, 9.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Функторы Tor^Λ_n принадлежат к типу $L\sum^*$ (т. е. эти функторы перестановочны с операцией взятия предела прямого спектра).*

Следует из предложений V, 9.2* и V, 9.4*.

В качестве примера использования того факта, что функтор $\otimes_\Lambda$ сбалансирован слева, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Если в ситуации $({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma C)$ модуль A Λ-проективен, а модуль C Γ-инъективен, то модуль $\mathrm{Hom}_\Gamma(A, C)$ Λ-инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A \otimes_\Lambda B$ является точным функтором левого Λ-модуля B, то и $\mathrm{Hom}_\Gamma(A \otimes_\Lambda B, C)$ будет точным функтором аргумента B. Но в таком случае, согласно предложению II, 5.2, точным функтором аргумента B будет и функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_\Gamma(A, C))$. Поэтому, согласно предложению II, 4.6, модуль $\mathrm{Hom}_\Gamma(A, C)$ является Λ-инъективным модулем.

Аналогичное предложение имеет место и в ситуации $({}_\Lambda A_\Gamma, C_\Gamma)$.

Следующие две теоремы часто полезны при вычислении функторов Tor_n и Ext^n в некоторых конкретных случаях.

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть* $0 \to M \xrightarrow{\alpha} P \to A \to 0$ *и* $0 \to C \to Q \xrightarrow{\beta} N \to 0$ — *точные последовательности, в первой из которых модуль P проективен, а во второй модуль Q инъективен. Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

(1) $\quad \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, C) \approx \mathrm{Ext}^{n-2}_\Lambda(M, N), \qquad$ *если* $n > 2$,

(2) $\quad \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, C) \approx \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, \beta))$,

(3) $\quad \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C) \approx$

$$\approx \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha, \beta))/[\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\sigma, Q)) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \beta))].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n > 2$. Здесь имеет место антикоммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{n-2}(M, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{n-1}(A, N) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^{n-1}(M, C) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n}(A, C)
\end{tikzcd}$$

все четыре отображения которой являются изоморфизмами. Таким образом, мы получаем даже два изоморфизма (1), отличающиеся друг от друга знаком.

Для $n = 2$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(P, Q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(M, Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}(P, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(M, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(A, N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M, C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(A, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. В этой диаграмме коммутативны все квадраты, кроме нижнего правого, который антикоммутативен. Из диаграммы непосредственно следует, что

$$\mathrm{Ext}^2(A, C) \approx \mathrm{Ext}^1(A, N) \approx \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}(\alpha, N)) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)).$$

Заменяя в этих соотношениях модуль $\mathrm{Ext}^1(A, N)$ модулем $\mathrm{Ext}^1(M, C)$, мы получим другой изоморфизм (2), отличающийся от построенного знаком.

Рассмотрим, наконец, случай $n = 1$. Исходя из точной последовательности $0 \to M \xrightarrow{\alpha} P \to A \to 0$, мы построим левый комплекс X над модулем A, полагая $X_0 = P$, $X_1 = M$ и $X_i = 0$, если $i > 1$. Аналогично, исходя из точной последовательности $0 \to C \to Q \xrightarrow{\beta} N \to 0$, мы построим правый комплекс Y над модулем C, полагая $Y^0 = Q$, $Y^1 = N$ и $Y^i = 0$, если $i > 1$. Согласно предложению V, 7.3, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C) \approx H^1(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y))$. С другой стороны, комплекс $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ имеет вид

$$\mathrm{Hom}(P, Q) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}(M, Q) + \mathrm{Hom}(P, N) \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}(M, N),$$

причем отображения d^0 и d^1 задаются формулами

$$d^0 f = (f\alpha, \beta f), \qquad d^1(g, h) = -\beta g + h\alpha,$$

где $f: P \to Q$, $g: M \to Q$, $h: P \to N$.

Так как модуль Q инъективен, а модуль P проективен, то отображения $\mathrm{Hom}(\alpha, Q)$ и $\mathrm{Hom}(P, \beta)$ являются эпиморфизмами. Поэтому любой однородный элемент (g, h) степени 1 комплекса $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ можно представить в виде $(f_1\alpha, \beta f_2)$, где $f_1, f_2 : P \to Q$. Отображение f_1 определяется с точностью до отображения из $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\alpha, Q))$, а отображение f_2 — с точностью до отображения из $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(P, \beta))$. Следовательно, смежный класс

$$\varphi(g, h) = [f_2 - f_1]$$

группы $\mathrm{Hom}(P, Q)$ по подгруппе $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\alpha, Q)) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(P, \beta))$ однозначно определен элементом (g, h). Так как

$$d^1(g, h) = -\beta g + h\alpha = \beta(f_2 - f_1)\alpha,$$

то $d^1(g, h) = 0$ тогда и только тогда, когда $f_2 - f_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\alpha, \beta))$. Если $(g, h) = d^0 f = (f\alpha, \beta f)$, то $\varphi(g, h) = [f - f] = 0$. Если $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\alpha, \beta))$, то $\varphi(f\alpha, 0) = \varphi(f\alpha, \beta 0) = [f]$. Таким образом, отображение φ индуцирует требуемый изоморфизм (3). При замене смежного класса $[f_2 - f_1]$ классом $[f_1 - f_2]$ отображение φ переходит в отображение $-\varphi$.

Совершенно аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 1.5а. *Пусть* $0 \to M \xrightarrow{\alpha} P \to A \to 0$ *и* $0 \to M' \xrightarrow{\beta} P' \to C \to 0$ — *точные последовательности, в которых модули* P *и* P' *проективны. Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

(1a) $\quad \mathrm{Tor}^\Lambda_n(A, C) \approx \mathrm{Tor}^\Lambda_{n-2}(M, M')$, *если* $n > 2$,

(2a) $\quad \mathrm{Tor}^\Lambda_2(A, C) \approx \mathrm{Ker}(\alpha \otimes_\Lambda \beta)$,

(3a) $\quad \mathrm{Tor}^\Lambda_1(A, C) \approx [\mathrm{Im}(\alpha \otimes_\Lambda P') \cap \mathrm{Im}(P \otimes_\Lambda \beta)]/\mathrm{Im}(\alpha \otimes_\Lambda \beta)$.

Рассмотрим в заключение вопрос о коммутативности функторов Tor_n. Для любого кольца Λ существует так называемое *противоположное кольцо* Λ^*, элементы λ^* которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $\lambda \in \Lambda$ и умножение[1] в котором задается формулой $\lambda_1^*\lambda_2^* = (\lambda_2\lambda_1)^*$. Очевидно, что кольцо $(\Lambda^*)^*$ можно отождествлять с кольцом Λ. Кроме того, если кольцо Λ коммутативно, то противоположное кольцо Λ^* можно считать совпадающим с кольцом Λ. Любой левый (правый) Λ-модуль A можно, полагая $a\lambda^* = \lambda a$, рассматривать как правый (левый) Λ^*-модуль, При этом ситуация $(A_{\Lambda}, {}_{\Lambda}C)$ переходит в ситуацию $(C_{\Lambda^*}, {}_{\Lambda^*}A)$, а отображение $a \otimes_{\Lambda} c \to c \otimes_{\Lambda^*} a$ определяет изоморфизм $A \otimes_{\Lambda} C \approx$ $\approx C \otimes_{\Lambda^*} A$. Наконец, Λ-проективные резольвенты X и Y модулей A и C соответственно можно рассматривать и как Λ^*-проективные резольвенты тех же модулей A и C. Очевидно, что отображение $\varphi : X \otimes_{\Lambda} Y \to Y \otimes_{\Lambda^*} X$, определенное формулой

$$\varphi(x \otimes y) = (-1)^{pq}\, y \otimes x, \qquad x \in X_p,\ y \in Y_q,$$

является изоморфизмом комплексов и, следовательно, после перехода к группам гомологий оно индуцирует некоторый изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \approx \operatorname{Tor}_n^{\Lambda^*}(C, A). \tag{4}$$

2. РАЗМЕРНОСТЬ МОДУЛЕЙ И КОЛЕЦ

Мы будем говорить, что *проективная размерность левого Λ-модуля A не превосходит n*, если для модуля A существует по крайней мере одна проективная резольвента X, однородные составляющие X_k которой равны нулю для всех $k > n$. Наименьшее число n, обладающее этим свойством, мы будем называть *проективной размерностью* модуля A и будем обозначать его через $\operatorname{l.dim}_{\Lambda} A$. Если такого числа n не существует, то мы будем говорить, что проективная размерность модуля A равна ∞. Всякий раз, когда это не может вызвать недоразумения, мы проективную размерность модуля A будем обозначать просто через $\dim_{\Lambda} A$ или даже через $\dim A$. Нулевой модуль имеет по определению размерность -1. Класс проективных модулей совпадает, очевидно, с классом модулей, имеющих неположительную проективную размерность.

Проективные размерности $\operatorname{r.dim}_{\Lambda} A$ правых Λ-модулей A, являющиеся целыми числами или символом ∞, определяются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *проективная размерность Λ-модуля A не превосходит n;*

(b) $\operatorname{Ext}_{\Lambda}^{n+1}(A, C) = 0$ *для всех (левых или правых) Λ-модулей C;*

(c) $\operatorname{Ext}_{\Lambda}^{n}(A, C)$ *является точным справа функтором модуля C;*

(d) *если в точной последовательности* $0 \to X_n \to X_{n-1} \to \ldots$ $\ldots \to X_0 \to A \to 0$ *модули X_k $(0 \leq k < n)$ проективны, то и модуль X_n проективен.*

[1] Сложение в кольце Λ^* задается формулой $\lambda_1^* + \lambda_2^* = (\lambda_1 + \lambda_2)^*$. — *Прим. перев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть X — проективная резольвента модуля A, для которой $X_k = 0$ при любом $k > n$. Тогда

$$\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, C) = H^{n+1}(\operatorname{Hom}(X, C)) = 0.$$

Импликация (b) $\Rightarrow$ (c) очевидна.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (d) тривиальна, если $n = 0$. Предположим поэтому, что $n > 0$. Тогда для любого эпиморфизма $C \to C''$ мы можем, используя итерированные связывающие гомоморфизмы, построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_\Lambda(X_{n-1}, C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}_\Lambda^n(A, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\operatorname{Hom}_\Lambda(X_{n-1}, C'') \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, C'') \arrow[r] & \operatorname{Ext}_\Lambda^n(A, C'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

строки которой являются точными последовательностями (см. предложение V, 7.2). Так как модуль X_{n-1} проективен, то в этой диаграмме левое вертикальное отображение эпиморфно. Правое вертикальное отображение также эпиморфно, поскольку, по предположению, функтор $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(A)$ точен справа. Отсюда легко следует, что и среднее вертикальное отображение является эпиморфизмом. Таким образом, $\operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, C)$ является точным функтором модуля C и, следовательно, модуль X_n проективен (см. предложение II, 4.6).

(d) $\Rightarrow$ (a). Применяя несколько раз теорему I, 2.3, мы построим некоторую последовательность указанного в условии (d) вида. Поскольку, согласно условию (d), модуль X_n проективен, эта последовательность является проективной резольвентой модуля A, так что $\dim A \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Равенство* $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(A, Y) = 0$ *тогда и только тогда имеет место для любого модуля* Y, *когда модуль* A Λ*-проективен.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Если в точной последовательности* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *модуль* A *проективен, а модуль* A'' *не проективен, то* $\dim A'' = 1 + \dim A'$.

Непосредственно следует из изоморфизма $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A', C) \approx \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(A'', C)$, который здесь имеет место для любого $n \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если в точной последовательности* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ $\dim A' \leq n$ *и* $\dim A'' \leq n$, *то* $\dim A \leq n$.

Вытекает из точности последовательности $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A'', C) \to \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, C) \to \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A', C)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если кольцо* Λ *нетерово слева и левый* Λ*-модуль* A *имеет конечное число образующих, то* $\dim A \leq n$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(A, C) = 0$ *для любого левого* Λ*-модуля* C *с конечным числом образующих.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из свойства (b), сформулированного в предложении 2.1. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольную точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$, в которой модуль P проективен и обладает конечным числом образующих. В силу того, что кольцо Λ нетерово слева, модуль M также имеет конечное число образующих. Предположим сначала, что $n = 0$. Тогда $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, M) = 0$ и, следовательно, отображение $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, P) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A, A)$ эпиморфно. Поэтому точная последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ расщепляема и, следовательно, модуль A проективен. Таким образом, $\dim A = 0$. Предположим теперь, что $n > 0$ и что утверждение уже доказано для $n - 1$. Тогда $\dim M \leq n - 1$, так как $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(M, C) \approx \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A, C) = 0$, и потому, согласно предложению 2.3, $\dim A \leq n$.

Инъективной размерностью модуля C называется такое наименьшее число n, что существует по крайней мере одна инъективная резольвента Y модуля C, однородные составляющие Y^k которой равны нулю для всех $k > n$. Для обозначения инъективной размерности мы не вводим никакого символа[1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1а. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *инъективная размерность Λ-модуля C не превосходит n;*

(b) $\operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A, C) = 0$ *для всех Λ-модулей A;*

(c) $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(A, C)$ *является точным справа функтором модуля A;*

(d) *если в точной последовательности $0 \to C \to Y^0 \to \ldots \ldots \to Y^{n-1} \to Y^n \to 0$ модули Y^k $(0 \leq k < n)$ инъективны, то и модуль Y^n инъективен.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2а. *Равенство $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, C) = 0$ тогда и только тогда имеет место для любого модуля X, когда модуль C Λ-инъективен.*

Имеют место также предложения, аналогичные предложениям 2.3 и 2.4; в то же время никакого аналога предложения 2.5 для инъективной размерности не существует.

ТЕОРЕМА 2.6. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *проективная размерность каждого левого Λ-модуля не превосходит n;*

(b) *инъективная размерность каждого левого Λ-модуля не превосходит n;*

(c) $\operatorname{Ext}^k_\Lambda = 0$, *если $k > n$;*

(d) $\operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda = 0$;

(e) *функтор $\operatorname{Ext}^n_\Lambda$ точен справа.*

Здесь $\operatorname{Ext}^k_\Lambda$ рассматривается как функтор от левых Λ-модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e) очевидны. Равносильность свойств (a) и (d) вытекает из предложения 2.1, а равносильность свойств (b) и (d) — из предложения 2.1а.

Наименьшее целое число $n \geq 0$, для которого выполняются свойства (a)—(e), называется *левой глобальной размерностью* кольца Λ (обозначение: $\text{l. gl. dim}\, \Lambda$). *Правая глобальная размерность* кольца Λ определяется аналогично[2]. Нам неизвестно никаких других соотношений между левой и правой глобальными размерностями, кроме следующего утверждения, вытекающего из совпадения поня-

---

[1] См., впрочем, стр. 159. — *Прим. ред.*

[2] И обозначается $\text{r. gl. dim}\, \Lambda$. — *Прим. перев.*

тий полупростоты слева и полупростоты справа кольца Λ и из того, что каждое из этих понятий равносильно проективности произвольного Λ-модуля:

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *кольцо Λ полупросто;*

(b) $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\Lambda = 0$;

(c) $\mathrm{r.\,gl.\,dim}\,\Lambda = 0$.

Заметим, что $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\Lambda = \mathrm{r.\,gl.\,dim}\,\Lambda^*$. Поэтому для коммутативного кольца Λ левая и правая глобальные размерности совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Кольцо Λ тогда и только тогда наследственно слева, когда* $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\Lambda \leq 1$.

Непосредственно следует из предложения 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Если кольцо Λ полунаследственно (слева или справа), то $\mathrm{Tor}_n^\Lambda = 0$ для всех $n > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая, что кольцо Λ полунаследственно слева, рассмотрим произвольную точную последовательность $0 \to M \to P \to C \to 0$ левых Λ-модулей с проективным модулем P. Как мы знаем, $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, C) \approx \mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda(A, M)$. Следовательно, поскольку функтор $\mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda$ перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, достаточно доказать, что $\mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda(A, M') = 0$ для любого подмодуля M' с конечным числом образующих модуля M. Но, согласно предложению I, 6.2, каждый такой подмодуль M' является проективным модулем, и потому $\mathrm{Tor}_{n-1}^\Lambda(A, M') = 0$ для любого $n > 1$.

3. СООТНОШЕНИЯ КЮННЕТА

Пусть A — правый, а C — левый Λ-комплексы. В этом параграфе мы установим некоторые соотношения между градуированными группами $H(A \otimes C)$, $H(A) \otimes H(C)$ и $\mathrm{Tor}_1(H(A), H(C))$, где $\otimes = \otimes_\Lambda$. При этом мы будем предполагать, что

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Tor}_1(B(A), B(C)) = 0 = \mathrm{Tor}_1(H(A), B(C)),\\ \mathrm{Tor}_1(B(A), Z(C)) = 0 = \mathrm{Tor}_1(H(A), Z(C)). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала функтор $T(D) = D \otimes B(C)$. Так как $S_1T(B(A)) = S_1T(H(A)) = 0$, то из точности последовательности $0 \to B(A) \to Z(A) \to H(A) \to 0$ вытекает, что $S_1T(Z(A)) = 0$. Таким образом, к функтору T применима теорема IV, 8.1, согласно которой отображение $\alpha_1 : T(H(A)) \to H(T(A))$, т. е. отображение

$$\alpha_1 : H(A) \otimes B(C) \to H(A \otimes B(C)),$$

изоморфно. Аналогично, отображение

$$\alpha_2 : H(A) \otimes Z(C) \to H(A \otimes Z(C))$$

также изоморфно.

Рассмотрим теперь $A \otimes C$ как функтор двух аргументов. Так как $\mathrm{Tor}_1(B(A), B(C)) = \mathrm{Tor}_1(H(A), B(C)) = 0$, то из точности последовательности $0 \to B(A) \to Z(A) \to H(A) \to 0$ вытекает, что $\mathrm{Tor}_1(Z(A), B(C)) = 0$. Отсюда и из точности последовательности $0 \to Z(A) \to A \to B(A) \to 0$ следует, что $\mathrm{Tor}_1(A, B(C)) = 0$. Таким образом, функтор $A \otimes C$ удовлетворяет всем условиям теоремы IV, 8.1 и, следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *При выполнении соотношений* (1) *имеет место точная последовательность*

$$(2)\quad 0 \longrightarrow H(A) \otimes H(C) \xrightarrow{\alpha} H(A \otimes C) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(H(A), H(C)) \longrightarrow 0,$$

где гомоморфизм α *имеет степень* 0, *а гомоморфизм* β — *степень* 1. *В раскрытом виде эта последовательность имеет вид*

$$(2')\quad 0 \to \sum_{p+q=n} H_p(A) \otimes H_q(C) \to H_n(A \otimes C) \to \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1(H_p(A), H_q(C)) \to 0.$$

Если кольцо Λ полунаследственно (слева или справа), то соотношения (1) равносильны соотношениям

$$(1')\qquad \mathrm{Tor}_1(B(A), C) = 0 = \mathrm{Tor}_1(H(A), C).$$

Действительно, импликация $(1) \Rightarrow (1')$ вытекает из точности последовательности $0 \to Z(C) \to C \to B(C) \to 0$, а импликация $(1') \Rightarrow (1)$ — из того, что функтор Tor_1 точен слева, когда кольцо Λ полунаследственно. В частности, соотношения (1′) имеют место для любого проективного комплекса C.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если кольцо* Λ *наследственно слева и справа, а* Λ*-комплексы* A *и* C *проективны, то последовательность* (2) *точна и расщепляема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку соотношения (1′) выполнены, последовательность (2) точна. Далее, так как комплексы A и C проективны, а кольцо Λ наследственно, то модули $B'(A)$ и $B'(C)$ также проективны. Следовательно, точные последовательности

$$0 \longrightarrow H(A) \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H(C) \longrightarrow Z'(C) \longrightarrow B'(C) \longrightarrow 0$$

расщепляемы. Поэтому, согласно предложению IV, 6.2, образ гомоморфизма α служит прямым слагаемым модуля $H(A \otimes C)$, т. е. последовательность (2) расщепляема.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий теоремы 3.2 справедливы соотношения, получающиеся из соотношений (1) при перестановке в них комплексов A и C. Поэтому имеет место еще одна точная последовательность вида (2). Можно показать, что в обеих точных последовательностях отображения α совпадают. Однако нам неизвестно, совпадают ли в них отображения β.

Рассмотрим теперь случай, когда A является лишь Λ-модулем (а не Λ-комплексом). В этом случае мы будем рассматривать тензорное произведение $A \otimes C$ как функтор одного аргумента C. При этом, поскольку $B(A)=0$ и $H(A)=A$, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.3. (Теорема об универсальных коэффициентах для групп гомологий). *Для любого правого Λ-модуля A и любого левого Λ-комплекса C, удовлетворяющих соотношениям*

$$\mathrm{Tor}_1(A, B(C)) = 0 = \mathrm{Tor}_1(A, Z(C)), \tag{3}$$

имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \otimes H_n(C) \xrightarrow{\alpha} H_n(A \otimes C) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(A, H_{n-1}(C)) \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Если кольцо Λ полунаследственно слева или справа, то соотношение (3) *равносильно соотношению*

$$\mathrm{Tor}_1(A, C) = 0. \tag{3'}$$

Если кольцо Λ наследственно слева и комплекс C Λ-проективен, то последовательность (4) *точна и расщепляема.*

Сформулируем теперь (без доказательств) аналогичные результаты для функтора Hom (т. е. для функтора Hom_Λ). В этом случае аргументы A и C оба предполагаются левыми Λ-комплексами.

Пусть

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1(B(A), B'(C)) = 0 = \mathrm{Ext}^1(B(A), H(C)),\\ &\mathrm{Ext}^1(Z(A), B'(C)) = 0 = \mathrm{Ext}^1(Z(A), H(C)). \end{aligned} \tag{1a}$$

ТЕОРЕМА 3.1а. *При выполнении соотношений* (1а) *имеет место точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H(A), H(C)) \xrightarrow{\beta'} H(\mathrm{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}(H(A), H(C)) \to 0, \tag{2a}$$

где гомоморфизм β' имеет степень 1, а гомоморфизм α' — степень 0.

Имеет место также и аналог этой теоремы, в котором предполагается выполнение соотношений, двойственных соотношениям (1а).

Если кольцо Λ наследственно слева, то соотношения (1а) равносильны соотношениям

$$\mathrm{Ext}^1(A, B'(C)) = 0 = \mathrm{Ext}^1(A, H(C)). \tag{1'a}$$

Соотношения (1'а) выполняются, в частности, для любого проективного комплекса A.

ТЕОРЕМА 3.2а. *Если кольцо Λ наследственно слева, комплекс A проективен, а комплекс C инъективен, то последовательность* (2а) *точна и расщепляема.*

ТЕОРЕМА 3.3а. (Теорема об универсальных коэффициентах для групп когомологий[1]). *Для любого*

---

[1] О когомологиях см. примечание редактора на стр. 184. — *Прим. ред.*

левого Λ-комплекса A и любого левого Λ-модуля C, удовлетворяющих соотношениям

$$\text{(3a)} \qquad \operatorname{Ext}^1(B(A), C) = 0 = \operatorname{Ext}^1(Z(A), C),$$

имеет место точная последовательность

$$\text{(4a)}\ 0 \to \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(A), C) \xrightarrow{\beta'} H^n(\operatorname{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\alpha'} \operatorname{Hom}(H_n(A), C) \to 0.$$

Если кольцо Λ наследственно слева, то соотношения (3a) *равносильны соотношению*

$$\text{(3'a)} \qquad \operatorname{Ext}^1(A, C) = 0.$$

Если кольцо Λ наследственно слева и комплекс A проективен, то последовательность (4a) *точна и расщепляема.*

Используем теперь полученные результаты для вывода некоторых соотношений ассоциативности, которым удовлетворяют функторы Tor и Ext.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *В ситуации $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, {}_\Gamma C)$, где Λ и Γ — полунаследственные слева или справа кольца, B — произвольный модуль, A — произвольный Λ-проективный комплекс и C — произвольный Γ-проективный комплекс, имеют место точные последовательности*

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow H(A) \otimes_\Lambda H(B \otimes_\Gamma C) \xrightarrow{\alpha} H(A \otimes_\Lambda (B \otimes_\Gamma C)) \xrightarrow{\beta} \\ \text{(5)} \qquad &\xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor}_1^\Lambda(H(A), H(B \otimes_\Gamma C)) \longrightarrow 0, \\ &0 \longrightarrow H(A \otimes_\Lambda B) \otimes_\Gamma H(C) \xrightarrow{\alpha} H((A \otimes_\Lambda B) \otimes_\Gamma C) \xrightarrow{\beta} \\ \text{(6)} \qquad &\xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor}_1^\Gamma(H(A \otimes_\Lambda B), H(C)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где гомоморфизм α имеет степень 0, а гомоморфизм β — степень 1. Если, кроме того, кольцо Λ коммутативно и совпадает с кольцом Γ, а B является Λ-модулем, то точные последовательности (5) *и* (6) *расщепляемы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точность последовательности (6) непосредственно следует из теоремы 3.1, примененной к комплексам $A \otimes_\Lambda B$ и C, поскольку при наших предположениях эти комплексы удовлетворяют соотношениям (1′). Точность последовательности (5) устанавливается аналогично. Чтобы доказать вторую часть предложения, заметим, что для проективной резольвенты Y модуля B соответствующее пополняющее отображение $Y \to B$ определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H(Y) \otimes H(C) & \longrightarrow & H(Y \otimes C) & \longrightarrow & \operatorname{Tor}_1(H(Y), H(C)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B \otimes H(C) & \longrightarrow & H(B \otimes C) & \longrightarrow & \operatorname{Tor}_1(B, H(C)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Так как строки этой диаграммы точны, а отображение $H(Y) \to H(B) = B$ изоморфно, то из предложения I, 1.1 («лемма о пяти гомоморфизмах») вытекает, что отображение $H(Y \otimes C) \to H(B \otimes C)$ также изоморфно. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H(A)\otimes H(Y\otimes C) \arrow[r] \arrow[d] & H(A\otimes(Y\otimes C)) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Tor}_1(H(A), H(Y\otimes C)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H(A)\otimes H(B\otimes C) \arrow[r] & H(A\otimes(B\otimes C)) \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1(H(A), H(B\otimes C)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Поскольку два крайних отображения этой диаграммы являются изоморфизмами, из того же предложения I, 1.1 следует, что среднее вертикальное отображение также является изоморфизмом. Так как, согласно предложению II, 5.3, комплекс $Y \otimes C$ проективен, то в силу теоремы 3.2 верхняя строка диаграммы расщепляема и, следовательно, нижняя строка диаграммы, т. е. точная последовательность (5), также расщепляема. Расщепляемость точной последовательности (6) доказывается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Если в ситуации* $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, {}_\Gamma C)$ *кольца* Λ *и* Γ *полунаследственны слева или справа, то имеет место естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, \operatorname{Tor}_1^\Gamma(B, C)) \approx \operatorname{Tor}_1^\Gamma(\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, B), C). \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — произвольная Λ-проективная резольвента модуля A, а Y — произвольная Γ-проективная резольвента модуля C. Из предложения 3.4, примененного к тройке (X, B, Y), вытекает, что

$$H_2(X\otimes_\Lambda(B\otimes_\Gamma Y)) \approx \operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, \operatorname{Tor}_1^\Gamma(B, C)),$$
$$H_2((X\otimes_\Lambda B)\otimes_\Gamma Y) \approx \operatorname{Tor}_1^\Gamma(\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, B), C),$$

откуда наше утверждение следует непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Если кольцо Λ коммутативно и наследственно, то для любых Λ-модулей A, B, C имеет место (не являющийся естественным) изоморфизм*

$$\begin{aligned} A \otimes \operatorname{Tor}_1(B, C) + \operatorname{Tor}_1(A, B \otimes C) &\approx \\ \approx \operatorname{Tor}_1(A, B) \otimes C + \operatorname{Tor}_1(A \otimes B, C)&. \end{aligned} \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X и Y — проективные резольвенты модулей A и C соответственно. Применяя к тройке (X, B, Y) предложение 3.4, мы получим точные последовательности

$$0 \to A \otimes \operatorname{Tor}_1(B, C) \to H_1(X \otimes (B \otimes Y)) \to \operatorname{Tor}_1(A, B \otimes C) \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Tor}_1(A, B) \otimes C \to H_1((X \otimes B) \otimes Y) \to \operatorname{Tor}_1(A \otimes B, C) \to 0.$$

Остается заметить, что в силу того же предложения 3.4 эти последовательности расщепляемы.

Сформулируем теперь (без доказательств) аналогичные результаты для функторов Hom и Ext.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4а. *В ситуации* $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$, *где* Λ *и* Γ — *наследственные справа кольца,* A — *произвольный* Λ*-проективный комплекс и* C — *произвольный* Γ*-инъективный комплекс, имеют место точные последовательности*

(5а) $0 \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(H(A), H(D)) \to H(\operatorname{Hom}_\Lambda(A, D)) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(H(A), H(D)) \to 0,$

(6а) $0 \to \operatorname{Ext}^1_\Gamma(H(E), H(C)) \to H(\operatorname{Hom}_\Gamma(E, C)) \to \operatorname{Hom}_\Gamma(H(E), H(C)) \to 0,$

где $D = \operatorname{Hom}_\Gamma(B, C)$, $E = A \otimes_\Lambda B$.

Если, кроме того, кольцо Λ *коммутативно и совпадает с кольцом* Γ, *а* B *является* Λ*-модулем, то точные последовательности* (5а) *и* (6а) *расщепляемы.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5а. *Если в ситуации* $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$ *кольца* Λ *и* Γ *наследственны справа, то имеет место естественный изоморфизм*

(7а) $$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, \operatorname{Ext}^1_\Gamma(B, C)) \approx \operatorname{Ext}^1_\Gamma(\operatorname{Tor}^\Lambda(A, B), C).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6а. *Если кольцо* Λ *коммутативно и наследственно справа, то для любых* Λ*-модулей* A, B, C *имеет место (не являющийся естественным) изоморфизм*

(8а) $$\operatorname{Ext}^1(A, \operatorname{Hom}(B, C)) + \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Ext}^1(B, C)) \approx$$
$$\approx \operatorname{Ext}^1(A \otimes B, C) + \operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}_1(A, B), C).$$

В гл. XVI мы вернемся к рассмотренным здесь вопросам и с помощью спектральных последовательностей существенно усилим эти результаты.

4. ЗАМЕНА КОЛЕЦ

Вернемся к начатому в § II, 6 изучению вопроса о замене основного кольца с помощью некоторого гомоморфизма колец $\varphi: \Lambda \to \Gamma$. При этом мы по отдельности рассмотрим следующие четыре случая, каждый из которых обозначим соответствующим символом.

Случай 1. $(A_\Lambda, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma, {}_\Gamma C)$. В этом случае

(1) $$A \otimes_\Lambda C = A_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C.$$

Пусть X — произвольная Λ-проективная резольвента модуля A. Тогда $X_{(\varphi)}$ является Γ-проективным левым комплексом над модулем $A_{(\varphi)}$ (см. предложение II, 6.1). Пусть

(i) $$f_{1,n}: H_n(X_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C) \longrightarrow \operatorname{Tor}^\Gamma_n(A_{(\varphi)}, C)$$

— соответствующий гомоморфизм (3а) из § V, 3. Так как, согласно соотношению (1),

$$H_n(X_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C) = H_n(X \otimes_\Lambda C) = \operatorname{Tor}^\Lambda_n(A, C),$$

то

$$f_{1,n} : \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A_{(\varphi)}, C).$$

Для $n = 0$ этот гомоморфизм является тождественным отображением [в силу отождествления (1)]. Гомоморфизм $f_{1,n}$ можно также получить, рассматривая функтор

$$T(A, C) = A \otimes_{\Lambda} C = A_{(\varphi)} \otimes_{\Gamma} C.$$

Действительно,

$$L_n T(A, C) = L_n^{(1)} T(A, C) = \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C),$$
$$L_n^{(2)} T(A, C) = \mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A_{(\varphi)}, C),$$

где через $L_n^{(1)}T$ и $L_n^{(2)}T$ обозначены левые частные производные функторы относительно первого и второго аргументов соответственно. Легко видеть, что гомоморфизм $f_{1,n}$ совпадает с определенным в § V, 8 гомоморфизмом $L_n T \to L_n^{(2)} T$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.1. *Если* $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, \Gamma) = 0$ *для всех* $p > 0$, *то гомоморфизм* $f_{1,n}$ *является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, \Gamma) = H_p(X \otimes_{\Lambda} \Gamma) = H_p(X_{(\varphi)}),$$

то в силу нашего предположения комплекс $X_{(\varphi)}$ ацикличен и, следовательно, является проективной резольвентой модуля $A_{(\varphi)}$. Таким образом, гомоморфизм (i), а вместе с ним и гомоморфизм $f_{1,n}$ являются изоморфизмами.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.1. *Если в ситуации* $(A_{\Gamma}, {}_{\Gamma}C)$ *модули* Γ *и* C Λ-*проективны, а модуль* A φ-*проективен, то* $\mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A, C) = 0$ *для всех* $n > 0$.

Действительно, так как модуль A изоморфен прямому слагаемому модуля $A_{(\varphi)}$, то достаточно показать, что $\mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A_{(\varphi)}, C) = 0$ для всех $n > 0$. Но, согласно предложению 4.1.1, модуль $\mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A_{(\varphi)}, C)$ изоморфен модулю $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C)$, который для любого $n > 0$ равен нулю, ибо модуль C Λ-проективен.

Случай 2. $(A_{\Gamma}, {}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Lambda}C)$. В этом случае

$$(2) \qquad A \otimes_{\Lambda} C = A \otimes_{\Gamma} ({}_{(\varphi)}C).$$

Рассматривая некоторую Λ-проективную резольвенту модуля C, мы получим гомоморфизм

$$f_{2,n} : \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A, {}_{(\varphi)}C),$$

являющийся для $n = 0$ тождественным отображением [в силу отождествления (2)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.2. *Если* $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(\Gamma, C) = 0$ *для всех* $p > 0$, *то гомоморфизм* $f_{2,n}$ *является изоморфизмом.*

СЛЕДСТВИЕ 4.2.2. *Если в ситуации* $(A_{\Gamma}, {}_{\Gamma}C)$ *модули* Γ *и* A Λ-*проективны, а модуль* C φ-*проективен, то* $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) = 0$ *для всех* $n > 0$.

Случай 3. $({}_{\Lambda}A, {}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Gamma}C)$. В этом случае

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}({}_{(\varphi)}A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C). \tag{3}$$

Рассматривая некоторую Λ-проективную резольвенту модуля A, мы получим гомоморфизм

$$f_{3,n}: \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{n}({}_{(\varphi)}A, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(A, C),$$

являющийся для $n = 0$ тождественным отображением [в силу отождествления (3)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.3. *Если* $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(\Gamma, A) = 0$ *для всех* $p > 0$, *то гомоморфизм* $f_{3,n}$ *является изоморфизмом.*

СЛЕДСТВИЕ 4.2.3. *Если в ситуации* $({}_{\Gamma}A, {}_{\Gamma}C)$ *модуль* Γ Λ*-проективен, модуль* C Λ*-инъективен, а модуль* A φ*-проективен, то* $\mathrm{Ext}_{\Gamma}^{n}(A, C) = 0$ *для всех* $n > 0$.

Случай 4. $({}_{\Gamma}A, {}_{\Lambda}\Gamma_{\Gamma}, {}_{\Lambda}C)$. В этом случае

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(A, {}^{(\varphi)}C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C). \tag{4}$$

Рассматривая некоторую Λ-инъективную резольвенту модуля C, мы получим гомоморфизм

$$f_{4,n}: \mathrm{Ext}_{\Gamma}^{n}(A, {}^{(\varphi)}C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n}(A, C),$$

являющийся для $n = 0$ тождественным отображением [в силу отождествления (4)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.4. *Если* $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{p}(\Gamma, C) = 0$ *для всех* $p > 0$, *то гомоморфизм* $f_{4,n}$ *является изоморфизмом.*

СЛЕДСТВИЕ 4.2.4. *Если в ситуации* $({}_{\Gamma}A, {}_{\Gamma}C)$ *модули* Γ *и* A Λ*-проективны, а модуль* C φ*-инъективен, то* $\mathrm{Ext}_{\Gamma}^{n}(A, C) = 0$ *для всех* $n > 0$.

Можно было бы рассмотреть еще случаи 3′ и 4′, символически записываемые в виде $(A_{\Lambda}, {}_{\Lambda}\Gamma_{\Gamma}, C_{\Gamma})$ и $(A_{\Gamma}, {}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda}, C_{\Lambda})$. При этом нужно было бы воспользоваться соотношениями (3′) и (4′) из § II, 6. Однако эти случаи отличаются от случаев 3 и 4 лишь тем, что кольца левых операторов всюду заменяются кольцами правых операторов, и наоборот. Поэтому для них имеют место те же результаты; нужно только в случае 3′ модуль $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(\Gamma, A)$ заменить модулем $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, \Gamma)$.

Рассмотрим теперь ситуацию $(A_{\Gamma}, {}_{\Gamma}C)$ и определим некоторый гомоморфизм

$$\varphi_n: \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A, C).$$

С этой целью определим гомоморфизм $\varphi_0: A \otimes_{\Lambda} C \to A \otimes_{\Gamma} C$ при помощи соответствия $a \otimes_{\Lambda} c \to a \otimes_{\Gamma} c$. Пусть X и Y — произвольные Γ-проективные резольвенты модулей A и C соответственно. Как Λ-модули эти резольвенты являются, очевидно, левыми ациклическими комплексами над Λ-модулями A и C. Поэтому, согласно § V, 3, имеет место гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \longrightarrow H_n(X \otimes_{\Lambda} Y). \tag{5}$$

Пусть, далее,

$$(6) \qquad H_n(X \otimes_\Lambda Y) \longrightarrow H_n(X \otimes_\Gamma Y) = \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A, C)$$

— гомоморфизм, индуцированный отображением $\varphi_0 : X \otimes_\Lambda Y \to X \otimes_\Gamma Y$. Мы определим гомоморфизм φ_n как композицию гомоморфизмов (5) и (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Для любого правого Γ-модуля A и любого левого Γ-модуля C имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) \arrow[r, "f_{1,n}"] \arrow[d, "f_{2,n}"'] \arrow[dr, "\varphi_n"] & \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A_{(\varphi)}, C) \arrow[d, "g_n"] \\
\operatorname{Tor}_n^\Gamma(A, {}_{(\varphi)}C) \arrow[r, "g'_n"'] & \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A, C)
\end{tikzcd}$$

где g_n и g'_n — отображения, индуцированные отображениями $g : A_{(\varphi)} \to A$ и $g' : {}_{(\varphi)}C \to C$ соответственно.

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

В ситуации $({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$ можно аналогично определить некоторый гомоморфизм

$$\varphi^n : \operatorname{Ext}_\Gamma^n(A, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^n(A, C),$$

рассматривая произвольную Γ-проективную резольвенту модуля A и произвольную Γ-инъективную резольвенту модуля C.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4а. *Для любых левых Γ-модулей A и C имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}_\Gamma^n(A, C) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "h_n"'] \arrow[dr, "\varphi^n"] & \operatorname{Ext}_\Gamma^n({}_{(\varphi)}A, C) \arrow[d, "f_{3,n}"] \\
\operatorname{Ext}_\Gamma^n(A, {}^{(\varphi)}C) \arrow[r, "f_{4,n}"'] & \operatorname{Ext}_\Lambda^n(A, C)
\end{tikzcd}$$

где g_n и h_n — отображения, индуцированные отображениями $g : {}_{(\varphi)}A \to A$ и $h : C \to {}^{(\varphi)}C$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определений гомоморфизмов φ_n и φ^n очевидно, что эти гомоморфизмы перестановочны со связывающими гомоморфизмами, построенными для каждого из аргументов.

5. ГОМОМОРФИЗМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассмотрим ситуацию, описываемую символом $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$. Как мы знаем (см. предложение II, 5.2′), имеет место естественный изоморфизм

$$(1) \qquad \operatorname{Hom}_\Lambda(A, \operatorname{Hom}_\Gamma(B, C)) \approx \operatorname{Hom}_\Gamma(A \otimes_\Lambda B, C).$$

Следовательно, для любой проективной резольвенты X модуля A

$$\operatorname{Ext}_\Lambda(A, \operatorname{Hom}_\Gamma(B, C)) = H(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \operatorname{Hom}_\Gamma(B, C))) \approx H(\operatorname{Hom}_\Gamma(X \otimes_\Lambda B, C)).$$

Композицию этого изоморфизма с рассмотренным в предложении IV, 6.1а гомоморфизмом

$$H(\mathrm{Hom}_\Gamma(X\otimes_\Lambda B, C)) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}_\Gamma(H(X\otimes_\Lambda B), C) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Tor}^\Lambda(A, B), C)$$

мы обозначим через

(2) $$\varrho : \mathrm{Ext}_\Lambda (A, \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma (\mathrm{Tor}^\Lambda (A, B), C).$$

На составляющих нулевой степени этот гомоморфизм совпадает с изоморфизмом (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если модуль C Γ-инъективен, то гомоморфизм ϱ является изоморфизмом.*

Действительно, согласно теореме IV, 7.2, отображение α': $: H(T(X \otimes B)) \to T(H(X \otimes B))$ изоморфно, поскольку функтор $T(D) = \mathrm{Hom}_\Gamma (D, C)$ точен.

Этот результат, вместе с многими другими подобными результатами, будет еще раз установлен в гл. XVI с помощью спектральных последовательностей. Гомоморфизм ϱ и предложение 5.1 можно также получить, используя результаты § III, 6 о сателлитах сложных функторов.

Перейдем теперь к ситуации, описываемой символом $({}_\Lambda A, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$. В этой ситуации мы будем изучать гомоморфизм

(3) $$\sigma : \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C) \otimes_\Lambda A \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma (\mathrm{Hom}_\Lambda (A, B), C),$$

для которого

$$[\sigma(f \otimes a)]\, g = f(ga), \text{ где } f \in \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C),\ g \in \mathrm{Hom}_\Lambda (A, B).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если модуль A Λ-проективен и имеет конечное число образующих, то гомоморфизм σ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $A = \Lambda$, предложение очевидно. Поэтому, поскольку рассматриваемые функторы по условию аддитивны, предложение справедливо и в случае, когда модуль A является свободным Λ-модулем с конечной базой, а следовательно, и тогда, когда модуль A служит прямым слагаемым некоторого свободного модуля с конечной базой.

Пусть теперь X — произвольная проективная резольвента модуля A.

Рассмотрим гомоморфизм

(4) $$\sigma : \mathrm{Tor}^\Lambda (\mathrm{Hom}_\Gamma (B, C), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma (\mathrm{Ext}_\Lambda (A, B), C),$$

являющийся композицией

$$H(\mathrm{Hom}_\Gamma (B, C) \otimes_\Lambda X) \longrightarrow H(\mathrm{Hom}_\Gamma (\mathrm{Hom}_\Lambda (X, B), C)) \xrightarrow{\alpha'}$$
$$\xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}_\Gamma (H(\mathrm{Hom}_\Lambda (X, B)), C)$$

гомоморфизма (3) с определенным в § IV, 6 гомоморфизмом α'. На составляющих нулевой степени этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Если кольцо Λ нетерово слева, модуль A имеет над Λ конечное число образующих, а модуль C Γ-инъективен, то гомоморфизм σ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как модуль C Γ-инъективен, то функтор $\mathrm{Hom}_\Gamma(D, C)$ точен и поэтому, согласно теореме IV, 7.2, отображение α' изоморфно. Далее, так как кольцо Λ нетерово слева и модуль A имеет над Λ конечное число образующих, то, согласно предложению V, 1.3, модуль A обладает по крайней мере одной проективной резольвентой X, все однородные составляющие которой являются проективными модулями с конечным числом образующих. Остается воспользоваться предложением 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо требований, что кольцо Λ нетерово слева и что число образующих модуля A конечно, достаточно предположить, что модуль A обладает по крайней мере одной проективной резольвентой, составленной из проективных модулей с конечным числом образующих.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Если кольцо Λ нетерово и наследственно слева, а модуль A имеет конечное число образующих, то отображение*

$$\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Ext}_\Lambda^1(A, B), C)$$

изоморфно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

с проективным модулем X_0, имеющим конечное число образующих. Так как кольцо Λ нетерово и наследственно, то модуль X_1 также проективен и имеет конечное число образующих. Таким образом, рассматриваемую точную последовательность можно принять за проективную резольвенту X модуля A. Так как, согласно предложению 5.2, отображение

$$H_1(\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C) \otimes_\Lambda X) \longrightarrow H_1(\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, B), C))$$

изоморфно, то для доказательства предложения 5.4 достаточно показать, что отображение

$$\alpha' : H_1(\mathrm{Hom}_\Gamma(Y, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(H^1(Y), C),$$

где $Y = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B)$, также является изоморфизмом. В силу точности слева функтора Hom_Γ точная последовательность

$$Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow H^1(Y) \longrightarrow 0$$

порождает точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(H^1(Y), C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(Y^1, C) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_\Gamma(Y^0, C).$$

Соответствующее этой последовательности изоморфное отображение модуля $\mathrm{Hom}_\Gamma(H^1(Y), C)$ на модуль $\mathrm{Ker}(\gamma) = H_1(\mathrm{Hom}_\Gamma(Y, C))$ совпадает, очевидно, с отображением α'.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Lambda = \Gamma = B$. В этом случае модуль $\operatorname{Hom}_\Gamma(B, C)$ можно отождествить с модулем C, после чего гомоморфизм (4) принимает вид

$$(4') \qquad \sigma : \operatorname{Tor}^\Lambda(C, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ext}_\Lambda(A, \Lambda), C), \qquad ({}_\Lambda A, C_\Lambda).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Если кольцо Λ нетерово и наследственно слева, то отображение*

$$\sigma_1 : \operatorname{Tor}_1^\Lambda(C, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ext}_\Lambda^1(A, \Lambda), C)$$

мономорфно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_α — произвольный подмодуль модуля A, обладающий конечным числом образующих. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Tor}_1(C, A_\alpha) & \xrightarrow{\sigma_{1,\alpha}} & \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^1(A_\alpha, \Lambda), C) \\
\Big\downarrow i_\alpha & & \Big\downarrow j_\alpha \\
\operatorname{Tor}_1(C, A) & \xrightarrow[\sigma_1]{} & \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^1(A, \Lambda), C)
\end{array}$$

Поскольку кольцо Λ наследственно, из предложения 2.8 и теоремы 2.6 вытекает, что функтор $\operatorname{Ext}_\Lambda^1$ точен справа. Но в таком случае функтор $\operatorname{Hom}_\Gamma(\operatorname{Ext}_\Lambda^1(A, \Lambda), C)$ точен слева и, следовательно, отображение j_α мономорфно. Так как, согласно предложению 5.4, отображение $\sigma_{1,\alpha}$ также мономорфно, то мономорфным является и отображение $\sigma_1 i_\alpha$. С другой стороны, поскольку функтор $\operatorname{Tor}_1(C, A)$ перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, модуль $\operatorname{Tor}_1(C, A)$ является объединением образов отображений i_α для всех подмодулей A_α модуля A, имеющих конечное число образующих. Мономорфность отображения σ_1 следует отсюда непосредственно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $Z_n = Z/nZ$. Используя результат упражнения I, 5, построить для каждого делителя r числа n точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow Z_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow rZ_n \longrightarrow 0.$$

Показать, что проективная размерность Z_n-модуля rZ_n равна либо 0, либо ∞, в зависимости от того, взаимно просто или нет число r с числом n/r. Вывести отсюда, что кольцо Z_n либо полупросто, либо $\operatorname{gl.dim} Z_n = \infty$.

2. Пусть кольцо Λ коммутативно и нетерово. Показать, что для любых Λ-модулей A и C с конечным числом образующих Λ-модули $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C)$ и $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(A, C)$ также имеют конечное число образующих (см. упражнение II, 6).

3. Определим *слабую размерность* $\operatorname{w.dim}_\Lambda A$ левого Λ-модуля A как такое максимальное число n, что $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(C, A) \neq 0$ для некоторого правого Λ-модуля C. Если $\operatorname{w.dim}_\Lambda A = 0$ (т. е. если $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(C, A) =$

$= 0$ для всех правых модулей C и для всех n), то A называется Λ-плоским модулем. Для правых Λ-модулей аналогичные понятия вводятся подобным же образом.

(a) Показать, что $\mathrm{w.\,dim}_\Lambda A \leq \dim_\Lambda A$.

(b) Показать, что если кольцо Λ нетерово слева, а модуль A имеет конечное число образующих, то

$$\mathrm{w.\,dim}_\Lambda A = \dim_\Lambda A.$$

(Указание: воспользоваться предложением 5.3.) Доказать аналогичные утверждения для правых Λ-модулей.

4. Показать, что если кольцо Λ нетерово слева, то для любого семейства $\{A_\alpha\}$ правых Λ-модулей прямое произведение ΠA_α тогда и только тогда является Λ-плоским модулем, когда Λ-плоским модулем является каждый прямой сомножитель A_α. (Указание: воспользоваться результатом упражнения II, 2.)

5. Для любого правого Λ-модуля A и любого левого идеала I кольца Λ доказать равносильность следующих свойств:

(a) для каждого соотношения $\sum_i a_i \mu_i = 0$ $(a_i \in A,\ \mu_i \in I)$ существует конечное число таких элементов $b_j \in A$, $\lambda_{ij} \in \Lambda$, что

$$a_i = \sum_j b_j \lambda_{ij}, \quad \sum_i \lambda_{ij} \mu_i = 0;$$

(b) отображение $A \otimes_\Lambda I \to A \otimes_\Lambda \Lambda = A$ мономорфно;

(c) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda (A, \Lambda/I) = 0$;

(d) $N \cap (PI) = NI$ для любой точной последовательности $0 \to N \to P \to A \to 0$ с Λ-проективным модулем P;

(e) существует такая точная последовательность $0 \to N \to P \to \to A \to 0$ с проективным модулем P, что $N \cap (PI) = NI$.

6. Доказать равносильность следующих свойств:

(a) правый Λ-модуль A является Λ-плоским модулем;

(b) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda (A, \Lambda/I) = 0$ для любого левого идеала I кольца Λ;

(c) для каждого соотношения $\sum_i a_i \mu_i = 0$ $(a_i \in A,\ \mu_i \in \Lambda)$ существует конечное число таких элементов $b_j \in A$, $\lambda_{ij} \in \Lambda$, что

$$a_i = \sum_j b_j \lambda_{ij}, \quad \sum_i \lambda_{ij} \mu_i = 0.$$

Свойство (c) означает, что каждое линейное соотношение в модуле A является следствием некоторого линейного соотношения в кольце Λ.

7. Показать, что если Λ-модуль A является прямой суммой Λ-модулей A_α, то

$$\dim A = \sup_\alpha \dim A_\alpha, \qquad \mathrm{w.\,dim}\, A = \sup_\alpha \mathrm{w.\,dim}\, A_\alpha.$$

Сформулировать аналогичное утверждение для инъективной размерности прямого произведения.

8. Пусть кольцо Λ является прямой суммой $\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_n$ колец $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$. Показать, что

$$\text{l. gl. dim}\, \Lambda = \sup_i \text{l. gl. dim}\, \Lambda_i.$$

9. Показать, что если $\text{l. dim}_\Lambda A = n$, $0 \leq n < \infty$, то существует по крайней мере один такой свободный Λ-модуль F, что $\text{Ext}^n_\Lambda(A, F) \neq 0$. Если, кроме того, кольцо Λ нетерово слева и модуль A имеет конечное число образующих, то $\text{Ext}^n_\Lambda(A, \Lambda) \neq 0$. (Указание: подобрав модуль C, для которого $\text{Ext}^n_\Lambda(A, C) \neq 0$, рассмотреть точную последовательность $0 \to B \to F \to C \to 0$ со свободным модулем F.)

10. Пусть $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ — некоторый гомоморфизм колец. Показать что для любого левого Γ-модуля A:

$\text{w. dim}_\Lambda A \leq \text{w. dim}_\Gamma A$, если кольцо Γ является левым Λ-плоским модулем;
$\dim_\Lambda A \leq \dim_\Gamma A$, если кольцо Γ является левым Λ-проективным модулем;
$\text{inj. dim}_\Lambda^{1)} A \leq \text{inj. dim}_\Gamma A$, если кольцо Γ является правым Λ-плоским модулем.

Показать, что для любого левого Λ-модуля A:
$\text{w. dim}_\Gamma({}_{(\varphi)}A) \leq \text{w. dim}_\Lambda A$, если кольцо Γ является правым Λ-плоским модулем;
$\dim_\Gamma({}_{(\varphi)}A) \leq \dim_\Lambda A$, если кольцо Γ является правым Λ-плоским модулем;
$\text{inj. dim}_\Gamma({}_{(\varphi)}A) \leq \text{inj. dim}_\Lambda A$, если кольцо Γ является левым Λ-проективным модулем.
(Указание: воспользоваться предложениями 4.1.1—4.1.4.)

11. Показать, что если гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ коммутативных колец определяет кольцо Γ как Λ-плоский модуль, то для любых Λ-модулей A и C имеет место естественный изоморфизм

$$(A \otimes_\Lambda C)_{(\varphi)} \approx A_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C_{(\varphi)}.$$

Вывести отсюда естественный изоморфизм

$$(\text{Tor}^\Lambda_n(A, C))_{(\varphi)} \approx \text{Tor}^\Gamma_n(A_{(\varphi)}, C_{(\varphi)}).$$

Построить естественный гомоморфизм

$$(\text{Hom}_\Lambda(A, C))_{(\varphi)} \longrightarrow \text{Hom}_\Gamma(A_{(\varphi)}, C_{(\varphi)}),$$

являющийся изоморфизмом, когда модуль A Λ-проективен и имеет конечное число образующих. Вывести отсюда гомоморфизм

$$(\text{Ext}^n_\Lambda(A, C))_{(\varphi)} \longrightarrow \text{Ext}^n_\Gamma(A_{(\varphi)}, C_{(\varphi)}),$$

[1] inj. dim — символ инъективной размерности. — *Прим. ред.*

являющийся изоморфизмом, когда кольцо Λ нетерово и модуль A имеет конечное число образующих.

12. Показать, что если в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками отображения f и h являются мономорфизмами, то и отображение g также является мономорфизмом. Предполагая, что строки диаграммы являются расщепляемыми последовательностями, показать, что если отображения f и h являются мономорфизмами на прямые слагаемые (модулей A' и C' соответственно), то тем же свойством обладает и отображение g.

13. Пусть Λ — наследственное (справа и слева) кольцо, A и A' — правые, а C и C' — левые проективные Λ-комплексы. Показать, что если для отображений $\varphi : A \to A'$ и $\psi : C \to C'$ отображение $\varphi_* : H(A) \to H(A')$ является мономорфизмом модуля $H(A)$ на прямое слагаемое модуля $H(A')$, а отображение $\psi_* : H(C) \to \to H(C')$ — мономорфизмом модуля $H(C)$ на прямое слагаемое модуля $H(C')$, то отображение $(\varphi \otimes \psi)_* : H(A \otimes_\Lambda C) \to H(A' \otimes_\Lambda C')$ является мономорфизмом модуля $H(A \otimes_\Lambda C)$ на прямое слагаемое модуля $H(A' \otimes_\Lambda C')$. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 12.)

14. В ситуации $({}_\Lambda A, B_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$, где Λ — наследственное слева кольцо, Γ — наследственное справа кольцо, C — произвольный модуль, A — произвольный Λ-проективный комплекс, а B — произвольный Γ-проективный комплекс, сформулировать и доказать предложения, аналогичные предложениям 3.4, 3.5, 3.4а и 3.5а (воспользоваться результатом упражнения II, 4).

15. Показать, что для любых модулей A, B, C, D над коммутативным наследственным кольцом Λ модули

$$M = \operatorname{Tor}(A, B) \otimes \operatorname{Tor}(C, D) + \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A, B), C \otimes D) + \\ + \operatorname{Tor}(A \otimes B, \operatorname{Tor}(C, D))$$

и

$$N = \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A, B), C) \otimes D + \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A, B) \otimes C, D) + \\ + \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A \otimes B, C), D)$$

изоморфны (не естественно). Показать также, что любая перестановка модулей A, B, C, D преобразует модули M и N в изоморфные модули. (Указание: рассмотреть резольвенты модулей A, B, C, D.)

16. Показать, что для любых комплексов X и Y над кольцом Z целых чисел, каждая однородная составляющая которых является свободным Z-модулем с конечной базой, имеет место изоморфизм

$$H(X \otimes Z_n) \otimes H(Y \otimes Z_n) \approx H(X \otimes Y \otimes Z_n),$$

где $Z_n = Z/nZ$. Показать, что для непростого n этот изоморфизм не является естественным. [Указание: применить формулу Кюннета к группам $H(X \otimes Z_n)$, $H(Y \otimes Z_n)$ и $H((X \otimes Z_n) \otimes Y)$. Кроме того, доказать сначала для циклических, а затем для любых абелевых групп A и C с конечным числом образующих, что

$$A \otimes \operatorname{Tor}_1(Z_n, C) \approx \operatorname{Tor}_1(A \otimes Z_n, C),$$
$$\operatorname{Tor}_1(A, Z_n) \otimes \operatorname{Tor}_1(Z_n, C) \approx \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tor}_1(A, Z_n), C).]$$

17. Пусть кольцо Λ является пределом $\varinjlim \Lambda_\alpha$ прямого спектра колец Λ_α, правый Λ-модуль A — пределом $\varinjlim A_\alpha$ прямого спектра правых Λ_α-модулей A_α и левый Λ-модуль C — пределом $\varinjlim C_\alpha$ прямого спектра левых Λ_α-модулей C_α. Доказать, что

$$A \otimes_\Lambda C = \varinjlim A_\alpha \otimes_{\Lambda_\alpha} C_\alpha.$$

Затем, используя предложение V, 9.5*, доказать, что

$$\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) = \varinjlim \operatorname{Tor}_n^{\Lambda_\alpha}(A_\alpha, C_\alpha).$$

18. Рассмотрим коммутативную диаграмму Λ-модулей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками, в которой модуль P проективен, а модуль Q инъективен. Пусть

$$\Theta^{(1)} : \operatorname{Hom}(M, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A, C),$$
$$\Theta^{(2)} : \operatorname{Hom}(A, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A, C)$$

— связывающие гомоморфизмы, индуцированные соответствующими строками этой диаграммы. Доказать, что

$$\Theta^{(1)}(\gamma) + \Theta^{(2)}(\alpha) = 0.$$

(Указание: рассматривая верхнюю строку как левый ацикличный комплекс X над модулем A, а нижнюю — как правый ацикличный комплекс Y над модулем C, построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\operatorname{Hom}(A, Y)) & \longrightarrow & H^1(\operatorname{Hom}(X, Y)) & \longleftarrow & H^1(\operatorname{Hom}(X, C)) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \operatorname{Ext}^1(A, C) & & \end{array}$$

и применить результат упражнения V, 8.)

19. Для любого правого идеала I и любого левого идеала J кольца Λ доказать (с помощью теоремы 1.5а), что

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/I, \Lambda/J) \approx (I \cap J)/IJ,$$

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(\Lambda/I, \Lambda/J) \approx \mathrm{Ker}\,(I \otimes_\Lambda J \to IJ),$$

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda/I, \Lambda/J) \approx \mathrm{Tor}_{n-2}^\Lambda(I, J), \qquad n > 2,$$

где IJ — образ гомоморфизма $I \otimes_\Lambda J \to \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \approx \Lambda$.

ГЛАВА VII

ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ

Введение. В этой главе введенные ранее понятия изучаются в предположении, что основным кольцом Λ является некоторая область целостности. В двух последних параграфах рассматривается специальный случай — абелевы группы (т. е. модули над кольцом Z целых чисел).

В случае, когда кольцо Λ прюферово (т. е. является областью целостности, каждый идеал которой, имеющий конечное число образующих, обратим в поле частных), функтор Tor обладает рядом замечательных свойств. В частности, в этом случае $\mathrm{Tor}_n = 0$, если $n \geq 2$, а модуль $\mathrm{Tor}_1(A, C)$ зависит только от максимальных периодических подмодулей модулей A и C. Кроме того, $\mathrm{Tor}_1(A, Y) = 0$ для любого модуля Y тогда и только тогда, когда модуль A является модулем без кручения. Именно ввиду этих свойств функтора Tor (рассматриваемых в § 4) для него было выбрано используемое нами обозначение[1]. Эти же свойства объясняют некоторые известные особенности элементарных соотношений Кюннета (для тензорного произведения двух Z-комплексов).

В последних двух параграфах (§ 6 и 7) изучаются связи функторов Tor_1^Z и Ext_Z^1 с понтрягинской теорией двойственности для компактных абелевых групп.

1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе кольцо Λ всюду предполагается областью целостности, т. е. коммутативным кольцом с единицей $1 \neq 0$, в котором для любых элементов $\alpha, \beta \in \Lambda$ из условий $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ следует, что $\alpha\beta \neq 0$.

Элемент a модуля A называется *периодическим*, если существует такой отличный от нуля элемент $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda a = 0$. Периодические элементы модуля образуют, очевидно, подмодуль tA. Модуль A мы будем называть *периодическим*[2], если $tA = A$. Подмодуль tA модуля A является, очевидно, периодическим модулем. Модуль A мы будем называть модулем *без кручения*, если $tA = 0$. Модулем без кручения

[1] От английского «torsion» — кручение. — *Прим. ред.*
[2] Авторы пользуются термином «torsion module». — *Прим. ред.*

является, например, фактормодуль A/tA. Любой подмодуль модуля без кручения является модулем без кручения.

Если $A = \sum_{\alpha} A_\alpha$, то $tA = \sum_{\alpha} (tA_\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Проективные модули являются модулями без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область целостности Λ является, очевидно, Λ-модулем без кручения. Принимая во внимание, что каждый свободный модуль является прямой суммой модулей, изоморфных Λ, мы получаем, что каждый свободный модуль является модулем без кручения. Остается заметить, что любой проективный модуль является подмодулем некоторого свободного модуля.

Элемент a модуля A называется *неограниченно делимым*, если для любого отличного от нуля элемента λ кольца Λ в модуле A существует такой элемент b, что $a = \lambda b$. Неограниченно делимые элементы модуля A образуют, очевидно, подмодуль δA. Модуль A называется *полным*[1]), если $\delta A = A$. Фактормодуль полного модуля по любому его подмодулю является полным модулем. С другой стороны, $\delta(A/\delta A) = 0$.

Если $A = \prod_{\alpha} A_\alpha$, то $\delta A = \prod_{\alpha}(\delta A_\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Инъективные модули являются полными модулями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — произвольный инъективный модуль, и пусть $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим идеал $I = \lambda\Lambda$. Так как в области целостности Λ из соотношения $\alpha\lambda = \beta\lambda$ следует, что $\alpha = \beta$, то формула $f(\alpha\lambda) = \alpha a$ определяет некоторый гомоморфизм $f: I \to A$. Поскольку модуль A инъективен, согласно теореме I, 3.2, существует такой элемент $b \in A$, что $f\beta = \beta b$ для всех $\beta \in I$. В частности, $a = f\lambda = \lambda b$. Тем самым неограниченная делимость элемента a доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Модуль без кручения тогда и только тогда инъективен, когда он полон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из предложения 1.2. Для доказательства достаточности предположим, что модуль без кручения A полон, и рассмотрим некоторый гомоморфизм $f: I \to A$, где I — произвольный ненулевой идеал кольца Λ. Для каждого отличного от нуля элемента $\lambda \in I$ существует такой единственный элемент $a_\lambda \in A$, что $f\lambda = \lambda a_\lambda$. Если μ — любой другой отличный от нуля элемент идеала I, то

$$\mu\lambda a_\lambda = \mu f\lambda = f(\lambda\mu) = \lambda(f\mu) = \lambda\mu a_\mu$$

и потому $a_\lambda = a_\mu = a$. Таким образом, $f\lambda = \lambda a$ для всех $\lambda \in I$ и, следовательно, согласно теореме I, 3.2, модуль A инъективен.

Поскольку кольцо Λ коммутативно, из результатов § II, 3 вытекает, что для любого определенного на Λ-модулях A функтора T,

[1]) Авторы пользуются термином «divisible». — *Прим. ред.*

значения $T(A)$ которого являются группами, можно эти группы рассматривать как Λ-модули. В частности, как было показано в том же § II, 3, тензорное произведение $A \otimes_\Lambda C$ и группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ можно рассматривать как Λ-модули; например, $\lambda(a \otimes c) = (\lambda a) \otimes c = a \otimes (\lambda c)$. Ввиду этого группы $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, C)$ и $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C)$ также определяются как Λ-модули. Как правило, мы будем пользоваться обозначениями $\otimes$, Hom, Tor_n, Ext^n, опуская символ Λ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Ковариантный точный справа функтор T переводит полный модуль A в полный модуль $T(A)$. Контравариантный точный слева функтор T переводит полный модуль A в модуль без кручения $T(A)$. Ковариантный точный слева функтор T переводит модуль без кручения A в модуль без кручения $T(A)$. Контравариантный точный справа функтор T переводит модуль без кручения A в полный модуль $T(A)$. Произвольный функтор T переводит полный модуль без кручения A в полный модуль без кручения $T(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ сопоставим Λ-эндоморфизм $\lambda : A \to A$, задаваемый соответствием $a \to \lambda a$. Модуль A тогда и только тогда полон, когда для любого $\lambda \neq 0$ имеет место точная последовательность $A \xrightarrow{\lambda} A \to 0$; аналогично, модуль A тогда и только тогда является модулем без кручения, когда для любого $\lambda \neq 0$ имеет место точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\lambda} A$. Отсюда легко следуют все утверждения предложения, поскольку отображение $T(\lambda) : T(A) \to T(A)$ совпадает, по определению, с отображением $\lambda : T(A) \to T(A)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Если по крайней мере один из модулей A или C полон, то модуль $A \otimes C$ также полон. Если модуль A полон или модуль C является модулем без кручения, то модуль* $\mathrm{Hom}(A, C)$ *является модулем без кручения.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Произвольный функтор T переводит периодический модуль A с конечным числом образующих в периодический модуль $T(A)$. Ковариантный функтор T типа $L\sum^*$ (т. е. перестановочный с операцией взятия предела прямого спектра) переводит периодический модуль A в периодический модуль $T(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого периодического модуля A с конечным числом образующих в кольце Λ существует такой элемент $\lambda \neq 0$, что гомоморфизм $\lambda : A \to A$ равен нулю. Но в таком случае равен нулю и гомоморфизм $\lambda : T(A) \to T(A)$, и, следовательно, модуль $T(A)$ периодичен. Вторая часть предложения непосредственно вытекает из первой.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. *Если по крайней мере один из модулей A или C периодичен, то модуль* $\mathrm{Tor}_n(A, C)$ *периодичен.*

Вытекает из предложений VI, 1.3 и 1.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Если модуль A периодичен, а модуль C полон, то $A \otimes C = 0$. Если модуль A периодичен, а модуль C без кручения, то* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \otimes c$ — произвольная образующая модуля $A \otimes C$. Поскольку модуль A периодичен, в кольце Λ существует такой элемент $\lambda \neq 0$, что $\gamma a = 0$. В то же время вследствие полноты модуля C существует такой элемент $c' \in C$, что $\lambda c' = c$. Таким образом, $a \otimes c = a \otimes \lambda c' = a\lambda \otimes c' = 0$. Второе утверждение очевидно.

Пусть A — произвольный Λ-модуль. Сопоставив каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ Λ-эндоморфизм $\lambda : A \to A$ при помощи соответствия $a \to \lambda a$, положим

$$
\begin{aligned}
{}_\lambda A &= \operatorname{Ker}(\lambda : A \longrightarrow A),\\
{}^\lambda A &= \operatorname{Im}(\lambda : A \longrightarrow A),\\
A_\lambda &= A/\gamma A = \operatorname{Coker} \lambda.
\end{aligned}
$$

Так как кольцо Λ является областью целостности, то для любого элемента $\lambda \neq 0$ ядро гомоморфизма $\lambda : \Lambda \to \Lambda$ равно нулю. Другими словами, имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\lambda} \Lambda \longrightarrow \Lambda_\lambda \longrightarrow 0.$$

Поскольку кольцо Λ является Λ-проективным модулем, эту последовательность мы может рассматривать как проективную резольвенту модуля Λ_λ. Отсюда непосредственно следует, что

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tor}_1(\Lambda_\lambda, C) = {}_\lambda C \text{ и } \operatorname{Tor}_n(\Lambda_\lambda, C) = 0 \text{ для всех } n > 1,\\
&\operatorname{Ext}^1(\Lambda_\lambda, C) = C_\lambda \text{ и } \operatorname{Ext}^n(\Lambda_\lambda, C) = 0 \text{ для всех } n > 1.
\end{aligned}
$$

Эти формулы в совокупности со свойствами перестановочности функторов Tor_n и Ext^n с операцией прямого суммирования в отдельных случаях существенно облегчают вычисление значений функторов Tor_n и Ext^n.

2. ПОЛЕ ЧАСТНЫХ

Поле частных области целостности Λ мы будем обозначать через Q, а фактормодуль Q/Λ — через K. Таким образом, имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Так как поле Q является полным Λ-модулем без кручения, то согласно предложению 1.3, этот модуль инъективен. Модуль K полон, но, вообще говоря, не инъективен.

Так как поле Q является полным Λ-модулем без кручения, то из последнего утверждения предложения 1.4 вытекает, что каждый из модулей $Q \otimes A$, $\operatorname{Hom}(A, Q)$, $\operatorname{Ext}^n(Q, A)$ является полным модулем без кручения и, следовательно, инъективным модулем.

Модуль Q совпадает с объединением всех своих подмодулей вида $\frac{1}{\alpha}\Lambda$, где $\alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq 0$. Таким образом, Q можно представить как предел прямого спектра проективных модулей $\frac{1}{a}\Lambda$. Отсюда и из перестановочности функтора Tor_n с операцией взятия предела прямого спектра следует, что для любого $n > 0$

(1) $$\mathrm{Tor}_n(Q, A) = 0.$$

В силу соотношения (1) имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(K, A) \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} Q \otimes A$$

(мы отождествляем модуль A с модулем $\Lambda \otimes A$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Ядро гомоморфизма*

$$\varphi : A \longrightarrow Q \otimes A,$$

задаваемого соответствием $a \to 1 \otimes a$, *совпадает с периодическим подмодулем* tA.

Ввиду точности приведенной выше последовательности предложение 2.1 равносильно следующему предложению:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Гомоморфизм*

$$\psi : \mathrm{Tor}_1(K, A) \longrightarrow A$$

изоморфно отображает модуль $\mathrm{Tor}_1(K, A)$ *на подмодуль* tA.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. Так как модуль Q совпадает с объединением своих подмодулей $\frac{1}{a}\Lambda$, где $a \in \Lambda$, $a \neq 0$, и функтор $\otimes$ перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, то ядро гомоморфизма φ совпадает с объединением ядер гомоморфизмов

$$\varphi_a : A \longrightarrow \left(\frac{1}{a}\Lambda\right) \otimes A,$$

задаваемых формулой $\varphi_a\, a = 1 \otimes a$. Рассмотрим отображение

$$f_a : \left(\frac{1}{a}\Lambda\right) \otimes A \longrightarrow A,$$

для которого $f_a\left[\left(\frac{1}{a}\lambda\right) \otimes a\right] = \lambda a$. Так как отображение f_a изоморфно, то ядро гомоморфизма φ_a совпадает с ядром эндоморфизма $f_a\varphi_a : A \to A$. Но последний эндоморфизм задается соответствием $a \to \alpha a$. Поэтому объединение ядер всех гомоморфизмов φ_a совпадает с подмодулем tA.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Для любого модуля без кручения C имеет место точная последовательность*

(2) $$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q \otimes C \longrightarrow K \otimes C \longrightarrow 0.$$

Кроме того, для любого периодического модуля A имеет место изоморфизм

(3) $$\mathrm{Hom}(A, K \otimes C) \approx \mathrm{Ext}^1(A, C).$$

В частности, полагая $C = \Lambda$, мы видим, что для любого периодического модуля A имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, K) \approx \mathrm{Ext}^1(A, \Lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точность последовательности (2) вытекает из предложения 2.1, ибо модуль C является модулем без кручения. Так как модуль A периодичен, а модуль $Q \otimes C$ является модулем без кручения, то $\mathrm{Hom}(A, Q \otimes C) = 0$. Кроме того, поскольку модуль $Q \otimes C$ инъективен, $\mathrm{Ext}^1(A, Q \otimes C) = 0$. Изоморфизм (3) следует отсюда непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Любой модуль A без кручения с конечным числом образующих допускает мономорфное отображение в некоторый свободный модуль с конечной базой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как модуль A является модулем без кручения, то его можно рассматривать как подмодуль модуля $Q \otimes A$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — система образующих модуля A. Тензорное произведение $Q \otimes A$, рассматриваемое как векторное пространство над полем Q, очевидно, конечномерно. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — некоторая его база. Тогда $a_i = \sum_j q_{ij} e_j$, где $q_{ij} \in Q$. С другой стороны, в кольце Λ существует такой элемент $\lambda \neq 0$, что $\lambda q_{ij} \in \Lambda$ для всех i и j. Следовательно,

$$a_i = \sum_j (\lambda q_{ij})(\lambda^{-1} e_j),$$

так что модуль A содержится в Λ-подмодуле F модуля $Q \otimes A$, порожденном элементами $\lambda^{-1} e_j$, $j = 1, \ldots, m$. Остается заметить, что F является свободным Λ-модулем с конечной базой $\lambda^{-1} e_1, \ldots$ $\ldots, \lambda^{-1} e_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Для любого проективного модуля P, любого его проективного подмодуля P' и произвольного модуля без кручения A гомоморфизм*

$$P' \otimes A \longrightarrow P \otimes A,$$

индуцированный отображением вложения $P' \to P$, является мономорфизмом, т. е.

$$\mathrm{Tor}_1(P/P', A) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функтор $\otimes$ перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, мы можем без ограничения общности предполагать, что модуль A имеет конечное число образующих. В этом случае модуль A можно, согласно предложению 2.4, рассматривать как подмодуль некоторого свободного модуля F, так что будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P' \otimes A & \longrightarrow & P \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P' \otimes F & \longrightarrow & P \otimes F \end{array}$$

Поскольку модули P', P и F проективны, оба вертикальных и нижнее горизонтальное отображения этой диаграммы являются мономорфизмами. Следовательно, и отображение $P' \otimes A \to P \otimes A$ также является мономорфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Любой модуль A допускает мономорфное отображение в некоторый полный модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точную последовательность $0 \to M \to P \to A \to 0$ с модулем без кручения P (например, проективным или свободным). Согласно предложению 2.1, отображение $P \to P \otimes Q$, а потому и отображение $\operatorname{Coker}(M \to P) \to \operatorname{Coker}(M \to P \otimes Q)$ мономорфны. Остается заметить, что $A \approx \operatorname{Coker}(M \to P)$, а модуль $\operatorname{Coker}(M \to P \otimes Q)$ полон.

3. ОБРАТИМЫЕ ИДЕАЛЫ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Модуль A тогда и только тогда проективен, когда существуют такая система $\{a_\alpha\}$ элементов модуля A и такая система $\{\varphi_\alpha\}$ гомоморфизмов $\varphi_\alpha : A \to \Lambda$, что любой элемент $a \in A$ можно представить в виде*

$$a = \sum_\alpha (\varphi_\alpha a)\, a_\alpha, \tag{1}$$

где лишь для конечного числа индексов α коэффициенты $\varphi_\alpha a$ отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi : F \to A$ — эпиморфное отображение свободного модуля F с базой $\{e_\alpha\}$ на модуль A, и пусть $a_\alpha = \psi(e_\alpha)$. Для того чтобы модуль A был проективен, необходимо и достаточно, чтобы существовал гомоморфизм $\varphi : A \to F$, композиция $\psi\varphi$ которого с гомоморфизмом ψ была бы тождественным отображением. Представление элемента φa в виде $\sum_\alpha (\varphi_\alpha a) e_\alpha$ определяет некоторую систему $\{\varphi_\alpha\}$ гомоморфизмов $\varphi_\alpha : A \to \Lambda$, обладающую тем свойством, что для любого элемента $a \in A$ существует лишь конечное число индексов α, для которых элемент $\varphi_\alpha a$ отличен от нуля. Остается заметить, что условие тождественности отображения $\psi\varphi$ равносильно тому, что любой элемент $a \in A$ можно представить в виде

$$a = \sum_\alpha (\varphi_\alpha a) a_\alpha .$$

В изложенном доказательстве нигде не использовалось то обстоятельство, что кольцо Λ является областью целостности. Следовательно, предложение 3.1 справедливо для модулей над любым кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Ненулевой идеал I области целостности Λ тогда и только тогда проективен (как Λ-модуль), когда он* *является обратимым идеалом, т. е. когда существуют такие элементы* $q_1, \ldots, q_n \in Q$ *и* $a_1, \ldots, a_n \in I$, *что* $q_i I \subset \Lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $\sum_i q_i a_i = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если идеал I обратим, то, полагая $\varphi_i x = q_i x$, $x \in I$, мы определим гомоморфизмы $\varphi_i : I \to \Lambda$, для которых

$$\sum_i (\varphi_i x) a_i = \sum_i q_i x a_i = x \sum_i q_i a_i = x.$$

Согласно предложению 3.1, отсюда следует, что идеал I проективен. Обратно, пусть идеал I проективен, и пусть $\{a_\alpha\}$, $\{\varphi_\alpha\}$ — системы соответственно элементов и гомоморфизмов, обладающие указанными в предложении 3.1 свойствами. Так как $x(\varphi_\alpha y) = \varphi_\alpha(xy) = y(\varphi_\alpha x)$ для каждого индекса α и всех элементов $x, y \in I$, то формула $q_\alpha = (\varphi_\alpha x)/x$, где $x \in I$, $x \neq 0$, однозначно определяет такие элементы поля Q, что $\varphi_\alpha y = q_\alpha y$ для всех $y \in I$. Отсюда следует, что $q_\alpha I \subset \Lambda$. Так как для каждого отличного от нуля элемента x существует лишь конечное число индексов α, для которых элементы $\varphi_\alpha x = q_\alpha x$ отличны от нуля, то среди элементов q_α лишь конечное число отлично от нуля. Наконец, из соотношения (1) предложения 3.1 вытекает, что

$$x = \sum_\alpha (\varphi_\alpha x) a_\alpha = \sum_\alpha (q_\alpha x) a_\alpha = \left(\sum_\alpha q_\alpha a_\alpha\right) x,$$

т. е. что $\sum_\alpha q_\alpha a_\alpha = 1$. Следовательно, идеал I обратим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Любой обратимый идеал имеет конечное число образующих.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I — произвольный обратимый идеал. Тогда для любого элемента $b \in I$ имеет место соотношение $\sum_i q_i b a_i = b$, где q_i и a_i — указанные выше элементы. Следовательно, элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют систему образующих идеала I, ибо $q_i b \in \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для любого обратимого идеала I области целостности Λ и любого полного модуля A гомоморфизм* $\operatorname{Hom}(\Lambda, A) \to \operatorname{Hom}(I, A)$, *индуцированный отображением вложения $I \to \Lambda$, является эпиморфизмом. Другими словами, для каждого гомоморфизма $f: I \to A$ существует по крайней мере один такой элемент $a \in A$, что $f\lambda = \lambda a$ для всех $\lambda \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как идеал I обратим, то существуют такие элементы $q_1, \ldots, q_n \in Q$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I$, что

$$q_i I \subset \Lambda, \qquad \sum_i q_i \lambda_i = 1.$$

В силу полноты модуля A существуют такие элементы $a_i \in A$, что $f\lambda_i = \lambda_i a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$f\lambda = f\left(\sum_i q_i \lambda_i \lambda\right) = \sum_i (q_i \lambda)(f\lambda_i) = \sum_i (q_i \lambda \lambda_i) a_i = \lambda \sum_i (q_i \lambda_i) a_i,$$

и, следовательно, полагая $a = \sum_i (q_i \lambda_i) a_i$, мы получим, что $f\lambda = \lambda a$.

Из точности последовательности

$$\mathrm{Hom}(\Lambda, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Lambda/I, A) \longrightarrow 0$$

вытекает, что предложение 3.4 равносильно соотношению

$$\mathrm{Ext}^1(\Lambda/I, A) = 0.$$

4. ПРЮФЕРОВЫ КОЛЬЦА

Из предложения 3.2 следует, что область целостности Λ тогда и только тогда является полунаследственным кольцом, когда каждый ее идеал с конечным числом образующих обратим. Области целостности, обладающие этим свойством, мы будем называть *прюферовыми кольцами*. Согласно предложению VI, 2.9, если кольцо Λ прюферово, то $\mathrm{Tor}_n^\Lambda = 0$ для всех $n > 1$, а функтор Tor_1^Λ точен слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Область целостности Λ тогда и только тогда является прюферовым кольцом, когда каждый Λ-модуль без кручения с конечным числом образующих проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если каждый Λ-модуль без кручения с конечным числом образующих проективен, то, в частности, каждый идеал области целостности Λ, имеющий конечное число образующих, является проективным Λ-модулем и, следовательно, область целостности Λ является прюферовым кольцом. Обратно, любое прюферово кольцо Λ полунаследственно и потому, согласно предложению I, 6.2, каждый подмодуль с конечным числом образующих свободного Λ-модуля является проективным модулем. Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 2.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Модуль A над прюферовым кольцом Λ тогда и только тогда является модулем без кручения, когда* $\mathrm{Tor}_1(X, A) = 0$ *для любого модуля X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathrm{Tor}_1(K, A) = 0$, то, как следует из предложения 2.2, $tA = 0$, так что модуль A является модулем без кручения. Обратно, предположим, что модуль A не имеет кручения. Тогда, согласно предложению 4.1, каждый подмодуль A_α модуля A, имеющий конечное число образующих, является проективным модулем и, следовательно, $\mathrm{Tor}_1(X, A_\alpha) = 0$. Поскольку $A = \varinjlim A_\alpha$ и функтор Tor_1 перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, отсюда следует, что и $\mathrm{Tor}_1(X, A) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Если кольцо Λ прюферово, то для любого модуля без кручения C тензорные произведения $A \otimes C$ и $C \otimes A$ являются точными функторами аргумента A.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Если кольцо Λ прюферово, то все гомоморфизмы диаграммы*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \operatorname{Tor}_1(tA, C) \arrow[dr] & \\ \operatorname{Tor}_1(tA, tC) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{Tor}_1(A, C) \\ & \operatorname{Tor}_1(A, tC) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

являются изоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как фактормодуль A/tA является модулем без кручения, то, согласно предложению 4.2, $\operatorname{Tor}_1(A/tA, C) = 0$. Так как, кроме того, $\operatorname{Tor}_2 = 0$, то в силу точности последовательности производных функторов отображение $\operatorname{Tor}_1(tA, C) \to \operatorname{Tor}_1(A, C)$ изоморфно. Остальные отображения рассматриваются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Если кольцо Λ прюферово, то тензорное произведение $A \otimes C$ модулей без кручения A и C является модулем без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.1, для модуля без кручения A имеет место точная последовательность $0 \to A \to Q \otimes A$. Далее, поскольку модуль C также является модулем без кручения, в силу следствия 4.3 имеет место точная последовательность $0 \to A \otimes C \to Q \otimes A \otimes C$. Отсюда, согласно предложению 2.1, вытекает, что тензорное произведение $A \otimes C$ является модулем без кручения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Если кольцо Λ прюферово, то для любых модулей A и C модуль $\operatorname{Tor}_1(A, C)$ периодичен.*

Вытекает из предложения 4.4 и следствия 1.7.

5. ДЕДЕКИНДОВЫ КОЛЬЦА

Из предложения 3.2 следует, что область целостности Λ тогда и только тогда является наследственным кольцом, когда каждый ее идеал обратим. Области целостности, обладающие этим свойством, мы будем называть *дедекиндовыми кольцами*. Согласно предложению 3.3, прюферово кольцо тогда и только тогда дедекиндово, когда оно нетерово.

Производные функторы R^nT, L_nT и сателлиты S^nT, S_nT любого функтора T, определенного в категории модулей над некоторым дедекиндовым кольцом Λ, очевидно, равны нулю для всех $n > 1$. Кроме того, функтор R^1T точен справа, а функтор L_1T точен слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *область целостности Λ является дедекиндовым кольцом;*

(b) *любой полный Λ-модуль Λ-инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Если кольцо Λ дедекиндово, то любой его идеал обратим и, следовательно, согласно предложению 3.4 и теореме I, 3.2, каждый полный Λ-модуль инъективен.

(b) $\Rightarrow$ (a). Так как фактормодули полного модуля являются полными модулями, то ввиду условия (b) любой фактормодуль инъективного Λ-модуля инъективен. Поэтому в силу теоремы I, 5.4 кольцо Λ наследственно, а значит, и дедекиндово.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если кольцо Λ дедекиндово, то гомоморфизм*

$$\mathrm{Ext}^1(A, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, C/\delta C)$$

является изоморфизмом.

Достаточно заметить, что модули $\mathrm{Ext}^1(A, \delta C)$ и $\mathrm{Ext}^2(A, \delta C)$ равны нулю, поскольку модуль δC полон и, следовательно, инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Модуль A над дедекиндовым кольцом Λ тогда и только тогда является модулем без кручения, когда для любого модуля C модуль $\mathrm{Ext}^1(A, C)$ является полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A — модуль без кручения, то, поскольку функтор Ext^1 точен справа, из предложения 1.4 вытекает, что модуль $\mathrm{Ext}^1(A, C)$ полон. Для доказательства обратного утверждения воспользуемся изоморфизмом

$$\mathrm{Ext}^1(B, \mathrm{Ext}^1(A, C)) \approx \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(B, A), C)$$

(см. предложение VI, 3.5a). Если модуль $\mathrm{Ext}^1(A, C)$ полон, то, согласно предложению 5.1, этот модуль инъективен и, следовательно, $\mathrm{Ext}^1(B, \mathrm{Ext}^1(A, C)) = 0$. Поэтому $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(B, A), C) = 0$ для любого модуля C. Отсюда, согласно предложению VI, 2.2, вытекает, что модуль $\mathrm{Tor}_1(B, A)$ проективен, а значит (см. предложение 1.1), является модулем без кручения. С другой стороны, согласно следствию 1.7[1)], модуль $\mathrm{Tor}_1(B, A)$ периодичен. Следовательно, $\mathrm{Tor}_1(B, A) = 0$. Так как это равенство справедливо для любого модуля B, то, согласно предложению 4.2, модуль A является модулем без кручения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Комбинируя предложение 5.1 с предложением 2.6, можно еще раз доказать, что каждый Λ-модуль (где Λ — произвольное дедекиндово кольцо) допускает мономорфное отображение в некоторый инъективный Λ-модуль. Это доказательство, в частности, применимо, когда кольцо Λ является кольцом Z целых чисел (см. замечание в конце § II, 6).

6. АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

В этом параграфе мы будем всюду предполагать, что кольцо Λ является кольцом Z целых чисел. Поэтому все рассматриваемые здесь модули будут обычными абелевыми группами. Все результаты, установленные нами для модулей над прюферовыми и дедекиндовыми кольцами, конечно, имеют место и для случая $\Lambda = Z$. В част-

---

[1)] Здесь проще сослаться на предложение 4.6. — *Прим. перев.*

ности, для абелевых групп понятие «инъективности» совпадает с понятием «полноты». Так как любая подгруппа свободной группы является свободной группой, то понятие «проективной» группы совпадает с понятием «свободной» группы.

Пусть R — аддитивная группа действительных чисел, а $T = R/Z$ — аддитивная группа действительных чисел, приведенных по модулю 1.

Для любой абелевой группы A группу $\mathrm{Hom}(A, T)$ мы будем называть группой, двойственной к группе A, и будем обозначать ее через $D(A)$. Так как группа T полна и, следовательно, инъективна, то $\mathrm{Hom}(A, T)$ является точным функтором аргумента A. Таким образом, D является точным контравариантным функтором. Топологии групп R, T и $D(A)$ мы пока во внимание не принимаем.

Так как группа T инъективна, то, согласно предложению VI, 5.1, имеет место изоморфизм

$$(1) \qquad \varrho^1 : \mathrm{Ext}^1(A, \mathrm{Hom}(B, T)) \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_1(A, B), T).$$

Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любых абелевых групп A и B*

$$\mathrm{Ext}^1(A, D(B)) \approx D(\mathrm{Tor}_1(A, B)).$$

В качестве примера использования этого предложения докажем

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Если абелева группа A без кручения, а абелева группа C конечна, то* $\mathrm{Ext}^1(A, C) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа C конечна, существует такая (конечная) группа B, что $C \approx D(B)$[1]. Таким образом, согласно предложению 6.1,

$$\mathrm{Ext}^1(A, C) \approx \mathrm{Ext}^1(A, D(B)) \approx D(\mathrm{Tor}_1(A, B)).$$

Остается заметить, что так как группа A является группой без кручения, то в силу предложения 4.2 группа $\mathrm{Tor}_1(A, B)$ равна нулю.

Предложение 6.1 можно существенно усилить, введя топологию в некоторые из рассматриваемых групп.

До сих пор мы имели дело только с категориями Λ-модулей и Λ-гомоморфизмов, где Λ — произвольное кольцо. Рассмотрим теперь категорию $\mathcal{C}$, состоящую из компактных абелевых групп (с аксиомой отделимости Хаусдорфа) и их непрерывных гомоморфизмов. Для этой категории остаются справедливыми, в частности, все результаты § IV, 1, поскольку компактность рассматриваемых групп обеспечивает непрерывность связывающих гомоморфизмов групп гомологий. Рассматривая градуированные группы $A = \sum A^n$ (см. § IV, 3), мы будем предполагать лишь компактность каждой однородной составляющей A^n, не вводя в *их прямую сумму A никакой топологии*. При этом условии определение и основные свойства производных функторов (так же как и сателлитов) остаются справедли-

[1] См., например, Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, М., 1954, § 36—37. — *Прим. перев.*

выми и для аддитивных функторов, принимающих значения в категории $\mathscr{C}$ компактных абелевых групп. В частности, определенные в § IV, 6 гомоморфизмы α и α' оказываются непрерывными.

Примером такого функтора является функтор $T(A) = \mathrm{Hom}(A, C)$, где A — дискретная абелева группа, а C — компактная абелева группа. Топология на группе $\mathrm{Hom}(A, C)$ определяется следующим образом. Для любого конечного подмножества F группы A и любой окрестности V нуля группы C мы обозначим через $W(F, V)$ множество всех таких гомоморфизмов $f \in \mathrm{Hom}(A, C)$, что $f(F) \subset V$. Мы определим в группе $\mathrm{Hom}(A, C)$ топологию, приняв за полную систему окрестностей нуля семейство всех множеств вида $W(F, V)$. Относительно этой топологии группа $\mathrm{Hom}(A, C)$ является компактной группой (с аксиомой отделимости Хаусдорфа), а гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\varphi, C): \mathrm{Hom}(A', C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$, индуцированный произвольным гомоморфизмом $\varphi: A \to A'$ — непрерывным гомоморфизмом.

Легко видеть, что для любых дискретных абелевых групп A, B и любой компактной абелевой группы C естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \approx \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$$

является топологическим изоморфизмом. Полагая, в частности, $C = T$ (группа T здесь рассматривается в ее естественной топологии, индуцированной топологией группы R), мы получим *топологический изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(A, D(B)) \approx D(A \otimes B).$$

Рассматривая правые производные функторы функтора $T(A) = \mathrm{Hom}(A, C)$, где C — фиксированная компактная группа, мы получим в группе $\mathrm{Ext}^1(A, C)$ естественную топологию, относительно которой эта группа компактна. При этом все гомоморфизмы, используемые при определении гомоморфизма ϱ^1 (см. § VI, 5), будут непрерывными гомоморфизмами. Таким образом, изоморфизм ϱ^1 непрерывен и потому (ввиду компактности групп) является гомеоморфизмом. Следовательно, *рассмотренный в предложении* 6.1 *изоморфизм является топологическим изоморфизмом.*

7. ОПИСАНИЕ ФУНКТОРА $\mathrm{Tor}_1(A, C)$

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \Lambda \to R \to T \to 0, \tag{S}$$

где Λ — область целостности, а R — полный Λ-модуль без кручения; примером такой последовательности может служить точная последовательность

$$0 \to \Lambda \to Q \to K \to 0. \tag{S'}$$

Поле частных Q можно, очевидно, рассматривать как подмодуль полного модуля R. Так как, согласно предложению 1.3, модуль Q

инъективен, то модуль R можно представить в виде прямой суммы $R = Q + R'$, где R' — некоторый подмодуль, также являющийся полным модулем без кручения. Но в таком случае $T = K + R'$, и точная последовательность (S) является прямой суммой точной последовательности (S′) и тривиальной точной последовательности $0 \to 0 \to R' \to R' \to 0$.

Поскольку, согласно предложению 1.3, модуль R инъективен, имеет место точная последовательность

$$\mathrm{Hom}(A, T) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ext}^1(A, \Lambda) \to 0.$$

Применяя к этой последовательности точный слева функтор Hom, мы получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(A, \Lambda), C) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, T), C).$$

Гомоморфизм φ вместе с определенным в § VI, 5 гомоморфизмом

$$\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(A, \Lambda), C)$$

определяет гомоморфизм

$$\varphi\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, T), C).$$

Изучению последнего гомоморфизма в основном и посвящен этот параграф.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если кольцо Λ дедекиндово, то гомоморфизм $\varphi\sigma_1$ является мономорфизмом. Если, кроме того, модуль A периодичен и имеет конечное число образующих, то гомоморфизм $\varphi\sigma_1$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению VI, 5.5, отображение σ_1 мономорфно. Так как отображение φ также мономорфно, то и отображение $\varphi\sigma_1$ мономорфно.

Предположим теперь, что модуль A периодичен и имеет конечное число образующих. Тогда, согласно предложению VI, 5.4, отображение σ_1 является изоморфизмом. Для того чтобы убедиться, что и отображение φ является изоморфизмом, достаточно доказать, что изоморфно отображение $\tau : \mathrm{Hom}(A, T) \to \mathrm{Ext}^1(A, \Lambda)$. Но $T = K + R'$ и, как уже было доказано в предложении 2.3, отображение $\mathrm{Hom}(A, K) \to \mathrm{Ext}^1(A, \Lambda)$ изоморфно (если модуль A периодичен). В то же время, поскольку модуль A периодичен, а модуль R' является модулем без кручения, $\mathrm{Hom}(A, R') = 0$. Следовательно, отображение τ изоморфно.

Предположим теперь, что Λ является кольцом Z целых чисел, R — аддитивной группой действительных чисел и $T = R/Z$. Тогда условия предложения 7.1 выполнены и, следовательно, имеет место мономорфизм

$$\varphi\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D(A), C).$$

Напомним, что в группе $D(A) = \mathrm{Hom}(A, T)$ определена (компактная) топология (см. предыдущий параграф).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Для любых дискретных абелевых групп A и C мономорфизм*

$$\varphi\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D(A), C)$$

изоморфно отображает группу $\mathrm{Tor}_1(A, C)$ *на подгруппу* $\mathrm{Hom}_c(D(A), C)$ *группы* $\mathrm{Hom}(D(A), C)$, *состоящую из всех непрерывных гомоморфизмов* $D(A) \to C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной конечной подгруппы A_α группы A имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1(A_\alpha, C) \arrow[r, "\varphi\sigma_{1\alpha}"] \arrow[d, "i_\alpha"] & \mathrm{Hom}(D(A_\alpha), C) \arrow[d, "j_\alpha"] \\
\mathrm{Tor}_1(A, C) \arrow[r, "\varphi\sigma_1"'] & \mathrm{Hom}(D(A), C)
\end{tikzcd}$$

Для любого элемента $x \in \mathrm{Tor}_1(A_\alpha, C)$ гомоморфизм $\varphi\sigma_1(i_\alpha x)$ представляется в виде композиции гомоморфизмов

$$D(A) \longrightarrow D(A_\alpha) \longrightarrow C.$$

Поэтому, поскольку группа $D(A_\alpha)$ конечна, гомоморфизм $\varphi\sigma_1(i_\alpha x)$ непрерывен. Так как каждый элемент группы $\mathrm{Tor}_1(A, C)$ лежит в образе гомоморфизма i_α для некоторой конечной подгруппы A_α[1], то, следовательно,

$$\mathrm{Im}\, \varphi\sigma_1 \subset \mathrm{Hom}_c(D(A), C).$$

Обратно, пусть $f : D(A) \to C$ — произвольный непрерывный гомоморфизм. Тогда в силу дискретности группы C существует окрестность $W(F, V)$ нуля группы $D(A)$, отображающаяся при гомоморфизме f в нуль. В частности, если φ — такой элемент группы $D(A)$, что $\varphi(a) = 0$ для всех $a \in F$, то $\varphi \in W(F, V)$ и, следовательно, $f\varphi = 0$. Пусть A' — подгруппа группы A, порожденная конечным множеством F. Тогда гомоморфизм f можно представить в виде композиции гомоморфизмов

$$D(A) \longrightarrow D(A') \xrightarrow{g} C,$$

где $D(A) \to D(A')$ — непрерывный гомоморфизм, индуцированный отображением вложения $A' \to A$, а g — некоторый непрерывный гомоморфизм. Так как группа A' имеет конечное число образующих, то ее периодическая часть tA' конечна и группа A' разлагается в прямую сумму своей периодической части tA' и некоторой подгруппы E, изоморфной группе Z^n (т. е. прямой сумме n экземпляров аддитивной группы Z целых чисел). Так как $D(Z) \approx T$, то $D(Z^n) \approx T^n$, так что группа $D(Z^n)$ связна и поэтому отображается при гомоморфизме g в нуль. Следовательно, ввиду того, что $D(A') =$

---

[1] Ибо $\mathrm{Tor}_1(A, C) = \mathrm{Tor}_1(tA, C)$. — *Прим. перев.*

$= D(tA') + D(Z^n)$, гомоморфизм g представляется в виде композиции гомоморфизмов $D(A') \to D(tA') \to C$, а потому гомоморфизм f — в виде композиции гомоморфизмов

$$D(A) \longrightarrow D(tA') \longrightarrow C.$$

Таким образом, полагая в выписанной выше диаграмме $A_\alpha = tA'$, мы получим, что гомоморфизм f содержится в образе отображения j_α. Поскольку, согласно предложению 7.1, отображение $\varphi\sigma_{1\alpha}$ изоморфно, отсюда следует, что гомоморфизм f содержится в образе отображения $j_\alpha\varphi\sigma_{1\alpha} = \varphi\sigma_1 i_\alpha$ и потому в образе отображения $\varphi\sigma_1$. Тем самым предложение 7.2 доказано.

Комбинируя предложение 7.2 с предложением 6.1, мы получим естественный изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^1(A, D(C)) \approx D[\mathrm{Hom}_c(D(A), C)]$$

компактных групп. Этот изоморфизм был впервые построен Эйленбергом и Маклейном [Eilenberg S., MacLane S., *Ann. of Math.*, **43** (1942), 757—831] с помощью понятия «модулярного следа».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что для любых конечных абелевых групп A и C

$$\mathrm{Hom}(A, C) \approx A \otimes C \approx \mathrm{Tor}_1(A, C) \approx \mathrm{Ext}^1(A, C).$$

Показать, что эти изоморфизмы не являются естественными. Привести пример двух таких бесконечных периодических абелевых групп A и C, что $A \otimes C = 0$, а $\mathrm{Tor}_1(A, C) \neq 0$.

2. Показать, что любой периодический модуль над произвольным дедекиндовым кольцом Λ обладает инъективной резольвентой, состоящей из периодических модулей. Воспользовавшись этим, доказать, что правые производные функторы $R^nU(A, C)$ функтора $U(A, C) = A \otimes C$ равны нулю для всех $n \geq 0$, если хотя бы один из Λ-модулей A или C периодичен. (Указание: использовать предложение 1.8.)

3. Пусть Λ — произвольная область целостности и Q — ее поле частных. Доказать, что для любых Λ-модулей без кручения A и C

$$R^0U(A, C) = Q \otimes A \otimes C,$$

где $U(A, C) = A \otimes C$. (Указание: рассмотреть точные последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q \otimes A \longrightarrow (Q/\Lambda) \otimes A \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q \otimes C \longrightarrow (Q/\Lambda) \otimes C \longrightarrow 0$$

и

$$0 \longrightarrow (Q/\Lambda) \otimes A \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots,$$
$$0 \longrightarrow (Q/\Lambda) \otimes C \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow \ldots,$$

где X_i и Y_i — инъективные модули. Показать, что последовательности

$$\text{(X)} \qquad Q \otimes A = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots,$$

$$\text{(Y)} \qquad Q \otimes C = Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow \ldots$$

являются инъективными резольвентами модулей A и C соответственно. Принять во внимание, что в комплексе $X \otimes Y$ отображение d^0 равно нулю, поскольку в силу предложения 1.8 равны нулю тензорные произведения $(Q/\Lambda) \otimes A \otimes Y_0$ и $X_0 \otimes (Q/\Lambda) \otimes C$.)

4. Обозначая, как и выше, функтор $A \otimes C$ через $U(A, C)$, доказать, что для любых модулей A и C над дедекиндовым кольцом

$$R^0U(A, C) = Q \otimes A \otimes C, \qquad R^nU(A, C) = 0 \qquad (n \geq 1).$$

(Указание: используя результат упражнения 2, доказать сначала, что

$$R^nU(A, C) \approx R^nU(A/tA, C/tC).$$

Затем, используя результат упражнения 3, доказать, что

$$R^0U(A, C) = Q \otimes A \otimes C.$$

Наконец, принять во внимание, что для прюферова кольца Λ функтор $Q \otimes A \otimes C = V(A, C)$ точен.)

5. Пусть Λ — произвольная область целостности. Рассмотрим на категории Λ-модулей A функтор

$$T(A) = A \otimes C,$$

где C — фиксированный периодический модуль. Доказать, что для любого $n \geq 0$

$$R^nT(A) = 0.$$

Используя это равенство и результат упражнения V, 4, доказать, что правый сателлит функтора

$$T_1(A) = \operatorname{Tor}_1(A, C),$$

где C — фиксированный периодический модуль совпадает с функтором $T(A) = A \otimes C$. Отсюда, предполагая, что кольцо Λ прюферово, вывести, что правый сателлит функтора $T_1(A) = \operatorname{Tor}_1(A, C)$, где модуль C уже произволен, совпадает с функтором $T(A) = A \otimes (tC)$.

6. Пусть Λ — произвольная область целостности. Рассмотрим на категории Λ-модулей C функтор

$$T(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C),$$

где A — фиксированный периодический модуль. Доказать, что для любого $n \geq 0$

$$L_nT(C) = 0.$$

Используя этот результат, доказать, что левый сателлит функтора

$$T^1(C) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda (A, C),$$

где A — фиксированный периодический модуль, совпадает с функтором $T(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda (A, C)$. Доказать также, что если кольцо Λ дедекиндово, то левый сателлит функтора $T^1(C) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda (A, C)$, где A — произвольный модуль с конечным числом образующих, совпадает с функтором $T(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda (tA, C)$.

7. Определим естественный гомоморфизм

$$u : \operatorname{Tor}_1 (A, C) \to \operatorname{Hom} (\operatorname{Hom} (A, T), C)$$

(где A и C — любые модули над некоторой областью целостности Λ, а T — модуль, входящий в точную последовательность (S) из § 7), полагая для любых элементов $x \in \operatorname{Tor}_1 (A, C)$ и $f \in \operatorname{Hom} (A, T)$

$$(ux) f = v(w_f x),$$

где $w_f : \operatorname{Tor}_1 (A, C) \to \operatorname{Tor}_1 (T, C)$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f, а $v : \operatorname{Tor}_1 (T, C) \to \Lambda \otimes C = C$ — связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности (S). Показать, что

$$u + \varphi\sigma_1 = 0,$$

где $\varphi\sigma_1$ — рассмотренный в § 7 гомоморфизм. (Указание: использовать результат упражнения VI, 18.)

8. Для любого Z-комплекса X, любого Z-модуля G и произвольного простого числа p построить естественный изоморфизм

$$H^n(\operatorname{Hom} (X, {}_pG)) \approx \operatorname{Hom} (H_n(X_p), G),$$

где ${}_pG$ — ядро $\operatorname{Ker} (p : G \to G)$, а X_p — фактормодуль X/pX. Вывести отсюда изоморфизм

$$\operatorname{Ext}^1 (A, {}_pG) \approx \operatorname{Hom} ({}_pA, G),$$

где A — произвольный Z-модуль. [Указание: принять во внимание, что $\operatorname{Hom}_Z (X, {}_pG) \approx \operatorname{Hom}_{Z_p} (X_p, {}_pG)$, и воспользоваться отображением α', которое является изоморфизмом в случае, когда кольцом Λ служит поле Z_p (теорема IV, 7.2).]

Если комплекс X не имеет кручения, то точной последовательности $0 \to X \xrightarrow{p} X \to X_p \to 0$ соответствует некоторый гомоморфизм

$$H_{n+1}(X_p) \to H_n(X).$$

Сопоставляя этот факт со сказанным выше, построить естественный гомоморфизм

$$H^n(\operatorname{Hom} (X, G)) \longrightarrow H^{n+1}(\operatorname{Hom} (X, {}_pG)).$$

9. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо, а S — такое мультипликативно замкнутое подмножество кольца Λ, что $0 \notin S$

и $1 \in S$. Для любого Λ-модуля A в множестве всех пар вида (a, s), $a \in A$, $s \in S$ определим отношение

$$(a, s) \sim (a', s'),$$

полагая, что $(a, s) \sim (a', s')$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $t \in S$, что $as't = a'st$. Показать, что это отношение является эквивалентностью и что множество A_S соответствующих классов эквивалентности является Λ-модулем относительно операций

$$(a, s) + (a', s') = (as' + a's, ss'), \quad (a, s)\,\lambda = (a\lambda, s).$$

Показать, что соответствие $a \to (a, 1)$ определяет Λ-гомоморфизм $A \to A_S$, ядро которого состоит из всех таких элементов $a \in A$, что $as = 0$ для некоторого $s \in S$.

Превратить модуль Λ_S в кольцо, полагая $(\lambda, s)(\lambda', s') = (\lambda\lambda', ss')$, и показать, что соответствие $\lambda \to (\lambda, 1)$ определяет кольцевой гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Lambda_S$. Превратить Λ-модуль A_S в Λ_S-модуль, полагая

$$(a, s)(\lambda, t) = (a\lambda, st),$$

и показать, что соответствие $(a, s) \to a \otimes (1, s)$ определяет Λ_S-изоморфизм

$$A_S \approx A \otimes_\Lambda \Lambda_S = A_{(\varphi)}.$$

Показать, что для любого Λ_S-модуля A модуль A_S, построенный для модуля A, рассматриваемого как Λ-модуль, совпадает с A.

10. Показать, что функтор $T(A) = A_S$, построенный в упражнении 9, является точным функтором, т. е. что Λ-модуль Λ_S является Λ-плоским модулем. Используя результат упражнения VI, 10, показать, что

$$\text{w. dim}_\Lambda A_S = \text{w. dim}_{\Lambda_S} A_S.$$

Используя результат упражнения VI, 11, построить изоморфизм

$$(\operatorname{Tor}_n^\Lambda (A, C))_S \approx \operatorname{Tor}_n^{\Lambda_S} (A_S, C_S).$$

Построить аналогичный гомоморфизм для функтора Ext.

11. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо и $\mathbf{M}$ — множество всех подмножеств M кольца Λ, дополнения $\Lambda \setminus M$ которых являются максимальными идеалами кольца Λ. Показать, что если $A_M = 0$ для всех $M \in \mathbf{M}$, то $A = 0$. Отсюда и из результата упражнения 10 вывести, что

$$\text{w. dim}_\Lambda A = \sup_{M \in \mathbf{M}} \text{w. dim}_{\Lambda_M} A_M.$$

Показать, что если кольцо Λ нетерово, то для любого Λ-модуля A с конечным числом образующих

$$\dim_\Lambda A = \sup_{M \in \mathbf{M}} \dim_{\Lambda_M} A_M.$$

(Указание: воспользоваться результатом упражнения VI, 3.)

12. Показать, что для любой ненулевой абелевой группы A с конечным числом образующих существует по крайней мере одно такое простое число p, что $A \otimes Z_p \neq 0$. В качестве приложения этого результата доказать следующее утверждение: пусть A — абелева группа с конечным числом образующих, а B — свободная абелева группа, и пусть $f: A \to B$ — такой гомоморфизм, что индуцированный гомоморфизм $A \otimes Z_p \to B \otimes Z_p$ является мономорфизмом для любого простого числа p. Тогда гомоморфизм f является мономорфизмом и группа A — свободной группой. (Указание: показать, что ядро $N = \operatorname{Ker} f$ является прямым слагаемым группы A.)

ГЛАВА VIII

ПОПОЛНЕННЫЕ КОЛЬЦА

Введение. В теории гомологий (и когомологий) пополненных колец объединяются воедино такие различные более специальные теории (изучаемые нами позднее), как теория гомологий ассоциативных алгебр (гл. IX), теория гомологий дополненных алгебр (гл. X), теория гомологий групп (§ X, 4) и теория гомологий алгебр Ли (гл. XIII).

В § 1—3 излагаются общая теория и некоторые примеры. Параграфы 4—6 посвящены более специальным вопросам. Здесь, в частности, показано, как теорема Гильберта о «цепях сизигий» связана с общим понятием «проективной размерности» модулей для случая, когда основное кольцо является либо градуированным, либо нетеровым локальным кольцом.

1. ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ ПОПОЛНЕННЫХ КОЛЕЦ

Пополненным (слева) кольцом мы будем называть кольцо Λ (как всегда, с единицей), рассматриваемое вместе с левым Λ-модулем Q и некоторым Λ-эпиморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to Q$. Модуль Q называется *пополняющим модулем*, эпиморфизм ε — *пополняющим эпиморфизмом*, а ядро I эпиморфизма ε (являющееся левым идеалом кольца Λ) — *пополняющим идеалом*.

Для любого пополненного кольца Λ и любого правого Λ-модуля A (левого Λ-модуля C) группы

$$\operatorname{Tor}_n^\Lambda (A, Q) = S_n T(A), \qquad \operatorname{Ext}_\Lambda^n (Q, C) = S^n U(C),$$

где

$$T(A) = A \otimes_\Lambda Q, \qquad U(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda (Q, C),$$

называются *n-ми*[1] *группами гомологий* (соответственно *когомологий*)

[1] Или *n-мерными*. — *Прим. ред.*

пополненного кольца Λ *с коэффициентами в модуле* A (соответственно *в модуле* C)[1].

В общем случае $S_nT(A)$ и $S^nU(C)$ являются лишь абелевыми группами. Однако, если в модулях A и C определены некоторые дополнительные операторы, перестановочные с операторами из кольца Λ, то их, как было показано в § II, 3, можно перенести на группы $S_nT(A)$ и $S^nU(C)$. В частности, эти группы всегда можно рассматривать как модули над центром кольца Λ.

Группы $S_nT(A)$ и $S^nU(C)$ можно вычислять по формулам

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, Q) = H_n(X \otimes_\Lambda Q), \qquad \mathrm{Ext}_\Lambda^n(Q, C) = H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q, Y)),$$

где X — произвольная Λ-проективная резольвента модуля A, а Y — произвольная Λ-инъективная резольвента модуля C. Для групп $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, Q)$ этот метод вычисления впервые был предложен Хопфом [Hopf H., *Comment. Math. Helv.*, **17** (1945), 39—79], использовавшим его для определения групп гомологий (дискретных) групп.

Однако, как правило, удобнее вычислять эти группы, рассматривая Λ-проективные резольвенты X модуля Q. В этом случае

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, Q) = H_n(A \otimes_\Lambda X), \qquad \mathrm{Ext}_\Lambda^n(Q, C) = H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)).$$

---

[1] Авторы придерживаются следующих (в настоящее время общепринятых) терминологических соглашений.

Группы, являющиеся группами гомологий комплексов, построенных из некоторых других комплексов с помощью операции Hom, называются *группами когомологий*. Группы же, строящиеся двойственным образом (получающиеся из комплексов, построенных с помощью операции $\otimes$), называются, как и в общем случае, *группами гомологий*. При этом, описанная терминология (заимствованная из алгебраической топологии) проводится, как правило, последовательно (например, в случае когомологий говорят о коцепях, коциклах, кограницах и т. п.).

Сразу бросается в глаза путаный характер этой терминологии: термин «гомология» применяется в двух совершенно различных смыслах. Кроме того, в этой терминологии не отражена определенного рода двойственность, имеющаяся между когомологиями и гомологиями в указанном выше «узком смысле». Для ликвидации этих недостатков следовало бы иметь для гомологий в узком смысле специальное название, по возможности учитывающее упомянутую выше двойственность. Например, можно было бы гомологии в узком смысле называть *контрагомологиями*.

Однако здесь возникает другое затруднение, связанное с тем, что группы гомологий в узком смысле являются, как правило, *ковариантными*, а группы когомологий — *контравариантными* функторами. Естественно, что не совсем удобно употреблять для обозначения ковариантных функторов приставку «контра», а для обозначения контравариантных функторов — приставку «ко». В связи с этим интересно предложение В. Г. Болтянского называть группы гомологий в узком смысле группами когомологий, а группы когомологий, наоборот, — группами контрагомологий. Это предложение представляется наиболее последовательным и логически выдержанным. Однако введение терминов В. Г. Болтянского связано с полной ломкой уже в значительной степени устоявшихся терминологических навыков.

Следует также иметь в виду, что нельзя полностью противопоставлять гомологии в узком смысле (когомологии в смысле В. Г. Болтянского) и гомологии в широком смысле, как они определены в гл. IV, ибо любой комплекс можно рассматривать как результат его тензорного умножения на группу целых чисел. Впрочем, аналогичное замечание можно сделать и по отношению к когомологиям (контрагомологиям в смысле В. Г. Болтянского). — *Прим. ред.*

По определению, резольвента X является комплексом

$$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$$

с Λ-проективными составляющими X_n $(n \geq 0)$, рассматриваемым вместе с некоторым пополняющим отображением $X_0 \to Q$. При этом требуется, чтобы последовательность

$$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow Q \to 0$$

была точной. Так как имеет место точная последовательность

(1) $$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} Q \longrightarrow 0,$$

то, начиная построение резольвенты X, мы можем положить $X_0 = \Lambda$, а в качестве пополняющего отображения $X_0 \to Q$ взять эпиморфизм ε. При этом построение остальных компонент резольвенты X сведется к построению проективной резольвенты левого Λ-модуля I.

Точная последовательность (1) определяет соответствующие связывающие гомоморфизмы функторов Tor и Ext. Так как кольцо Λ является Λ-проективным модулем, то $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, \Lambda) = 0 = \operatorname{Ext}_\Lambda^n(\Lambda, C)$ для всех $n > 0$; и поэтому

(2) $$T(A) = A \otimes_\Lambda Q \approx \operatorname{Coker}(A \otimes_\Lambda I \to A),$$

(2a) $$U(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, C) \approx \operatorname{Ker}(C \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(I, C)),$$

(3) $$S_1T(A) = \operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, Q) \approx \operatorname{Ker}(A \otimes_\Lambda I \to A),$$

(3a) $$S^1U(C) = \operatorname{Ext}_\Lambda^1(Q, C) \approx \operatorname{Coker}(C \to \operatorname{Hom}_\Lambda(I, C)),$$

(4) $$S_nT(A) = \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, Q) \approx \operatorname{Tor}_{n-1}^\Lambda(A, I) \qquad (n > 1),$$

(4a) $$S^nU(C) = \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q, C) \approx \operatorname{Ext}_\Lambda^{n-1}(I, C) \qquad (n > 1).$$

Функторы $T_n(A) = S_nT(A)$ и $U^n(C) = S^nU(C)$ $(n \geq 0)$ являются ковариантными функторами аргументов A и C соответственно. Кроме того, эти функторы образуют связанные последовательности, т. е для любых точных последовательностей

(5) $$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0,$$

(5a) $$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

имеют место точные последовательности

(6) $$\ldots \longrightarrow T_n(A') \longrightarrow T_n(A) \longrightarrow T_n(A'') \longrightarrow T_{n-1}(A') \longrightarrow \ldots,$$

(6a) $$\ldots \longrightarrow U^{n-1}(C'') \longrightarrow U^n(C') \longrightarrow U^n(C) \longrightarrow U^n(C'') \longrightarrow \ldots.$$

Согласно § V, 8, последовательности (6) и (6a) можно рассматривать как гомологические последовательности, соответствующие следующим точным последовательностям комплексов:

(7) $$0 \longrightarrow A' \otimes_\Lambda X \longrightarrow A \otimes_\Lambda X \longrightarrow A'' \otimes_\Lambda X \longrightarrow 0,$$

(7a) $$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(X, C') \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(X, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(X, C'') \longrightarrow 0,$$

где X — произвольная проективная резольвента модуля Q.

ТЕОРЕМА 1.1. *Связанная последовательность ковариантных функторов* $T_n(A) = \operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q)$ *обладает следующими свойствами:*

(i) *для любой точной последовательности* (5) *имеет место точная последовательность* (6);

(ii) $T_n(A) = 0$ *для любого* Λ-*проективного модуля* A *и любого* $n > 0$;

(iii) $T_0(A) = A \otimes_\Lambda Q$.

Этими тремя свойствами связанная последовательность функторов $T_n(A) = \operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q)$ *характеризуется однозначно с точностью до изоморфизма.*

ТЕОРЕМА 1.1a. *Связанная последовательность ковариантных функторов* $U^n(C) = \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q, C)$ *обладает следующими свойствами:*

(i) *для любой точной последовательности* (5a) *имеет место точная последовательность* (6a);

(ii) $U^n(C) = 0$ *для любого* Λ-*инъективного модуля* C *и любого* $n > 0$;

(iii) $U^0(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, C)$.

Этими тремя свойствами связанная последовательность функторов $U^n(C) = \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q, C)$ *характеризуется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Свойства, перечисленные в теоремах 1.1 и 1.1a, являются частными случаями известных свойств функторов Tor и Ext. Тот факт, что эти свойства составляют их аксиоматическое описание, следует из теоремы III, 5.1.

До сих пор мы рассматривали кольца, пополненные слева. Однако совершенно аналогично можно определить и кольца, пополненные справа. Для таких колец полностью сохраняется все сказанное выше о кольцах, пополненных слева. Следует лишь функторы T и U определить формулами

$$T(A) = Q \otimes_\Lambda A, \quad U(C) = \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, C).$$

Если пополняющий идеал I кольца Λ двусторонний, то модуль Q является кольцом Λ/I, которое можно рассматривать и как левый, и как правый Λ-модуль. Таким образом, в этом случае кольцо Λ пополнено одновременно и справа и слева. Кроме того, поскольку в этом случае операторы из кольца Λ действуют на модуле Q также и справа, для любого правого Λ-модуля A группу $T_n(A) = \operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q)$ можно рассматривать как правый Λ-модуль. Аналогично для любого левого Λ-модуля C группу $U^n(C) = \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q, C)$ можно рассматривать как левый Λ-модуль.

В случае, когда идеал I является двусторонним идеалом кольца Λ, в формулы (2), (3) и (4) можно вместо модуля A подставить модуль Q (рассматриваемый как правый Λ-модуль). При этом, приняв во внимание, что $Q \otimes_\Lambda I \approx I/I^2$ (где I^2 — образ гомоморфизма

$I \otimes_\Lambda I \to \Lambda \otimes_\Lambda I = I$) и что гомоморфизм $Q \otimes_\Lambda I \to Q$ равен нулю, мы получим следующие изоморфизмы:

(8) $$T(Q) = Q \otimes_\Lambda Q \approx Q,$$

(9) $$S_1T(Q) = \mathrm{Tor}_1^\Lambda (Q, Q) \approx Q \otimes_\Lambda I \approx I/I^2,$$

(10) $$S_2T(Q) = \mathrm{Tor}_2^\Lambda (Q, Q) \approx \mathrm{Tor}_1^\Lambda (Q, I) \approx \mathrm{Ker}\,(I \otimes_\Lambda I \to I).$$

2. ПРИМЕРЫ

Во всех рассматриваемых ниже примерах идеал I является двусторонним идеалом кольца Λ.

Градуированные кольца. Кольцо Λ называется градуированным, если оно градуировано как аддитивная группа, причем

$$\Lambda^p = 0, \text{ если } p < 0, \text{ и } \Lambda^p\Lambda^q \subset \Lambda^{p+q}.$$

Из этих условий, в частности, следует, что однородная компонента Λ^0 является подкольцом. Это подкольцо мы и примем за пополняющий модуль Q. Эпиморфизм $\varepsilon : \Lambda \to Q$ мы определим как эпиморфизм, сопоставляющий произвольному элементу λ его однородную компоненту нулевой степени. Соответствующий пополняющий идеал является, очевидно, двусторонним идеалом, состоящим из всех элементов кольца Λ, для которых однородная компонента нулевой степени равна нулю.

Приведем несколько примеров градуированных колец. Пусть K — произвольное кольцо, $x_1, \ldots, x_n$ — некоторое множество символов, а $\Lambda = F_K(x_1, \ldots, x_n)$ — свободный левый K-модуль, базу которого составляют все элементы вида

$$1, x_i, x_{i_1}x_{i_2}, \ldots, x_{i_1} \ldots x_{i_m}, \ldots,$$

где каждый индекс i_j может принимать любое из значений $1, \ldots, n$. Модуль Λ мы проградуируем, считая элементы вида $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ однородными элементами степени m. Кроме того, мы введем в модуль Λ умножение, полагая

$$(k_1x_{i_1} \ldots x_{i_m})(k_2x_{j_1} \ldots x_{j_p}) = k_1k_2x_{i_1} \ldots x_{i_m}x_{j_1} \ldots x_{j_p}.$$

В результате мы получим градуированное кольцо $F_K(x_1, \ldots, x_n)$, называемое *свободным* K-кольцом, порожденным символами $x_1, \ldots, x_n$.

Факторкольцо кольца $F_K(x_1, \ldots, x_n)$ по его двустороннему идеалу, порожденному всеми элементами вида $x_ix_j - x_jx_i$, также является градуированным K-кольцом. Это кольцо обозначается через $K[x_1, \ldots, x_n]$ и называется *кольцом многочленов* над кольцом K от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

Градуированным K-кольцом является также факторкольцо кольца $F_K(x_1, \ldots, x_n)$ по его двустороннему идеалу, порожденному всеми элементами вида x_ix_i и $x_ix_j + x_jx_i$. Это кольцо обозначается через $E_K(x_1, \ldots, x_n)$ и называется *внешним* (или *грассмановым*) K-кольцом от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

В случае $n = 1$ внешнее кольцо $E_K(d)$ совпадает, как легко видеть, с кольцом $\Lambda = (K, d)$ двойных чисел над кольцом K (см. § IV, 2). Каждый элемент этого кольца имеет вид $k_1 + k_2 d$; умножение в кольце Λ определяется формулой

$$(k_1 + k_2 d)(k_1' + k_2' d) = k_1 k_1' + (k_1 k_2' + k_2 k_1') d,$$

а пополняющий эпиморфизм ε — формулой

$$\varepsilon(k_1 + k_2 d) = k_1.$$

Мы получим Λ-проективную резольвенту X кольца K, принимая за X_n при любом $n \geq 0$ кольцо Λ и определяя отображение $d_n : X_n \to X_{n-1}$ формулой

$$d_n(k_1 + k_2 d) = k_1 d \qquad (n > 0).$$

Отсюда следует, что для любого правого Λ-кольца A, т. е. для любого правого K-модуля A с дифференциалом d, комплекс $A \otimes_\Lambda X$ имеет вид

$$\ldots \longrightarrow A \xrightarrow{d_n} A \longrightarrow \ldots \longrightarrow A \xrightarrow{d_1} A,$$

где $d_n = d$. Поэтому группа[1] $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, K)$, рассматриваемая как правый K-модуль, совпадает для всех $n > 0$ с модулем гомологий $H(A)$, а $A \otimes_\Lambda K = \operatorname{Coker} d = Z'(A)$.

Аналогично для любого левого Λ-модуля C комплекс $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C)$ имеет вид

$$C \xrightarrow{d^0} C \longrightarrow \ldots \longrightarrow C \xrightarrow{d^n} C \longrightarrow \ldots,$$

где $d^n = d$ и, следовательно, $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(K, C) = H(C)$ для всех $n > 0$, а $\operatorname{Hom}_\Lambda(K, C) = \operatorname{Ker} d = Z(C)$.

Отметим, что в рассматриваемом случае точные последовательности (6) и (6а) из § 1 совпадают с точными последовательностями, указанными в теореме IV, 1.1.

Другим классом пополненных колец является класс локальных колец. Кольцо Λ мы называем *локальным кольцом*, если оно обладает следующим свойством:

(LC) *все элементы кольца Λ, не обладающие обратными слева элементами, составляют некоторый левый идеал I.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Левый идеал I является двусторонним идеалом, содержащим все собственные левые и правые идеалы локального кольца Λ. Для элементов идеала I не существует ни обратных слева, ни обратных справа элементов; в то же время любой элемент кольца Λ, не содержащийся в идеале I, обладает двусторонне обрат-*

[1] То есть n-мерная группа гомологий пополненного кольца Λ с коэффициентами в модуле A. — *Прим. перев.*

ным элементом. Факторкольцо Λ/I является телом (вообще говоря, некоммутативным).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В собственном левом идеале J кольца Λ не могут содержаться элементы, обладающие обратными слева элементами. Следовательно, $J \subset I$.

Покажем теперь, что в идеале I нет ни одного элемента, обладающего обратным справа элементом. В самом деле, предположим, что в идеале I содержится такой элемент x, что $x\lambda = 1$ для некоторого элемента $\lambda \in \Lambda$. Тогда $(1 - \lambda x)\lambda = 0$. Так как $\lambda x \in I$, то $1 - \lambda x \notin I$ и, следовательно, для элемента $1 - \lambda x$ существует по крайней мере один обратный слева элемент γ. Но тогда $\lambda = \gamma(1 - \lambda x)\lambda = 0$, что невозможно.

Для любого элемента $\lambda \in \Lambda$ множество $I\lambda$ является левым идеалом кольца Λ, а так как $x\lambda \neq 1$ для всех $x \in I$, то идеал $I\lambda$ собственный. Поэтому $I\lambda \subset I$. Тем самым доказано, что идеал I является правым идеалом.

Пусть теперь λ — произвольный элемент кольца Λ, не содержащийся в идеале I, и пусть γ — один из элементов, обратных слева к элементу λ. Тогда $\gamma\lambda = 1$, и, следовательно, поскольку идеал I двусторонний, элемент γ не принадлежит идеалу I. Поэтому для элемента γ существует по крайней мере один обратный слева элемент ζ. Но $\zeta = \zeta\gamma\lambda = \lambda$ и, следовательно, $\lambda\gamma = \zeta\gamma = 1$. Тем самым показано, что элемент λ обладает двусторонне обратным элементом. Так как идеалу I принадлежат все элементы, не обладающие обратными справа элементами, то совершенно так же, как это было сделано выше, можно показать, что идеал I содержит все собственные правые идеалы кольца Λ.

Утверждение, что факторкольцо Λ/I является телом, непосредственно следует из уже доказанных свойств идеала I.

В силу предложения 2.1 локальные слева и локальные справа кольца совпадают. Максимальный (двусторонний) идеал I локального кольца Λ определяет кольцо Λ как пополненное кольцо, пополняющий Λ-модуль Q которого является телом Λ/I.

Важнейшими примерами локальных колец являются:

кольцо $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальных степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из некоторого тела K;

кольцо $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ сходящихся степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из некоторого поля K, снабженного полной недискретной оценкой.

В каждом из этих случаев идеал I порождается элементами $x_1, \ldots, x_n$.

Третий важный класс пополненных колец составляют *кольца полугрупп. Полугруппой Π* мы называем мультипликативную ассоциативную систему с единицей 1. Для любого кольца K мы определим кольцо $K(\Pi)$ полугруппы Π как свободный K-модуль, порожденный всеми элементами x полугруппы Π, в котором умножение задается формулой

$$(kx)(k'x') = (kk')(xx'), \qquad k, k' \in K, \ x, x' \in \Pi.$$

Заметим, что если Π является *свободной полугруппой*, порожденной элементами $x_1, \ldots, x_n$, то кольцо $K(\Pi)$ можно отождествить со свободным K-кольцом $F_K(x_1, \ldots, x_n)$. Если Π является *свободной абелевой полугруппой*, порожденной элементами $x_1, \ldots, x_n$, то кольцо $K(\Pi)$ можно отождествить с кольцом многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Для кольца $K(\Pi)$ пополняющий эпиморфизм $\varepsilon : K(\Pi) \to K$ можно определить по-разному. Мы будем рассматривать только *мультипликативные* пополняющие эпиморфизмы, удовлетворяющие условию

$$\varepsilon(k1) = k.$$

Такой пополняющий эпиморфизм индуцирует некоторую функцию $\mu : \Pi \to K$, для которой

$$(1) \qquad \mu(xx') = \mu(x)\,\mu(x'), \qquad \mu(1) = 1.$$

Поскольку в кольце $K(\Pi)$ выполняется соотношение $kx = xk$, все значения функции μ принадлежат *центру* кольца K. Обратно, с помощью произвольной функции μ, удовлетворяющей условиям (1), значения которой принадлежат центру кольца K, можно определить отображение $\varepsilon : K(\Pi) \to K$, полагая

$$\varepsilon(kx) = k(\mu x).$$

Это отображение является мультипликативным $[\varepsilon(k1) = k]$ пополняющим эпиморфизмом.

Введение кольца $K(\Pi)$ можно мотивировать также следующим замечанием. Пусть A — произвольный правый $K(\Pi)$-модуль. Тогда A является правым K-модулем, причем для любого элемента $x \in \Pi$ соответствие $a \to ax$ определяет некоторый K-эндоморфизм K-модуля A. Для этих эндоморфизмов $a1 = a$ и $(ax)\,x' = a(xx')$. Обратно, произвольный правый K-модуль A, в котором для любого $x \in \Pi$ определен K-эндоморфизм $a \to ax$, обладающий указанными выше свойствами, можно рассматривать как правый $K(\Pi)$-модуль. Соответствующее замечание можно сделать и для левых $K(\Pi)$-модулей. Мы видим, таким образом, что кольцо $K(\Pi)$ является своего рода «обвертывающим» кольцом для кольца K и элементов x полугруппы Π. Аналогичным примером «обвертывающего» кольца является рассмотренное выше кольцо $\Lambda = (K, d)$ двойных чисел. Позднее мы встретимся и с другими примерами обвертывающих колец.

Поскольку кольца полугрупп и групп в дальнейшем будут рассмотрены весьма подробно, мы пока ограничимся сказанным.

3. ЗАМЕНА КОЛЕЦ

Для данного фиксированного пополненного кольца Λ с пополняющим эпиморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to Q$ мы рассматривали группы гомологий $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, Q)$ и группы когомологий $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q, C)$ как ковариантные функторы аргументов A и C соответственно. Покажем теперь, что в некотором смысле эти группы являются также функторами и кольца Λ.

Рассмотрим два пополненных кольца Λ и Γ с пополняющими эпиморфизмами

$$\varepsilon_\Lambda : \Lambda \longrightarrow Q_\Lambda, \qquad \varepsilon_\Gamma : \Gamma \longrightarrow Q_\Gamma$$

и с пополняющими идеалами I_Λ и I_Γ. Гомоморфизм колец $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ мы будем называть отображением пополненных колец, если $\varphi(I_\Lambda) \subset I_\Gamma$. Такое отображение φ индуцирует гомоморфизм $\psi : Q_\Lambda \to Q_\Gamma$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varepsilon_\Lambda"] \arrow[d, "\varphi"] & Q_\Lambda \arrow[d, "\psi"] \\ \Gamma \arrow[r, "\varepsilon_\Gamma"'] & Q_\Gamma \end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\psi(\lambda x) = (\varphi\lambda)(\psi x)$ для любых $\lambda \in \Lambda$, $x \in Q_\Lambda$. Другими словами, отображение ψ является Λ-гомоморфизмом, если Γ-модуль Q_Γ с помощью гомоморфизма φ рассматривать как Λ-модуль (см. § II, 6 и IV, 4).

Пусть теперь A — произвольный правый, а C — произвольный левый Γ-модули. С помощью гомоморфизма φ мы можем эти модули рассматривать так же и как Λ-модули. Мы определим сейчас некоторые гомоморфизмы

$$F^\varphi : \operatorname{Tor}^\Lambda(A, Q_\Lambda) \longrightarrow \operatorname{Tor}^\Gamma(A, Q_\Gamma), \tag{1}$$

$$F_\varphi : \operatorname{Ext}_\Gamma(Q_\Gamma, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda(Q_\Lambda, C). \tag{1a}$$

С этой целью рассмотрим произвольную Λ-проективную резольвенту X_Λ модуля Q_Λ, произвольную Γ-проективную резольвенту X_Γ модуля Q_Γ и Γ-гомоморфизм

$$g : {}_{(\varphi)}Q_\Lambda = \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda \longrightarrow Q_\Gamma,$$

определенный формулой $g(\gamma \otimes x) = \gamma(\psi x)$. Согласно предложению II, 6.1, комплекс $\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda = {}_{(\varphi)}X_\Lambda$ является Γ-проективным левым комплексом над модулем $\Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda$. Следовательно, в силу предложения V, 1.1 над гомоморфизмом g существует некоторое с точностью до гомотопии единственное отображение

$$G : \Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda \longrightarrow X_\Gamma.$$

Индуцированные этим отображением гомоморфизмы

(2) $H(A \otimes_\Lambda X_\Lambda) = H(A \otimes_\Gamma (\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda)) \longrightarrow H(A \otimes_\Gamma X_\Gamma)$,

(2a) $H(\mathrm{Hom}_\Gamma (X_\Gamma, C)) \longrightarrow H(\mathrm{Hom}_\Gamma (\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda, C)) = H(\mathrm{Hom}_\Lambda (X_\Lambda, C))$

мы и принимаем за гомоморфизмы F^φ и F_φ соответственно.

ТЕОРЕМА 3.1 (Теорема об отображении). *Гомоморфизм F^φ тогда и только тогда является изоморфизмом для всех правых Γ-модулей A, когда*

(i) $$g : \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda \approx Q_\Gamma,$$

(ii) $$\mathrm{Tor}_n^\Lambda (\Gamma, Q_\Lambda) = 0 \text{ для всех } n > 0.$$

При выполнении условий (i) *и* (ii) *гомоморфизм F_φ также является изоморфизмом для всех левых Γ-модулей C. Кроме того, для любой Λ-проективной резольвенты X_Λ модуля Q_Λ комплекс $\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda$ вместе с пополняющим отображением $\Gamma \overline{\otimes}_\Lambda X_\Lambda \to \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda \overset{g}{\approx} Q_\Gamma$ является Γ-проективной резольвентой модуля Q_Γ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для любого правого Γ-модуля A отображение F^φ изоморфно. Тогда, в частности, это будет справедливо для модуля $A = \Gamma$, т. е. имеет место изоморфизм $F^\varphi : \mathrm{Tor}^\Lambda (\Gamma, Q_\Lambda) \approx \mathrm{Tor}^\Gamma (\Gamma, Q_\Gamma)$. Свойства (i) и (ii) следуют отсюда непосредственно.

Предполагая теперь, что выполняются свойства (i) и (ii), рассмотрим произвольную Λ-проективную резольвенту X_Λ модуля Q_Λ. По условию, $H_n(\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda) = \mathrm{Tor}_n^\Lambda (\Gamma, Q_\Lambda) = 0$ для всех $n > 0$. Таким образом, комплекс $\Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda$ (вместе с указанным выше пополняющим отображением) является Γ-проективной резольвентой модуля Q_Γ. Следовательно, полагая $X_\Gamma = \Gamma \otimes_\Lambda X_\Lambda$, мы можем в качестве отображения G взять тождественное отображение. Но в таком случае отображения (2) и (2a) будут изоморфизмами.

Доказанной «теоремой об отображении» мы будем в дальнейшем часто пользоваться.

4. РАЗМЕРНОСТЬ

Пусть Λ — произвольное пополненное кольцо, $\varepsilon : \Lambda \to Q$ — соответствующий пополняющий эпиморфизм и $I = \mathrm{Ker}\, \varepsilon$ — соответствующий пополняющий идеал. Нас будет интересовать проективная размерность (в смысле § VI, 2) левого Λ-модуля Q. Ясно, что $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q \leq \mathrm{l.\,gl.\,dim}\, \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если модуль Q не проективен, то* $1 + \mathrm{l.\,dim}_\Lambda I = \mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q$.

Непосредственно вытекает из предложения VI, 2.3.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть пополняющий идеал*[1] *I порождается (как левый идеал) конечным числом попарно перестановочных*

[1] Этот идеал предполагается двусторонним; см. примечание редактора на стр. 195. — *Прим. ред.*

элементов $x_1, \ldots, x_n$, *и пусть* I_k $(0 \leq k \leq n)$ — *левый идеал кольца* Λ, *порожденный элементами* x_i $(i \leq k)$. *Тогда, если*

(i) $$(\lambda \in \Lambda \mid \lambda x_k \in I_{k-1}) \Rightarrow (\lambda \in I_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

то либо $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda\, Q = n$, *либо* $Q = 0$.

Прежде чем перейти к доказательству, приведем три важнейших примера, к которым применимо это предложение. Этими примерами являются:

$\Lambda = K\,[x_1, \ldots, x_n]$ — градуированное кольцо многочленов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из (вообще говоря, некоммутативного) кольца K.

$\Lambda = K\,[[x_1, \ldots, x_n]]$ — кольцо формальных степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из некоторого кольца K. Если кольцо K является телом, то кольцо Λ локально.

$\Lambda = K\,\{x_1, \ldots, x_n\}$ — кольцо сходящихся степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами иэ некоторого поля K. снабженного полной недискретной оценкой. Это кольцо также локально.

Во всех трех случаях пополняющий идеал I является двусторонним идеалом, порожденным элементами $x_1, \ldots, x_n$, и $\Lambda/I = K$ Свойство (i), указанное в теореме 4.2, для этих колец также выполняется. Следовательно, согласно этой теореме, $\mathrm{l.dim}_\Lambda K = n$. [Для случая кольца $\Lambda = K\,[[x_1, \ldots, x_n]]$ конечность размерности кольца K (рассматриваемого как левый Λ-модуль) была доказана Ф. Рецилласом (Recillas F., не опубликовано).]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Ввиду попарной перестановочности элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольцо Λ можно рассматривать как (правый) модуль над кольцом $\Gamma = Z\,[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть J_k $(0 \leq k \leq n)$ — идеал кольца Γ, порожденный элементами x_i $(i \leq k)$. Тогда $I_k = \Lambda J_k$.

Мы начнем с того, что для любого Γ-модуля M построим некоторый левый комплекс над модулем M/MJ_n (в смысле § V, 1). С этой целью рассмотрим тензорное произведение (над кольцом Z)

$$X = M \otimes E(y_1, \ldots, y_n),$$

где $E(y_1, \ldots, y_n)$ — внешнее Z-кольцо от n неизвестных $y_1, \ldots, y_n$ (определение внешнего кольца см. § 2). Тензорное произведение X мы градуируем модулями

$$X_i = M \otimes E_i(y_1, \ldots, y_n),$$

где $E_i(y_1, \ldots, y_n)$ — однородная составляющая степени i градуированного кольца $E(y_1, \ldots, y_n)$. За пополняющее отображение $\varepsilon: X_0 \to M/MJ_n$ мы примем естественный гомоморфизм модуля $X_0 = M$ на фактормодуль M/MJ_n. Наконец, определим отображения $d_i: X_i \to X_{i-1}$ $(i > 0)$, полагая

$$d_i(m \otimes y_{p_1} \ldots y_{p_i}) = \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{j+1} (m x_{p_j}) \otimes y_{p_1} \ldots \hat{y}_{p_j} \ldots y_{p_i},$$

где символ $\hat{y}_{p_j}$ означает, что множитель y_{p_j} должен быть опущен. Используя попарную перестановочность элементов $x_1, \ldots, x_n$, легко проверить, что $d_{i-1} d_i = 0$, если $i > 1$, и $\varepsilon d_1 = 0$.

Прежде чем продолжать доказательство теоремы 4.2, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Если в Γ-модуле M*

$$\text{(i}'\text{)} \qquad (m \in M \mid mx_k \in MJ_{k-1}) \Rightarrow (m \in MJ_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

то построенный выше над модулем M/MJ_n комплекс X ацикличен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.3. Условие (i′) равносильно тому, что отображение $M/MJ_{k-1} \to MJ_k/MJ_{k-1}$, индуцированное эндоморфизмом $m \to mx_k$, является изоморфизмом.

Введем в рассмотрение левые комплексы $X^{(k)} = M \otimes E(y_1, \ldots, y_k)$ над модулями M/MJ_k, дифференциалы и пополняющие отображения которых определяются так же, как и выше. Мы хотим показать по индукции, что все комплексы $X^{(k)}$ ацикличны. Для $k = 0$ это очевидно, поскольку $J_0 = 0$ и $X^{(0)} = M$. Предположим поэтому, что уже доказана ацикличность комплекса $X^{(k-1)}$ над модулем M/MJ_{k-1} $(k > 0)$, и рассмотрим комплекс

$$Y^{(k)}: \ldots \longrightarrow 0 \to X_k^{(k)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1^{(k)} \longrightarrow MJ_k \longrightarrow 0.$$

Так как ядром пополняющего отображения $X_0^{(k)} = M \to M/MJ_k$ является модуль MJ_k, то ацикличность комплекса $X^{(k)}$ равносильна равенству $H(Y^{(k)}) = 0$. Поскольку, с другой стороны, комплекс $Y^{(k-1)}$ является подкомплексом комплекса $Y^{(k)}$ и, по предположению индукции, $H(Y^{(k-1)}) = 0$, ввиду точности последовательности

$$H(Y^{(k-1)}) \longrightarrow H(Y^{(k)}) \longrightarrow H(Y^{(k)}/Y^{(k-1)})$$

достаточно доказать, что $H(Y^{(k)}/Y^{(k-1)}) = 0$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{k-1}^{(k-1)} & \longrightarrow & X_{k-2}^{(k-1)} & \rightarrow \cdots \rightarrow & X_0^{(k-1)} & \longrightarrow & M/MJ_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_{k}^{(k)}/X_k^{(k-1)} & \longrightarrow & X_{k-1}^{(k)}/X_{k-1}^{(k-1)} & \rightarrow \cdots \rightarrow & X_1^{(k)}/X_1^{(k-1)} & \longrightarrow & MJ_k/MJ_{k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

в которой отображение $X_{i-1}^{(k-1)} \to X_i^{(k)}/X_i^{(k-1)}$ индуцируется умножением справа на элемент y_k, а отображение $M/MJ_{k-1} \to MJ_k/MJ_{k-1}$ является изоморфизмом, индуцированным эндоморфизмом $m \to mx_k$. Эта диаграмма коммутативна, все ее вертикальные отображения являются изоморфизмами и, согласно предположению индукции, ее верхняя строка является точной последовательностью. Но в таком случае нижняя строка диаграммы также является точной последовательностью, т. е. $H(Y^{(k)}/Y^{(k-1)}) = 0$.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 4.2. Если в качестве Γ-модуля M мы возьмем кольцо Λ, то построенный выше комплекс X будет Λ-комплексом. Так как все элементы вида $y_{p_1} \ldots y_{p_i}$ $(p_1 < \ldots < p_i)$ образуют базу свободной абелевой группы

$E(y_1, \ldots, y_n)$, то Λ-комплекс X свободен и имеет размерность n[1]. Таким образом, модуль Q обладает проективной резольвентой X размерности n и, следовательно, $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q \leq n$.

Построенную проективную резольвенту X модуля $Q = \Lambda/I$ можно использовать для вычисления групп гомологий и когомологий пополненного кольца Λ с коэффициентами в произвольном Λ-модуле. Именно, для любого правого Λ-модуля A

$$(1) \qquad \mathrm{Tor}_i^\Lambda (A, Q) = H_i(A \otimes E(y_1, \ldots, y_n)).$$

Действительно, группа $\mathrm{Tor}_i^\Lambda (A, Q)$ является i-й группой гомологий комплекса

$$A \otimes_\Lambda X = A \otimes_\Lambda (\Lambda \otimes E(y_1, \ldots, y_n)) = A \otimes E(y_1, \ldots, y_n)$$

с дифференциалом

$$(2) \qquad d_i(a \otimes y_{p_1} \ldots y_{p_i}) = \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{j+1} (ax_{p_j}) \otimes y_{p_1} \ldots \hat{y}_{p_j} \ldots y_{p_i}.$$

Аналогично для любого левого Λ-модуля C

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^i (Q, C) = H^i(\mathrm{Hom}\,(E(y_1, \ldots, y_n), C)).$$

Действительно,

$$\mathrm{Hom}_\Lambda (X, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda (\Lambda \otimes E(y_1, \ldots, y_n), C) = \mathrm{Hom}\,(E(y_1, \ldots, y_n), C).$$

Однородные элементы степени i комплекса $\mathrm{Hom}\,(E(y_1, \ldots, y_n), C)$ можно отождествить с функциями $f(p_1, \ldots, p_i)$, определенными для целых чисел $p_1, \ldots, p_i$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq p_1 < \ldots \ldots < p_i \leq n$. После этого отождествления дифференциал δ будет определяться формулой

$$(2a) \qquad (\delta f)(p_1, \ldots, p_{i+1}) = \sum_{1 \leq j \leq i+1} (-1)^{j+1} x_{p_j} f(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_{i+1}).$$

Заметим, что при вычислении указанным способом групп гомологий и когомологий кольцо Λ почти совсем не используется. Нужно только знать, как элементы $x_1, \ldots, x_n$ действуют на модуле A (соответственно на модуле C). (Конечно, требуется, чтобы соответствующие этим элементам эндоморфизмы были попарно перестановочны.)

В частности, мы получаем, что[2]

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n (Q, Q) = H^n(\mathrm{Hom}\,(E(y_1, \ldots, y_n), Q)) =$$
$$= \mathrm{Hom}\,(E_n(y_1, \ldots, y_n), Q) = \mathrm{Hom}\,(Z, Q) = Q.$$

Таким образом, если $Q \neq 0$, то $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q = n$. Тем самым теорема 4.2 полностью доказана.

---

[1] Размерностью (правого или левого) комплекса называется наибольший номер его отличной от нуля однородной составляющей. — *Прим. перев.*

[2] Эта выкладка справедлива только тогда, когда I является двусторонним идеалом кольца Λ. В общем случае, $\mathrm{Ext}_\Lambda^n (Q, Q) = Q/P$, где P — совокупность всех элементов из Q вида $\Sigma x_i a_i$, $a_i \in Q$. — *Прим. ред.*

Комплекс $A \otimes E(y_1, \ldots, y_n)$ был впервые построен Ж. Л. Косулом (Koszul J. L., Colloque de topologie, Bruxelles, 1950) при исследовании групп когомологий групп Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношение, аналогичное соотношению (1), имеет место для любого Γ-модуля M. Поэтому комплекс $M \otimes E(y_1, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда ацикличен, когда

$$\operatorname{Tor}_i^{\Gamma}(M, Z) = 0, \qquad i > 0. \tag{3}$$

Тот факт, что для любого Γ-модуля M из свойства (i′) вытекает свойство (3), можно доказать и непосредственно. В самом деле, используя точные последовательности $0 \to \Gamma/J_{k-1} \xrightarrow{x_k} \Gamma/J_{k-1} \to \Gamma/J_k \to 0$, легко показать индукцией по k, что

$$\operatorname{Tor}_i^{\Gamma}(M, \Gamma/J_k) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим алгебру $\Lambda = K[x_\alpha]$ многочленов от произвольного множества $\{x_\alpha\}$ неизвестных. Эту алгебру Λ можно представить как предел прямого спектра алгебр вида $\Lambda_J = K(J)$, где J пробегает всевозможные конечные подмножества множества $\{x_\alpha\}$. Комплексы X_J, построенные указанным выше способом, образуют прямой спектр, пределом которого является некоторый комплекс X. Легко видеть, что комплекс X является Λ-проективной резольвентой модуля K и представляет собой тензорное произведение $\Lambda \otimes E(y_\alpha)$, где $E(y_\alpha)$ — внешняя алгебра от неизвестных $\{y_\alpha\}$. Дифференциал комплекса X определяется той же самой формулой, что и выше.

5. ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Мы будем предполагать в этом параграфе, что Λ представляет собой пополненное кольцо, пополняющий идеал I которого является собственным двусторонним идеалом. Таким образом, пополняющий модуль $Q = \Lambda/I$ будет кольцом, а пополняющий эпиморфизм $\varepsilon : \Lambda \to Q$ — кольцевым гомоморфизмом.

При сделанных предположениях тензорное произведение $A \otimes_\Lambda Q$ для любого правого Λ-модуля A является правым Q-модулем. Так как имеет место точная последовательность $0 \to I \to \Lambda \to Q \to 0$, то

$$A \otimes_\Lambda Q \approx A/AI. \tag{1}$$

Правый Λ-модуль A называется *собственным*, если либо $A = 0$, либо $A \otimes_\Lambda Q \neq 0$ (т. е. $A \neq AI$). Любой свободный модуль является, очевидно, собственным модулем.

Пусть N — произвольное подмножество модуля A и F_N — свободный модуль, порожденный элементами множества N. Используя естественный гомоморфизм $F_N \to A$, построим точную последовательность

$$0 \longrightarrow R_N \longrightarrow F_N \longrightarrow A \longrightarrow L_N \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где $R_N = \operatorname{Ker}(F_N \to A)$, $L_N = \operatorname{Coker}(F_N \to A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество M правого Λ-модуля A называется *правильным*, если для любого подмножества N множества M модули R_N и L_N являются собственными модулями. Семейство $\mathcal{D}$ правых Λ-модулей называется *допустимым* семейством, если для любого модуля $A \in \mathcal{D}$ существует такое правильное подмножество M, порождающее модуль A, что модуль R_M из точной последовательности $0 \to R_M \to F_M \to A \to 0$ принадлежит семейству $\mathcal{D}$.

Если модуль A обладает некоторым правильным подмножеством M, то, полагая $N = 0$, мы получим, что $L_N = A$. Следовательно, модуль A будет собственным модулем. Итак, все модули любого допустимого семейства являются собственными модулями.

Для иллюстрации введенных нами понятий рассмотрим два важных специальных случая.

В первую очередь рассмотрим случай, когда Λ является градуированным кольцом (см. § 2). В этом случае $Q = \Lambda_0$, а идеал I состоит из всех элементов кольца Λ, для которых однородные компоненты нулевой степени равны нулю. Правый модуль A над градуированным кольцом Λ мы будем называть *градуированным*, если он проградуирован как абелева группа,

$$A = A^0 + A^1 + \ldots + A^n + \ldots,$$

причем $A^p\Lambda^q \subset A^{p+q}$. Правые Λ-модули, для которых существуют такого рода градуировки, мы будем называть *градуируемыми* модулями. Все свободные Λ-модули, очевидно, градуируемы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любого градуированного кольца Λ все градуированные Λ-модули являются собственными модулями. Каждое множество однородных элементов градуированного модуля правильно. Семейство всех градуированных Λ-модулей допустимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \neq 0$ — градуированный Λ-модуль, и пусть a — отличный от нуля однородный элемент модуля A наименьшей возможной степени m. Если $A = AI$, то $a \in AI$, т. е. $a = \sum a_i\lambda_i$, где $a_i \in A$ и $\lambda_i \in I$. Элементы a_i и λ_i можно, очевидно, считать однородными. Но поскольку степень каждого элемента a_i не меньше m, а степень каждого элемента λ_i не меньше 1, степень элемента a не меньше $m + 1$. Полученное противоречие показывает, что A является собственным модулем.

Пусть теперь N — произвольное множество однородных элементов градуированного Λ-модуля A. Свободный модуль F_N можно, очевидно, так проградуировать, что отображение $F_N \to A$ будет гомоморфизмом нулевой степени. Тогда модули R_N и L_N будут градуированными и, следовательно, собственными модулями. Таким образом, любое подмножество модуля A, состоящее из однородных элементов, является правильным множеством. Следовательно, поскольку любой градуированный модуль порождается его однородными элементами, семейство всех градуируемых Λ-модулей допустимо.

В качестве второй иллюстрации мы рассмотрим случай, когда Λ является локальным кольцом, а I — его максимальным идеалом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1′. *Для любого локального кольца Λ все правые Λ-модули с конечным числом образующих являются собственными модулями. Если локальное кольцо Λ нетерово справа, то произвольное конечное подмножество любого правого Λ-модуля с конечным числом образующих является правильным множеством и семейство всех правых Λ-модулей с конечным числом образующих допустимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \neq 0$ — правый Λ-модуль с конечным числом образующих и $a_1, \ldots, a_n$ — минимальная система образующих модуля A. Если $a_1 \in AI$, то $a_1 = a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I$, и, следовательно, $a_1(1-\lambda_1) \in B$, где B — подмодуль модуля A, порожденный элементами $a_2, \ldots, a_n$. Так как элемент $1-\lambda_1$ не принадлежит идеалу I, то существует такой элемент $\lambda \in \Lambda$, что $(1-\lambda_1)\lambda = 1$. Следовательно, $a_1 = a_1(1-\lambda_1)\lambda \in B$. Полученное противоречие показывает, что элемент a_1 не содержится в подмодуле AI. Таким образом, $AI \neq A$, т. е. A является собственным модулем.

Для любого конечного подмножества N модуля A с конечмым числом образуючих модули F_N и L_N являются модулями с конечным числом образующих. Поэтому, если локальное кольцо Λ нетерово справа, то модуль R_N также будет иметь конечное число образующих. Таким образом, любое конечное подмножество модуля A правильно. Тем самым второе утверждение также доказано.

Проиллюстрировав, таким образом, понятия «собственный модуль», «правильное множество» и «допустимое семейство», вернемся теперь к общей теории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть A — правый Λ-модуль и M — некоторое его правильное подмножество. Тогда, если образ множества M в тензорном произведении $A \otimes_\Lambda Q = A/AI$ порождает весь правый Q-модуль $A \otimes_\Lambda Q$, то множество M порождает модуль A. Если, кроме того, $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, Q) = 0$ и образы элементов множества M в тензорном произведении $A \otimes_\Lambda Q$ образуют Q-базу*[1] *модуля $A \otimes_\Lambda Q$, то элементы множества M образуют Λ-базу модуля A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow R_M \longrightarrow F_M \longrightarrow A \longrightarrow L_M \longrightarrow 0.$$

По предположению, отображение $F_M \otimes_\Lambda Q \to A \otimes_\Lambda Q$ эпиморфно. Поэтому, в силу точности справа тензорного умножения, $L_M \otimes_\Lambda Q = 0$. Так как модуль L_M, по условию, собственный, то, следовательно, $L_M = 0$, так что отображение $F_M \to A$ эпиморфно, т. е. модуль A порождается подмножеством M.

Так как $L_M = 0$, то имеет место точная последовательность

$$\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, Q) \longrightarrow R_M \otimes_\Lambda Q \to F_M \otimes_\Lambda Q \xrightarrow{\varphi} A \otimes_\Lambda Q.$$

[1] То есть Q-модуль $A \otimes_\Lambda Q$ свободен и образы элементов множества M образуют его базу. — *Прим. перев.*

Предположение, что образы элементов множества M образуют Q-базу модуля $A \otimes_\Lambda Q$, равносильно изоморфности отображения φ. Поскольку $\operatorname{Tor}^\Lambda(A, Q) = 0$, из изоморфности отображения φ вытекает, что $R_M \otimes_\Lambda Q = 0$. Но модуль R_M, по условию, собственный, и поэтому $R_M = 0$. Таким образом, отображение $F_M \to A$ изоморфно, т. е. множество M является Λ-базой модуля A.

ТЕОРЕМА 5.3. *Если кольцо Q является телом и $\operatorname{Tor}^\Lambda(A, Q) = 0$, то любое правильное подмножество, порождающее Λ-модуль A, содержит некоторую Λ-базу модуля A. Таким образом, если A порождается правильным множеством, то A является Λ-свободным модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — правильное подмножество, порождающее модуль A. Тогда образ множества M в тензорном произведении $A \otimes_\Lambda Q$ порождает правый Q-модуль $A \otimes_\Lambda Q$. Следовательно, поскольку кольцо Q является телом, в множестве M содержится подмножество N, образ которого в $A \otimes_\Lambda Q$ образует Q-базу модуля $A \otimes_\Lambda Q$. Так как подмножество N также правильно, то, применяя к нему предложение 5.2, мы видим, что N является Λ-базой модуля A.

ТЕОРЕМА 5.4. *Если кольцо $Q = \Lambda/I$ является телом, то для любого модуля A, принадлежащего к некоторому допустимому семейству $\mathcal{D}$ правых Λ-модулей,*

$$\text{r. } \dim_\Lambda A \leq \text{l. } \dim_\Lambda Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — правильное подмножество, порождающее модуль A. Тогда имеет место точная последовательность $0 \to R_M \to F_M \to A \to 0$. Так как модуль R_M также принадлежит семейству $\mathcal{D}$, то для него можно построить аналогичную точную последовательность. Повторяя построение, мы получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

правых Λ-модулей, в которой модули $X_0, \ldots, X_{n-1}$ свободны, а модуль X_n принадлежит семейству $\mathcal{D}$. Согласно предложению V, 7.2, итерированный связывающий гомоморфизм, соответствующий этой точной последовательности, определяет некоторый изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_1^\Lambda(X_n, Q) \approx \operatorname{Tor}_{n+1}^\Lambda(A, Q).$$

Если теперь $\dim Q \leq n$, то $\operatorname{Tor}_{n+1}^\Lambda(A, Q) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(X_n, Q) = 0$. Поэтому, поскольку модуль X_n, являясь членом допустимого семейства $\mathcal{D}$, порождается некоторым правильным подмножеством, в силу теоремы 5.3 Λ-модуль X_n свободен. Таким образом, $\dim A \leq n$.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГРАДУИРОВАННЫМ И ЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦАМ

ТЕОРЕМА 6.1. *Если в градуированном кольце Λ однородная компонента нулевой степени $\Lambda_0 = Q$ является телом, то любой градуированный правый Λ-модуль A, для которого $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, Q) = 0$,* *является свободным модулем, причем каждая система однородных элементов, порождающая модуль A, содержит некоторую его базу.*

Вытекает из предложения 5.1 и теоремы 5.3.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если в градуированном кольце Λ однородная компонента нулевой степени $\Lambda_0 = Q$ является телом, то для любого градуированного правого Λ-модуля A*

$$\text{r. dim}_\Lambda A \leq \text{l. dim}_\Lambda Q.$$

Вытекает из предложения 5.1 и теоремы 5.4.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Если в градуированном кольце Λ однородная компонента $\Lambda = Q$ является телом, то для любого однородного правого идеала J кольца Λ*

$$1 + \text{r. dim}_\Lambda J \leq \text{l. dim}_\Lambda Q,$$

если только $\text{l. dim}_\Lambda Q > 0$; *если же* $\text{l. dim}_\Lambda Q = 0$, *то* $\text{r. dim}_\Lambda J \leq 0$.

Для доказательства рассмотрим градуированный Λ-модуль Λ/J. Согласно предложению VI, 2.3, $1 + \dim J = \dim \Lambda/J$, если только $\dim \Lambda/J > 0$; если же $\dim \Lambda/J \leq 0$, то $\dim J \leq 0$. Остается вспомнить, что $\dim \Lambda/J \leq \dim Q$.

Заметим, что кольцо Q само является градуированным правым Λ-модулем. Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 6.4. $\text{l. dim}_\Lambda Q = \text{r. dim}_\Lambda Q$, *и утверждения теоремы 6.2 и следствия 6.3 справедливы также для левых Λ-модулей и левых идеалов*[1].

Рассмотрим теперь частный случай, когда градуированное кольцо Λ является кольцом $K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из некоторого тела K. Тогда $Q = K$ и, согласно теореме 4.2, $\dim_\Lambda Q = n$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть K — некоторое тело и $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geq 1$. Тогда для любого градуированного (правого или левого) Λ-модуля A*

$$\dim_\Lambda A \leq n$$

и для любого однородного (правого или левого) идеала J кольца Λ

$$\dim_\Lambda J \leq n - 1.$$

В этой теореме содержится теорема Гильберта о «цепях сизигий» [см. Gröbner W., *Monatshefte für Math.*, **53** (1949), 1—16]. Используемый нами метод представляет собой некоторое усовершенствование метода Ж. Л. Косула (см. Koszul J. L., Colloque de topologie, Bruxelles, 1950). Ниже мы покажем, что если кольцо K коммутативно и полупросто, то $\text{gl. dim}\, \Lambda = n$ (теорема IX, 7.11).

---

[1] Как и выше, здесь предполагается, что кольцо Q является телом. — *Прим. перев.*

Рассмотрим теперь случай, когда кольцо Λ является локальным кольцом, идеал I — его максимальным идеалом и $Q = \Lambda/I$. Согласно предложению 2.1, модуль Q является в этом случае телом.

ТЕОРЕМА 6.1′. *Если локальное кольцо Λ с максимальным идеалом I нетерово справа, то любой правый Λ-модуль A с конечным числом образующих, для которого $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A, Q) = 0$, где $Q = \Lambda/I$, является Λ-свободным модулем, причем каждое конечное множество, порождающее модуль A, содержит некоторую его базу.*

Вытекает из предложения 5.1′ и теоремы 5.3.

ТЕОРЕМА 6.2′. *Если локальное кольцо Λ с максимальным идеалом I нетерово справа, то для любого правого Λ-модуля A с конечным числом образующих*

$$\mathrm{r.\,dim}_\Lambda A \leq \mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q,$$

где $Q = \Lambda/I$.

Вытекает из предложения 5.1′ и теоремы 5.4.

СЛЕДСТВИЕ 6.3′. *Для любого правого идеала J нетерова справа локального кольца Λ*

$$1 + \mathrm{r.\,dim}_\Lambda J \leq \mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q,$$

если только $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q > 0$; *если же* $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q = 0$, *то* $\mathrm{r.\,dim}_\Lambda J \leq 0$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству следствия 6.3.

СЛЕДСТВИЕ 6.4′. *Если локальное кольцо Λ нетерово не только справа, но и слева, то $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda Q = \mathrm{r.\,dim}_\Lambda Q$ и утверждения теоремы 6.2′ и следствия 6.3′ справедливы также для левых Λ-модулей и левых идеалов.*

Рассмотрим теперь два частных случая: кольцо $\Lambda = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальных степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ над некоторым телом K и кольцо $\Lambda = K\{x_1, \ldots, x_n\}$ сходящихся степенных рядов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ над некоторым полем K, снабженным полной недискретной оценкой. В обоих случаях кольцо Λ локально, $Q = K$ и, согласно теореме 4.2, $\dim_\Lambda Q = n$.

Кроме того, в обоих случаях кольцо Λ нетерово (как слева, так и справа); доказательство для кольца $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ см. в работе В. Крулля (Krull. W., *J. de Crelle*, **179** (1938), 204—226), а для кольца $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ см. книгу Бохнера и Мартина, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951, гл. X, теорема 1. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 6.5′. *Пусть $\Lambda = K[[x_1, \ldots, x_n]]$, $n \geq 1$, где K — некоторое тело, или пусть $\Lambda = K\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$, где K — некоторое поле, снабженное полной недискретной оценкой. Тогда для любого (правого или левого) Λ-модуля A с конечным числом образующих*

$$\dim_\Lambda A \leq n$$

и для любого (правого или левого) идеала J кольца Λ

$$\dim_\Lambda J \leq n - 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В ситуации, рассмотренной в § 3, установить коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q_\Lambda) \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[dl, "f_{2,n}"'] \arrow[d, "F_n^{\varphi}"] & \operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, Q_\Gamma) \arrow[dl, "\varphi_n"] \\ \operatorname{Tor}_n^{\Gamma}(A, \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda) \arrow[r, "g_n"'] & \operatorname{Tor}_n^{\Gamma}(A, Q_\Gamma) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q_\Lambda, C) & \operatorname{Ext}_\Lambda^n(Q_\Gamma, C) \arrow[l, "\psi^n"'] \\ \operatorname{Ext}_\Gamma^n(\Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda, C) \arrow[ur, "f_{3,n}"] & \operatorname{Ext}_\Gamma^n(Q_\Gamma, C) \arrow[l, "g^n"] \arrow[u, "F_\varphi^n"'] \arrow[ur, "\varphi^n"'] & \end{tikzcd}$$

где g_n и g^n — отображения, индуцированные отображением g, ψ_n и ψ^n — отображения, индуцированные отображением ψ, а $f_{2,n}$, $f_{3,n}$, φ_n и φ^n — отображения, определенные в § VI, 4.

2. При предположениях теоремы 5.4, используя понятие слабой размерности, введенное в упражнении VI, 3, показать, что теорему 5.4 можно усилить следующим образом: для любого правого модуля A, принадлежащего некоторому допустимому семейству $\mathcal{D}$,

$$\text{w. dim}\, A = \dim A \leq \text{w. dim}\, Q.$$

Применить этот результат к случаям, рассмотренным в § 6.

3. Пусть Λ — пополненное кольцо, пополняющий идеал I которого является таким двусторонним идеалом, что $\bigcap\limits_p I^p = 0$, где I^p — p-я степень идеала I, определяемая рекуррентными формулами $I^p = I^{p-1}I$, $I^1 = I$. Показать, что каждый подмодуль произвольного свободного Λ-модуля является собственным модулем.

4. Пусть Λ — локальное кольцо с таким максимальным идеалом I, что $\bigcap\limits_p I^p = 0$, и пусть $Q = \Lambda/I$. Доказать, что любой правый (соответственно левый) Λ-модуль A с конечным числом образующих, для которого $\operatorname{Tor}_1^{\Lambda}(A, Q) = 0$ (соответственно $\operatorname{Tor}_1^{\Lambda}(Q, A) = 0$), Λ-свободен, причем каждая система его образующих содержит некоторую его базу.

5. Пусть Λ — кольцо, приведенное в качестве примера в конце § I, 7. Показать, что это кольцо можно представить в виде

$$\Lambda = Z[x] + Z[x],$$

причем умножение будет определяться формулой

$$(a, b)(a', b') = (a\,a', ab' + (\varepsilon a')b), \qquad a, a', b, b' \in Z[x].$$

Применяя это построение не к кольцу $Z[x]$, а к произвольному коммутативному кольцу Γ и произвольному кольцевому эндоморфизму $\varepsilon : \Gamma \to \Gamma$, показать, что в результате получается некоторое кольцо Λ с единицей $(1, 0)$. Доказать, что в кольце Λ элемент (a, b) тогда и только тогда обладает обратным справа (или слева) элементом, когда аналогичным свойством в кольце Γ обладает элемент a. Таким образом, если кольцо Γ является (коммутативным) локальным кольцом, то кольцо Λ также локально, причем пополняющее тело кольца Λ совпадает с пополняющим полем кольца Γ.

Доказать, что в случае, когда $\Gamma = K[[x]]$, где K — некоторое поле, а ε — пополняющий эпиморфизм $\Gamma \to K$, получающееся локальное кольцо Λ нетерово слева, но не справа.

6. Пусть Λ — кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов от одного неизвестного x с коэффициентами из некоторого коммутативного кольца K, и пусть $\varepsilon : \Lambda \to K$ — эпиморфизм, сопоставляющий каждому степенному ряду его «свободный член». Показать, что элемент кольца Λ тогда и только тогда обладает обратным элементом, когда образ этого элемента при отображении ε обладает обратным элементом в кольце K. Используя этот результат, с помощью индукции по n доказать, что кольцо $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ тогда и только тогда локально, когда локально кольцо K.

7. Пусть Λ — кольцо $K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов с коэффициентами из некоторого коммутативного кольца K. Для любого Λ-модуля A построить естественный изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_q^{\Lambda}(K, A) \approx \operatorname{Ext}_{\Lambda}^{n-q}(K, A), \qquad 0 \leq q \leq n.$$

[Указание: пусть $X = \Lambda \otimes E(y_1, \ldots, y_n)$ — комплекс, определенный в § 4. Построить естественные изоморфизмы

$$X_q \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda}(X_{n-q}, \Lambda)$$

и показать, что эти изоморфизмы определяют изоморфизм комплексов

$$X \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda}(X, \Lambda),$$

увеличивающий степени на n. Принять во внимание, что

$$\operatorname{Hom}_{\Lambda}(X, \Lambda) \otimes_{\Lambda} A \approx \operatorname{Hom}_{\Lambda}(X, A).]$$

8. Пусть A — произвольный левый Λ-модуль и x_k $(1 \leq k \leq n)$ — некоторые его Λ-эндоморфизмы. Обозначая образ элемента $a \in A$ при эндоморфизме x_k через ax_k, рассмотрим подмодуль I_k модуля A, состоящий из всех элементов вида $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ $(0 \leq k \leq n)$ (в частности, $I_0 = 0$). Предполагая, что

$$\text{(ii)} \qquad (a \in A \mid ax_k \in I_{k-1}) \Longleftrightarrow (a \in I_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

доказать, что

$$\text{l. dim}_{\Lambda} A/I_k \leq k + \text{l. dim}_{\Lambda} A, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

9. Доказать, что утверждения предложения 5.1′ остаются справедливыми для любого пополненного кольца Λ, пополняющий идеал I которого обладает тем свойством, что для каждого его элемента x элемент $1 + x$ обладает обратным справа элементом.

10. В кольце $K[[x]]$, где K — произвольное тело, рассмотреть подкольцо Λ, состоящее из всех степенных рядов, не содержащих неизвестное x в первой степени. Показать, что кольцо Λ локально.

Пусть A — правый Λ-модуль, состоящий из всех степенных рядов без свободных членов. Показать, что модуль A не Λ-свободен и даже не Λ-проективен. Проверить точность последовательности

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} \Lambda + \Lambda \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x^3$, $\psi\lambda = (\lambda x^2, \lambda x)$. Вывести отсюда, что $\mathrm{r.\,dim}_\Lambda A = \infty$.

11. В кольце $K[[x, y]]$, где K — произвольное тело, рассмотреть подкольцо Λ, состоящее из всех степенных рядов, содержащих лишь члены четной степени. Показать, что кольцо Λ локально.

Пусть A — правый Λ-модуль, состоящий из всех степенных рядов из $K[[x, y]]$, содержащих лишь члены нечетной степени. Показать, что модуль A не Λ-свободен и даже не Λ-проективен. Проверить точность последовательности

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} \Lambda + \Lambda \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 y - \lambda_2 x$, $\psi\lambda = (\lambda x, \lambda y)$. Вывести отсюда, что $\mathrm{r.\,dim}_\Lambda A = \infty$.

12. В кольце $K[[x]] + K[[y]]$, где K — произвольное тело, рассмотреть подкольцо Λ, состоящее из всех пар $(f(x), g(y))$, удовлетворяющих условию $f(0) = g(0)$. Показать, что кольцо Λ локально.

Пусть A и B — правые Λ-модули, состоящие из всех пар $(f(x)x, 0)$ и $(0, g(y)y)$ соответственно. Показать, что модули A и B не Λ-свободны и даже не Λ-проективны. Проверить точность последовательностей

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} \Lambda \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\psi'} \Lambda \xrightarrow{\varphi'} A \longrightarrow 0,$$

где ψ и ψ' — отображения вложения, а $\varphi(f(x), g(y)) = (0, g(y)y)$ и $\varphi'(f(x), g(y)) = (f(x)x, 0)$. Вывести отсюда, что $\mathrm{r.\,dim}_\Lambda A = \mathrm{r.\,dim}_\Lambda B = \infty$.

ГЛАВА IX

АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Введение. Теория гомологий (когомологий) ассоциативной K-алгебры Λ является не чем иным, как теорией гомологий (когомологий) некоторого пополненного кольца, а именно кольца $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^*$ (где Λ^* — алгебра, «противоположная» алгебре Λ) с пополняющим эпиморфизмом $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$, задаваемым формулой $\varrho(\lambda \otimes \mu^*) = \lambda\mu$. Группы гомологий $H_n(\Lambda, A)$ и группы когомологий $H^n(\Lambda, A)$ определяются для любого двустороннего Λ-модуля A (§ 4). Если K-алгебра Λ проективна, то для вычисления групп гомологий и когомологий алгебры Λ можно воспользоваться так называемым «стандартным комплексом» (§ 6). При этом мы приходим к первоначальным определениям Хохшильда групп гомологий и когомологий ассоциативных алгебр (Hochschild G., *Ann. of Math.*, **46** (1945), 58—67).

Последний параграф (§ 7) посвящен изучению «размерности» алгебр с гомологической точки зрения. На этом пути мы приходим к новым связям теории гомологий с теорией алгебр, бесспорно заслуживающим дальнейшего изучения[1].

1. АЛГЕБРЫ И ИХ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть K — произвольное коммутативное кольцо (с единицей, обозначаемой символом 1). Кольцо Λ (с единицей, также обозначаемой 1) называется *K-алгеброй*, если оно является K-модулем, причем

$$(k_1\lambda_1)(k_2\lambda_2) = (k_1k_2)(\lambda_1\lambda_2)$$

для любых $k_1, k_2 \in K$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Полагая $\eta k = k1$, мы получим кольцевой гомоморфизм $\eta : K \to \Lambda$, образ которого содержится в центре алгебры Λ. Кольцо K само является, очевидно, K-алгеброй.

[1] Такое изучение было предпринято уже после выхода в свет американского издания этой книги в целом ряде работ американских и японских авторов. См., например, следующую статью и библиографию к ней: Eilenberg S., Rosenberg A., Zelinsky D., On the dimension of modules and algebras, VIII. Dimension of tensor products, *Nagoya Math. J.*, № 10 (1957), 71—93. — *Прим. ред.*

Любое кольцо Λ можно рассматривать как Z-алгебру, где Z — кольцо целых чисел; произведение $n\lambda$ для $n \in Z$, $\lambda \in \Lambda$ имеет при этом обычный смысл.

Пусть Λ и Γ — произвольные K-алгебры. Кольцевой гомоморфизм $\Lambda \to \Gamma$, являющийся одновременно K-гомоморфизмом, мы будем называть гомоморфизмом K-алгебр.

Тензорное произведение $\Lambda \otimes_K \Gamma$ двух K-алгебр Λ и Γ, будучи K-модулем, является K-алгеброй относительно умножения

$$(\lambda_1 \otimes \gamma_1)(\lambda_2 \otimes \gamma_2) = (\lambda_1\lambda_2) \otimes (\gamma_1\gamma_2).$$

До тех пор пока мы будем считать кольцо K фиксированным, мы часто будем вместо $\Lambda \otimes_K \Gamma$ писать просто $\Lambda \otimes \Gamma$. Большое значение в дальнейшем будут иметь задаваемые соответствиями $\lambda \to \lambda \otimes 1$ и $\gamma \to 1 \otimes \gamma$ естественные гомоморфизмы K-алгебр

$$\Lambda \to \Lambda \otimes \Gamma, \qquad \Gamma \to \Lambda \otimes \Gamma.$$

Тензорное умножение K-алгебр обладает тем же свойством ассоциативности, что и тензорное умножение модулей над коммутативным кольцом.

Каждый (левый или правый) модуль A над K-алгеброй Λ можно рассматривать также и как K-модуль[1]. В дальнейшем Λ-модуль A будет, как правило, также и Γ-модулем, где Γ — некоторая другая K-алгебра. В этом случае мы будем всегда предполагать, что 1) на группе A операторы из алгебры Λ перестановочны с операторами из алгебры Γ и 2) K-модули, индуцированные на A алгебрами Λ и Γ, совпадают. Рассмотрим сначала случай, когда A является левым Λ-модулем и левым Γ-модулем (ситуация ${}_{\Lambda-\Gamma}A$). В этом случае, полагая

$$(\lambda \otimes \gamma) a = \lambda(\gamma a) = \gamma(\lambda a),$$

мы можем превратить A в левый $\Lambda \otimes_K \Gamma$-модуль. Имеет место, очевидно, и обратное: любой левый $\Lambda \otimes_K \Gamma$-модуль можно указанным способом получить из некоторого, однозначно определенного левого Λ-Γ-модуля. То же самое справедливо и для правых модулей.

Предположим теперь, что A является левым Λ-модулем и правым Γ-модулем (ситуация ${}_\Lambda A_\Gamma$). Переходя к алгебре Γ^* (см. § VI, 1), мы можем сначала превратить A в левый Γ^*-модуль (полагая $\gamma^* a = a\gamma$), а затем, используя описанное выше построение, в левый $\Lambda \otimes \Gamma^*$-модуль. Таким образом,

$$(\lambda \otimes \gamma^*) a = (\lambda a) \gamma = \lambda(a\gamma).$$

Подобным же образом модуль A можно рассматривать и как правый $\Lambda^* \otimes \Gamma$-модуль.

[1] Используя гомоморфизм η. — *Прим. перев.*

Очевидно, что изложенные соображения естественным образом обобщаются на модули над любым конечным числом K-алгебр.

Понятие тензорного произведения K-алгебр может быть использовано для «расширения кольца операторов» произвольного пополненного кольца. Пусть Λ — пополненное кольцо с пополняющим эпиморфизмом $\varepsilon:\Lambda\to Q$. Предполагая, что кольцо Λ является K-алгеброй, а отображение ε K-гомоморфизмом, возьмем любую другую K-алгебру L. Отображение

$$L\otimes\varepsilon: L\otimes_K\Lambda\to L\otimes_K Q$$

является, очевидно, эпиморфизмом, определяющим K-алгебру $L\otimes_K\Lambda$ как пополненное кольцо. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varepsilon} & Q \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ L\otimes\Lambda & \xrightarrow[L\otimes\varepsilon]{} & L\otimes Q \end{array}$$

где $\varphi\lambda=1\otimes\lambda$, $\psi q=1\otimes q$. Согласно сказанному в § VIII, 3, этой диаграмме соответствуют гомоморфизмы

$$F^{\varphi}:\operatorname{Tor}^{\Lambda}(A,Q)\longrightarrow\operatorname{Tor}^{L\otimes\Lambda}(A,L\otimes Q),\qquad A_{L-\Lambda},$$

$$F_{\varphi}:\operatorname{Ext}_{L\otimes\Lambda}(L\otimes Q,C)\longrightarrow\operatorname{Ext}_{\Lambda}(Q,C),\qquad {}_{\Lambda-L}C.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если K-алгебра Λ проективна и $\operatorname{Tor}_n^K(L,Q)=0$ для всех $n>0$, то отображения F^{φ} и F_{φ} являются изоморфизмами. Кроме того, для любой Λ-проективной резольвенты X модуля Q комплекс $L\otimes_K X$ является $L\otimes_K\Lambda$-проективной резольвентой модуля $L\otimes_K Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что при наших предположениях выполняются оба условия «теоремы об отображении» VIII, 3.1, которые в рассматриваемом случае принимают вид

(i) отображение $(L\otimes_K\Lambda)\otimes_\Lambda Q\longrightarrow L\otimes_K Q$ изоморфно,

(ii) $\operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(L\otimes_K\Lambda,Q)=0$ для всех $n>0$.

Условие (i) непосредственно следует из ассоциативности тензорного умножения. Чтобы убедиться в выполнении условия (ii), рассмотрим произвольную Λ-проективную резольвенту X модуля Q. По определению,

$$\operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(L\otimes_K\Lambda,Q)=H_n(L\otimes_K\Lambda\otimes_\Lambda X)=H_n(L\otimes_K X).$$

Так как K-алгебра Λ проективна, то, согласно предложению II, 6.2, комплекс X является также K-проективной резольвентой модуля Q. Таким образом, $H_n(L\otimes_K X)=\operatorname{Tor}_n^K(L,Q)$. Остается вспомнить, что последняя группа по условию равна нулю для любого $n>0$.

Доказанное предложение 1.1 в дальнейшем неоднократно используется.

Весьма важный вариант понятия тензорного произведения $\Lambda \otimes_K \Gamma$ K-алгебр возникает в случае, когда Λ и Γ являются градуированными K-алгебрами. K-алгебра Λ называется *градуированной*, если она является градуированным кольцом в смысле § VIII, 2, причем $K\Lambda^q \subset \Lambda^q$. Для любых градуированных K-алгебр Λ и Γ тензорное произведение $\Lambda \otimes {}_K\Gamma$ является дважды градуированным K-модулем, который обычным способом можно превратить в (одинарно) градуированный модуль. Для того чтобы в этом модуле определить произведение $(\lambda_1 \otimes \gamma_1)(\lambda_2 \otimes \gamma_2)$, $\lambda_1 \in \Lambda^p$, $\lambda_2 \in \Lambda^m$, $\gamma_1 \in \Gamma^q$, $\gamma_2 \in \Gamma^n$, мы рассмотрим эндоморфизмы $f : \Lambda \to \Lambda$, $g : \Gamma \to \Gamma$, задаваемые умножением слева на элементы λ_1 и γ_1 соответственно. Очевидно, что эндоморфизмы f и g имеют степени p и q. Если мы потребуем, чтобы эндоморфизм $f \otimes g$ задавался умножением слева на элемент $\lambda_1 \otimes \gamma_1$, то, поскольку, согласно сказанному в § IV, 5,

$$(f \otimes g)(\lambda_2 \otimes \gamma_2) = (-1)^{mq} f\lambda_2 \otimes g\gamma_2,$$

мы должны определить умножение формулой

$$(\lambda_1 \otimes \gamma_1)(\lambda_2 \otimes \gamma_2) = (-1)^{mq} \lambda_1\lambda_2 \otimes \gamma_1\gamma_2.$$

Здесь m — степень элемента λ_2, а q — степень элемента γ_1. Относительно так введенного умножения модуль $\Lambda \otimes_K \Gamma$ является градуированной K-алгеброй. Мы будем называть эту алгебру *косым* тензорным произведением градуированных K-алгебр Λ и Γ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для любых градуированных K-алгебр Λ и Γ отображение $\varphi : \Lambda \otimes_K \Gamma \to \Gamma \otimes {}_K\Lambda$, задаваемое формулой*

$$\varphi(\lambda \otimes \gamma) = (-1)^{pq}\, \gamma \otimes \lambda, \qquad \lambda \in \Lambda^p, \quad \gamma \in \Gamma^q,$$

является изоморфизмом K-алгебр.

Доказательство предоставляется читателю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассматривая неградуированные алгебры как алгебры с «тривиальной» градуировкой, в которой каждый элемент имеет нулевую степень, мы можем определение тензорного произведения $\Lambda \otimes \Gamma$ неградуированных алгебр Λ и Γ считать специальным случаем определения тензорного произведения градуированных алгебр. Поэтому предложение 1.2 (с соответствующими упрощениями) имеет место и для неградуированных алгебр.

2. ФОРМУЛЫ АССОЦИАТИВНОСТИ

Мы будем рассматривать три произвольных K-алгебры: Λ, Γ и Σ. В ситуации $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma)$ мы можем группу $A \otimes_\Lambda B$ превратить в правый $\Gamma \otimes \Sigma$-модуль, полагая

$$(a \otimes b)(\gamma \otimes \sigma) = a\gamma \otimes b\sigma.$$

Аналогично, в ситуации $({}_\Lambda B_\Sigma, C_{\Gamma-\Sigma})$ группа $\mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$ превращается в правый $\Lambda \otimes \Gamma$-модуль, если положить

$$(f(\lambda \otimes \gamma))b = (f(\lambda b))\gamma$$

для любого $f \in \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$.

Мы предлагаем читателю сформулировать самому аналогичные определения во всех других возможных ситуациях.

В этом параграфе мы рассмотрим следующие соотношения ассоциативности, обобщающие соотношения, рассмотренные в § II, 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть Λ, Γ, Σ — произвольные K-алгебры. В ситуации* $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma, {}_{\Gamma-\Sigma}C)$ *существует единственный гомоморфизм*

$$r : (A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Gamma\otimes\Sigma} C \longrightarrow A \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma} (B \otimes_\Sigma C),$$

для которого $r((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$. *Этот гомоморфизм является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть Λ, Γ, Σ — произвольные K-алгебры. В ситуации* $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma, C_{\Gamma-\Sigma})$ *существует единственный гомоморфизм*

$$s : \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C),$$

для которого $(sf)(a \otimes b) = (fa)b$, *где* $f : A \to \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$ — *произвольный $\Lambda \otimes \Gamma$-гомоморфизм. Гомоморфизм s является изоморфизмом, устанавливающим естественную эквивалентность функторов.*

Мы предоставляем читателю самому доказать эти предложения.

Для предложения 2.2 существует аналог, относящийся к ситуации, получающейся при замене левых операторов правыми, правых — левыми и модуля $A \otimes_\Lambda B$ — модулем $B \otimes_\Lambda A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Если в ситуации* $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma)$ *модуль A $\Lambda \otimes \Gamma$-проективен, а модуль B Σ-проективен, то тензорное произведение $A \otimes_\Lambda B$ является проективным правым $\Gamma \otimes \Sigma$-модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $\mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A\otimes_\Lambda B, C)$ является точным функтором правого $\Gamma \otimes \Sigma$-модуля C. Но, согласно предложению 2.2, этот функтор эквивалентен композиции функтора $\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, D)$ с функтором $D = \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$. Так как модуль B Σ-проективен, то $\mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$ является точным функтором аргумента C. В то же время, поскольку модуль A $\Lambda \otimes \Gamma$-проективен, $\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, D)$ является точным функтором аргумента D. Поэтому композиция этих функторов действительно является точным функтором аргумента C.

Заменяя в предложении 2.3 алгебры Λ, Γ, Σ алгебрами Λ^*, Σ, K соответственно, а модули A и B — модулями B и Λ, мы получим

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Если алгебра Λ K-проективна, то любой $\Lambda^*\otimes\Sigma$-проективный правый модуль B Σ-проективен.*

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Если в ситуации* (A_Γ, B_Σ) *модуль A Γ-проективен, а модуль B Σ-проективен, то модуль $A \otimes_K B$ $\Gamma \otimes \Sigma$-проективен.*

Совершенно аналогично доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3а. *Если в ситуации* $({}_\Lambda B_\Sigma, C_{\Gamma-\Sigma})$ *модуль B Λ-проективен, а модуль C $\Gamma\otimes\Sigma$-инъективен, то группа* $\mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$ *является инъективным правым $\Lambda\otimes\Gamma$-модулем.*

СЛЕДСТВИЕ 2.4а. *Если алгебра Γ K-проективна, то любой $\Gamma \otimes \Sigma$-инъективный правый модуль C Σ-инъективен.*

СЛЕДСТВИЕ 2.5а. *Если в ситуации $({}_\Lambda B, C_\Gamma)$ модуль B Λ-проективен, а модуль C Γ-инъективен, то модуль* $\mathrm{Hom}_K(B, C)$ *$\Lambda \otimes \Gamma$-инъективен.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть K-алгебры Λ, Γ, Σ K-проективны, и пусть в ситуации $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma)$ $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда, если комплекс X является $\Lambda \otimes \Gamma$-проективной резольвентой модуля A, а комплекс Y — $\Lambda^* \otimes \Sigma$-проективной резольвентой модуля B, то комплекс $X \otimes_\Lambda Y$ является $\Gamma \otimes \Sigma$-проективной резольвентой модуля $A \otimes_\Lambda B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что, согласно сказанному в § IV, 5, тензорное произведение $X \otimes_\Lambda Y$ определяется сначала как двойной комплекс, который затем обычным способом превращается в (одинарный) комплекс. Так как алгебра Λ K-проективна, то, согласно следствию 2.4, комплекс Y Σ-проективен. Отсюда, согласно предложению 2.3, вытекает, что комплекс $X \otimes_\Lambda Y$ $\Gamma \otimes \Sigma$-проективен. Таким образом, остается показать, что комплекс $X \otimes_\Lambda Y$ над модулем $A \otimes_\Lambda B$ ацикличен. Поскольку функтор $\otimes$ точен справа, из предложения II, 4.3 следует, что последовательность

$$X_1 \otimes_\Lambda Y_0 + X_0 \otimes_\Lambda Y_1 \longrightarrow X_0 \otimes_\Lambda Y_0 \longrightarrow A \otimes_\Lambda B \rightarrow 0$$

точна. Поэтому достаточно показать, что $H_n(X \otimes_\Lambda Y) = 0$ для $n > 0$. Так как алгебра Σ K-проективна, то, согласно следствию 2.4, комплекс Y Λ-проективен. Аналогично комплекс X Λ-проективен, ибо K-проективна алгебра Γ. Таким образом, комплексы X и Y являются Λ-проективными резольвентами модулей A и B соответственно. Следовательно, $H_n(X \otimes_\Lambda Y) = \mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, B)$. Остается вспомнить, что последняя группа по условию равна нулю для любого $n > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Пусть K-алгебры Γ и Σ K-проективны, и пусть в ситуации (A_Γ, B_Σ) $\mathrm{Tor}_n^K(A, B) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда, если комплекс X является Γ-проективной резольвентой модуля A, а комплекс Y — Σ-проективной резольвентой модуля B, то комплекс $X \otimes_K Y$ является $\Gamma \otimes \Sigma$-проективной резольвентой модуля $A \otimes_K B$.*

Аналогично доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6а. *Пусть K-алгебры Λ, Γ, Σ K-проективны, и пусть в ситуации $({}_\Lambda B_\Sigma, C_{\Gamma-\Sigma})$ $\mathrm{Ext}_\Sigma^n(B, C) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда, если комплекс X является $\Lambda^* \otimes \Sigma$-проективной резольвентой модуля B, а комплекс Y — $\Gamma \otimes \Sigma$-инъективной резольвентой модуля C, то комплекс* $\mathrm{Hom}_\Sigma(X, Y)$ *является $\Lambda \otimes \Gamma$-инъективной резольвентой модуля* $\mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7а. *Пусть K-алгебры Λ, Γ K-проективны, и пусть в ситуации $({}_\Lambda B, C_\Gamma)$ $\mathrm{Ext}_K^n(B, C) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда, если комплекс X является Λ-проективной резольвентой модуля B, а комплекс Y — Γ-инъективной резольвентой модуля C, то комплекс* $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ *является $\Lambda \otimes \Gamma$-инъективной резольвентой модуля* $\mathrm{Hom}_K(B, C)$.

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть K-алгебры Λ, Γ, Σ K-проективны, и пусть в ситуации* $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_{\Lambda}B_{\Sigma}, {}_{\Gamma-\Sigma}C)$

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) = 0 = \mathrm{Tor}_n^{\Sigma}(B, C) \text{ для всех } n > 0. \tag{1}$$

Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma \otimes \Sigma}(A \otimes_{\Lambda} B, C) \approx \mathrm{Tor}^{\Lambda \otimes \Gamma}(A, B \otimes_{\Sigma} C),$$

на составляющих нулевой степени совпадающий с изоморфизмом, рассмотренным в предложении 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — произвольная $\Lambda \otimes \Gamma$-проективная резольвента модуля A, Y — произвольная $\Lambda^* \otimes \Sigma$-проективная резольвента модуля B и Z — произвольная $\Gamma \otimes \Sigma$-проективная резольвента модуля C. Тогда в силу предложения 2.6 из соотношения (1) вытекает, что комплекс $X \otimes_{\Lambda} Y$ является $\Gamma \otimes \Sigma$-проективной резольвентой модуля $A \otimes_{\Lambda} B$, а комплекс $Y \otimes_{\Sigma} Z$ — $\Lambda \otimes \Gamma$-проективной резольвентой модуля $B \otimes_{\Sigma} C$. Следовательно,

$$\mathrm{Tor}^{\Gamma \otimes \Sigma}(A \otimes_{\Lambda} B, C) = H((X \otimes_{\Lambda} Y) \otimes_{\Gamma \otimes \Sigma} Z) \approx$$
$$\approx H(X \otimes_{\Lambda \otimes \Gamma}(Y \otimes_{\Sigma} Z)) = \mathrm{Tor}^{\Lambda \otimes \Gamma}(A, B \otimes_{\Sigma} C).$$

Совершенно так же доказывается

ТЕОРЕМА 2.8а. *Пусть K-алгебры Λ, Γ, Σ K-проективны, и пусть в ситуации* $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_{\Lambda}B_{\Sigma}, C_{\Gamma-\Sigma})$

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) = 0 = \mathrm{Ext}_{\Sigma}^n(B, C) \text{ для всех } n > 0.$$

Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_{\Gamma \otimes \Sigma}(A \otimes_{\Lambda} B, C) \approx \mathrm{Ext}_{\Lambda \otimes \Gamma}(A, \mathrm{Hom}_{\Sigma}(B, C)),$$

на составляющих нулевой степени совпадающий с изоморфизмом, рассмотренным в предложении 2.2.

3. ОБВЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА Λ^e

Пусть Λ — произвольная K-алгебра. Двусторонним Λ-модулем называется абелева группа A, в которой определены левые и правые операторы из алгебры Λ, причем $(\lambda a)\mu = \lambda(a\mu)$ и $ka = ak$ для любых $a \in A$, λ, $\mu \in \Lambda$, $k \in K$. Таким образом, при рассмотрении двусторонних модулей мы имеем дело с ситуацией $({}_{\Lambda}A_{\Lambda})$ (в обозначениях предыдущего параграфа).

Любой двусторонний Λ-модуль A можно рассматривать как левый модуль над алгеброй $\Lambda \otimes_K \Lambda^*$, полагая

$$(\lambda \otimes \mu^*)a = \lambda a \mu.$$

Алгебра $\Lambda \otimes_K \Lambda^*$ называется *обвертывающей алгеброй* алгебры Λ и обозначается через Λ^e. Двусторонний Λ-модуль A можно также рассматривать как правый Λ^e-модуль, полагая $a(\lambda \otimes \mu^*) = \mu a \lambda$. Так как сама алгебра Λ является частным случаем двустороннего Λ-модуля, то алгебру Λ всегда можно рассматривать как левый

Λ^e-модуль; при этом операторы из алгебры Λ^e действуют на Λ по формуле

$$(\mu \otimes \gamma^*)\lambda = \mu\lambda\gamma, \qquad \lambda, \mu, \gamma \in \Lambda.$$

Полагая, в частности, $\lambda = 1$, мы получим отображение

$$\varrho : \Lambda^e \longrightarrow \Lambda,$$

для которого $\varrho(\mu \otimes \gamma^*) = \mu\gamma$. Отображение ϱ является эпиморфизмом левых Λ^e-модулей и, следовательно, определяет алгебру Λ^e как пополненное кольцо (в смысле § VIII, 1). Соответствующий пополняющий идеал, т. е. ядро эпиморфизма ϱ, мы будем обозначать через J.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Левый идеал J алгебры Λ^e порождается элементами вида* $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sum \mu_i \otimes \gamma_i^* \in J$, то $\sum \mu_i\gamma_i = 0$ и, следовательно,

$$(1) \qquad \sum \mu_i \otimes \gamma_i^* = \sum (\mu_i \otimes 1)(1 \otimes \gamma_i^* - \gamma_i \otimes 1).$$

Определим K-гомоморфизм

$$j : \Lambda \longrightarrow J,$$

полагая $j\lambda = \lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$. Легко проверить, что

$$j(\lambda\mu) = \lambda(j\mu) + (j\lambda)\mu.$$

Гомоморфизм j является примером так называемого скрещенного гомоморфизма, общее определение которого следующее: K-гомоморфизм $f : \Lambda \to A$ K-алгебры Λ в левый Λ^e-модуль A (т. е. в двусторонний Λ-модуль A) называется *скрещенным гомоморфизмом* (или *дифференцированием*), если

$$f(\lambda\mu) = \lambda(f\mu) + (f\lambda)\mu.$$

Для любого скрещенного гомоморфизма $f1 = 0$; поэтому можно считать, что областью определения скрещенных гомоморфизмов является модуль $\Lambda' = \operatorname{Coker}(K \to \Lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Сопоставляя произвольному гомоморфизму $h \in \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)$ отображение hj, мы получим изоморфное отображение K-модуля $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)$ на K-модуль всех скрещенных гомоморфизмов алгебры Λ в левый Λ^e-модуль A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любой скрещенный гомоморфизм $f : \Lambda \to A$ можно представить в виде сквозного отображения $\Lambda \xrightarrow{j} J \xrightarrow{h} A$, где h — некоторый Λ^e-гомоморфизм. Пусть $x = \sum \mu_i \otimes \gamma_i^* \in J$. Руководствуясь соотношением (1), положим

$$hx = -\sum \mu_i f(\gamma_i).$$

Очевидно, что h является K-гомоморфизмом. Далее

$$-h((\lambda \otimes \tau^*)x) = -h(\sum \lambda\mu_i \otimes (\gamma_i\tau)^*) = \sum \lambda\mu_i f(\gamma_i\tau) =$$
$$= \sum \lambda\mu_i(f\gamma_i)\tau + \sum \lambda\mu_i\gamma_i(f\tau).$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку $\sum \mu_i \gamma_i = 0$, а первое можно записать в виде — $(\lambda \otimes \tau^*) hx$. Тем самым доказано, что отображение h является Λ^e-гомоморфизмом.

Λ^e-гомоморфизм $h : J \to A$ тогда и только тогда можно продолжить до некоторого Λ^e-гомоморфизма $\Lambda^e \to A$, когда существует такой элемент $a \in A$, что $h(\sum \mu_i \otimes \gamma_i^*) = \sum \mu_i a \gamma_i$. Соответствующий такому Λ^e-гомоморфизму h скрещенный гомоморфизм $f = hj : \Lambda \to A$ задается формулой $f\lambda = \lambda a - a\lambda$. Отображения такого вида называются *главными* скрещенными гомоморфизмами (или *внутренними дифференцированиями*). K-модулю всех главных скрещенных гомоморфизмов соответствует образ отображения $A \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e, A) \to \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)$.

4. ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР

Пусть Λ — произвольная K-алгебра и A — некоторый двусторонний Λ-модуль. С помощью пополненной алгебры Λ^e (с пополняющим эпиморфизмом $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$) мы определим сейчас группы гомологий и когомологий алгебры Λ с коэффициентами в модуле A.

Рассматривая сначала модуль A как правый Λ^e-модуль, определим *n-ю*[1] *группу гомологий* алгебры Λ формулой

(1) $$H_n(\Lambda, A) = \mathrm{Tor}_n^{\Lambda^e}(A, \Lambda).$$

Рассматривая затем модуль A как левый Λ^e-модуль, определим *n-ю*[1] *группу когомологий* алгебры Λ формулой

(2) $$H^n(\Lambda, A) = \mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, A).$$

Как группы гомологий (1), так и группы когомологий (2) являются K-модулями. В § 6 будет показано, что в случае, когда кольцо K является полем, введенные нами группы когомологий $H^n(\Lambda, A)$ совпадают с группами когомологий в смысле Хохшильда [Hochschild G., *Ann. of Math.*, **46** (1945), 58—67]. В соответствии с этим мы будем определенные выше группы называть хохшильдовыми группами гомологий и когомологий алгебры Λ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Принятые нами обозначения $H_n(\Lambda, A)$ и $H^n(\Lambda, A)$ несколько противоречат нашему общему соглашению относительно градуированных модулей; действительно, мы здесь не можем использовать символ $H(\Lambda, A)$ ни для обозначения градуированного модуля гомологий, ни для обозначения градуированного модуля когомологий[2].

Для вычисления групп гомологий и групп когомологий алгебры Λ можно пользоваться любой проективной резольвентой X алгебры

[1] Или *n-мерную*. — *Прим. ред.*

[2] Эту трудность обычно обходят, обозначая полный модуль гомологий, т. е. прямую сумму $\Sigma H_n(\Lambda, A)$, через $H_*(\Lambda, A)$, а полный модуль когомологий $\Sigma H^n(\Lambda, A)$ — через $H^*(\Lambda, A)$. — *Прим. ред.*

Λ, рассматриваемой как левый Λ^e-модуль:

$$H_n(\Lambda, A) = H_n(A \otimes_{\Lambda^e} X),$$
$$H^n(\Lambda, A) = H^n(\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(X, A)).$$

Две системы функторов $H_n(\Lambda, A)$ и $H^n(\Lambda, A)$ образуют связанные последовательности ковариантных функторов одного аргумента A, т. е. для любой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ двусторонних Λ-модулей имеют место точные последовательности

$$\ldots \longrightarrow H_n(\Lambda, A') \longrightarrow H_n(\Lambda, A) \longrightarrow H_n(\Lambda, A'') \longrightarrow H_{n-1}(\Lambda, A') \longrightarrow \ldots,$$
$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(\Lambda, A'') \longrightarrow H^n(\Lambda, A') \longrightarrow H^n(\Lambda, A) \longrightarrow H^n(\Lambda, A'') \longrightarrow \ldots.$$

Эти точные последовательности являются гомологическими последовательностями, соответствующими точным последовательностям комплексов

$$0 \longrightarrow A' \otimes_{\Lambda^e} X \longrightarrow A \otimes_{\Lambda^e} X \longrightarrow A'' \otimes_{\Lambda^e} X \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(X, A') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(X, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(X, A'') \longrightarrow 0.$$

Применяя к рассматриваемому случаю формулы VIII, 1, (2) — (4а), мы, в частности, получим, что

(3) $$H_0(\Lambda, A) = \operatorname{Coker}(A \otimes_{\Lambda^e} J \longrightarrow A) = A/AJ,$$

(3а) $$H^0(\Lambda, A) = \operatorname{Ker}(A \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)),$$

(4а) $$H^1(\Lambda, A) = \operatorname{Coker}(A \to \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)).$$

С другой стороны, из предложения 3.1 следует, что подмодуль AJ модуля A порождается элементами вида $a\lambda - \lambda a$ ($a \in A$, $\lambda \in \Lambda$). Далее, гомоморфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, A)$, соответствующий некоторому элементу $a \in A$, тогда и только тогда равен нулю, когда его ядро содержит все элементы вида $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$, т. е. когда $\lambda a = a\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Элементы модуля A, удовлетворяющие этому соотношению, мы будем называть *инвариантными* элементами. Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Группу гомологий $H_0(\Lambda, A)$ можно отождествить с факторгруппой Λ-модуля A по подмодулю, порожденному всеми элементами вида $a\lambda - \lambda a$, $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$. Группу когомологий $H^0(\Lambda, A)$ можно отождествить с подгруппой инвариантных элементов модуля A. Группу когомологий $H^1(\Lambda, A)$ можно отождествить с факторгруппой группы всех скрещенных гомоморфизмов $\Lambda \to A$ по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов.*

Последнее утверждение немедленно вытекает из предложения 3.2 и следующего за ним замечания.

Применим теперь к рассматриваемому случаю соотношения ассоциативности 2.8 и 2.8а. Так как в ситуации $({}_\Sigma A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Sigma)$, где Λ и Σ — проективные K-алгебры, для всех $n > 0$ выполняется соотношение $\operatorname{Tor}_n^\Sigma(B, \Sigma) = 0$ и, кроме того, в случае, когда алгебра Λ

полупроста, — также соотношение $\operatorname{Tor}_n^A(A, B) = 0$, то, согласно теореме 2.8, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть K-алгебры Λ и Σ K-проективны и, кроме того, алгебра Λ полупроста. Тогда в ситуации $({}_\Sigma A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Sigma)$ имеет место изоморфизм*

$$H_n(\Sigma, A \otimes_\Lambda B) \approx \operatorname{Tor}_n^{\Lambda \otimes \Sigma^*}(A, B).$$

Аналогично, заменяя в теореме 2.8а пару (Γ, A) парой (Λ^*, Λ), мы получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Пусть K-алгебры Λ и Σ K-проективны и, кроме того, алгебра Σ полупроста. Тогда в ситуации $({}_\Lambda B_\Sigma, {}_\Lambda C_\Sigma)$ имеет место изоморфизм*

$$H^n(\Lambda, \operatorname{Hom}_\Sigma(B, C)) \approx \operatorname{Ext}^n_{\Lambda^* \otimes \Sigma}(B, C).$$

Наконец, заменяя в предложении 4.2 пару (Λ, Σ) парой (K, Λ), а в предложении 4.3 алгебру Σ кольцом K, мы получим

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Для любой K-алгебры Λ над полупростым кольцом K имеют место изоморфизмы*

$$H_n(\Lambda, A \otimes_K B) \approx \operatorname{Tor}_n^\Lambda(B, A) \qquad ({}_\Lambda A, B_\Lambda),$$
$$H^n(\Lambda, \operatorname{Hom}_K(B, C)) \approx \operatorname{Ext}^n_\Lambda(B, C) \qquad ({}_\Lambda B, {}_\Lambda C).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всюду мы рассматривали алгебру Λ как левый Λ^e-модуль, а алгебру Λ^e как пополненное слева кольцо. Но алгебру Λ^e можно рассматривать также как кольцо, пополненное справа, пополняющий эпиморфизм ϱ' которого определяется формулой $\varrho'(\mu \otimes \gamma^*) = \gamma\mu$, а алгебру Λ соответственно — как правый Λ^e-модуль. При этом, однако, получаются те же самые группы гомологий и когомологий $H_n(\Lambda, A)$ и $H^n(\Lambda, A)$, потому что они являются сателлитами функторов $H_0(\Lambda, A)$ и $H^0(\Lambda, A)$, определение которых не зависит от выбора пополняющих эпиморфизмов ϱ, ϱ'. Если алгебра Λ коммутативна, то $\varrho = \varrho'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположение, что кольцо K полупросто, можно без какого-либо ущерба для общности заменить предположением, что кольцо K является полем. Действительно, любое коммутативное полупростое кольцо K разлагается в прямую сумму $K_1 + \ldots + K_n$ полей. Этому разложению соответствует разложение $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_n$ произвольной K-алгебры Λ в прямую сумму K_i-алгебр $\Lambda_i = K_i\Lambda$. Для обертывающей алгебры Λ^e также имеет место прямое разложение $\Lambda^e = \Lambda_1^e + \ldots + \Lambda_n^e$, где $\Lambda_i^e = \Lambda_i \otimes_{K_i} \Lambda_i^* = K_i\Lambda^e$. Этим разложениям соответствуют прямые разложения функторов $\operatorname{Ext}_\Lambda$, $\operatorname{Ext}_{\Lambda^e}$ и т. д.

5. ГРУППЫ ХОХШИЛЬДА КАК ФУНКТОРЫ АЛГЕБРЫ Λ

Пусть Λ и Γ — произвольные K-алгебры и $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ — некоторый их гомоморфизм. Очевидно, что гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм $\varphi^e : \Lambda^e \to \Gamma^e$. Более обще, пусть Λ — произвольная

K-алгебра, а Γ — произвольная L-алгебра. Рассмотрим пару таких кольцевых гомоморфизмов

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma, \quad \psi : K \longrightarrow L,$$

что $\varphi(k\lambda) = \psi(k)\varphi(\lambda)$, $k \in K$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда гомоморфное отображение φ индуцирует гомоморфное отображение φ_e алгебры $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^*$ в алгебру $\Gamma^e = \Gamma \otimes_L \Gamma^*$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^e & \xrightarrow{\varrho_\Lambda} & \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^e} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \Gamma^e & \xrightarrow[\varrho_\Gamma]{} & \Gamma \end{array}$$

Таким образом, мы находимся в описанной в § VIII, 3 ситуации для пополненных колец. Следовательно, для любого двустороннего Γ-модуля A (который с помощью гомоморфизма φ можно рассматривать также и как двусторонний Λ-модуль) имеют место гомоморфизмы

$$(1) \qquad F_n^\varphi : H_n(\Lambda, A) \longrightarrow H_n(\Gamma, A),$$

$$(2) \qquad F_\varphi^n : H^n(\Gamma, A) \longrightarrow H^n(\Lambda, A).$$

В этом смысле группа $H_n(\Lambda, A)$ является ковариантным, а группа $H^n(\Lambda, A)$ — контравариантным функтором аргумента Λ.

В теореме об отображении VIII, 3.1 даны необходимые и достаточные условия, при выполнении которых гомоморфизмы F_n^φ и F_φ^n являются изоморфизмами. Мы сейчас воспользуемся этой теоремой в случае, когда алгебра Γ получается из алгебры Λ с помощью расширения основного кольца K до некоторого кольца L. Таким образом, мы предполагаем, что Λ и L являются K-алгебрами, причем алгебра L коммутативна, $\Gamma = L \otimes_K \Lambda$, $\varphi(\lambda) = 1 \otimes \lambda$ и $\psi(k) = k1 \in L$. В этом случае

$$(L \otimes_K \Lambda)^e = (L \otimes_K \Lambda) \otimes_L (L \otimes_K \Lambda)^* \approx (L \otimes_K \Lambda) \otimes_L (L \otimes_K \Lambda^*) \approx$$
$$\approx L \otimes_K \Lambda \otimes_K \Lambda^* = L \otimes_K \Lambda^e.$$

Следовательно, мы можем воспользоваться предложением 1.1, заменяя в нем алгебру Λ и Λ-модуль Q алгеброй Λ^e и Λ^e-модулем Λ соответственно. Таким образом, замечая, что если алгебра Λ K-проективна, то $\operatorname{Tor}_n^K(L, \Lambda) = 0$ для всех $n > 0$, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если K-алгебра Λ K-проективна, а K-алгебра L коммутативна, то для любого двустороннего $L \otimes_K \Lambda$-модуля A имеют место изоморфизмы*

$$F_n : H_n(\Lambda, A) \approx H_n(L \otimes_K \Lambda, A),$$

$$F^n : H^n(L \otimes_K \Lambda, A) \approx H^n(\Lambda, A).$$

Кроме того, для любой Λ^e-проективной резольвенты X модуля Λ комплекс $L \otimes_K X$ является $(L \otimes_K \Lambda)^e$-проективной резольвентой модуля $L \otimes_K \Lambda$.

В связи с этим предложением следует отметить, что, поскольку тензорное произведение $L \otimes_K \Lambda$ рассматривается как L-алгебра, на двустороннем $L \otimes_K \Lambda$-модуле A левые операторы из кольца L совпадают с правыми.

В случае когда K является полем, предложение 5.1 справедливо для любых K-алгебр Λ, ибо в этом случае произвольная K-алгебра Λ всегда K-проективна. Применяя это замечание к случаю, когда L является расширением поля K, мы получаем, что группы гомологий и когомологий не изменяются при произвольном расширении основного поля.

Пусть опять Λ и Γ — произвольные K-алгебры. Прямая сумма $\Lambda + \Gamma$ их аддитивных групп, в которой умножение и операторы из кольца K задаются формулами

$$(\lambda_1, \gamma_1)(\lambda_2, \gamma_2) = (\lambda_1\lambda_2, \gamma_1\gamma_2), \qquad k(\lambda, \gamma) = (k\lambda, k\gamma),$$

очевидно, также являются K-алгеброй Σ. Эта алгебра Σ называется *прямой суммой*[1] данных алгебр Λ и Γ. Если e_Λ и e_Γ — единицы алгебр Λ и Γ соответственно, то (e_Λ, e_Γ) является единицей алгебры Σ.

Отображения $\varphi : \Sigma \to \Lambda$, $\psi : \Sigma \to \Gamma$, для которых $\varphi(\lambda, \gamma) = \lambda$, $\psi(\lambda, \gamma) = \gamma$, являются гомоморфизмами K-алгебр и потому индуцируют гомоморфизмы

$$\varphi^e : \Sigma^e \longrightarrow \Lambda^e, \qquad \psi^e : \Sigma^e \longrightarrow \Gamma^e.$$

С помощью этих гомоморфизмов произвольный двусторонний Λ-модуль A, так же как и произвольный двусторонний Γ-модуль A', можно рассматривать как двусторонний Σ-модуль. Следовательно, прямая сумма $A + A'$ является двусторонним Σ-модулем.

Для любого двустороннего Σ-модуля A рассмотрим множество $e_\Lambda A e_\Lambda = \Lambda A \Lambda$, являющееся двусторонним Λ-модулем. Легко видеть, что модуль $\Lambda A \Lambda$ можно отождествить как с модулем $\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(\Lambda^e, A)$, так и с модулем $A \otimes_{\Sigma^e} \Lambda^e$. Кроме того, в ситуации $({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Gamma A'_\Gamma, {}_\Sigma C_\Sigma)$ имеют место следующие тождества :

$$C \otimes_{\Sigma^e}(A + A') = (\Lambda C \Lambda + \Gamma C \Gamma) \otimes_{\Sigma^e}(A + A') =$$
$$= \Lambda C \Lambda \otimes_{\Lambda^e} A + \Gamma C \Gamma \otimes_{\Gamma^e} A',$$
$$\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(A + A', C) = \mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(A + A', \Lambda C \Lambda + \Gamma C \Gamma) =$$
$$= \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(A, \Lambda C \Lambda) + \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(A', \Gamma C \Gamma).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Двусторонний Λ-модуль A тогда и только тогда Λ^e-проективен, когда он Σ^e-проективен.*

---

[1] В оригинале вместо термина «прямая сумма» используется термин «прямое произведение». — *Прим. перев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметив, что $\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(A, \Lambda C\Lambda)$ для любого Σ^e-модуля C, предположим сначала, что модуль A Λ^e-проективен. Тогда, поскольку $\Lambda C\Lambda$ является точным функтором аргумента C, $\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(A, C)$ будет точным функтором того же аргумента C и, следовательно, модуль A будет Σ^e-проективным модулем. Если теперь модуль A Σ^e-проективен, то, принимая во внимание соотношение $\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(A, C)$, справедливое для любого Λ^e-модуля C, мы получим, что $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(A, C)$ является точным функтором аргумента C и, следовательно, A является Λ^e-проективным модулем.

ТЕОРЕМА 5.3. (Теорема аддитивности). *Для любой Λ^e-проективной резольвенты X модуля Λ и любой Γ^e-проективной резольвенты Y модуля Γ комплекс $X + Y$ является Σ^e-проективной резольвентой модуля $\Sigma = \Lambda + \Gamma$. Кроме того, для любого двустороннего Σ-модуля A*

(3) $H_n(\Sigma, A) \approx H_n(\Sigma, \Lambda A\Lambda + \Gamma A\Gamma) \approx H_n(\Lambda, \Lambda A\Lambda) + H_n(\Gamma, \Gamma A\Gamma)$,

(4) $H^n(\Sigma, A) \approx H^n(\Sigma, \Lambda A\Lambda + \Gamma A\Gamma) \approx H^n(\Lambda, \Lambda A\Lambda) + H^n(\Gamma, \Gamma A\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5.2, комплексы X, Y, а следовательно, и комплекс $X + Y$ Σ^e-проективны. Отсюда и из соотношения $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ вытекает, что комплекс $X + Y$ является Σ^e-проективной резольвентой модуля Σ. Далее,

$$A \otimes_{\Sigma^e} (X + Y) = (\Lambda A\Lambda + \Gamma A\Gamma) \otimes_{\Sigma^e} (X + Y) = \\ = \Lambda A\Lambda \otimes_{\Lambda^e} X + \Gamma A\Gamma \otimes_{\Gamma^e} Y,$$

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(X + Y, A) = \mathrm{Hom}_{\Sigma^e}(X + Y, \Lambda A\Lambda + \Gamma A\Gamma) = \\ = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X, \Lambda A\Lambda) + \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(Y, \Gamma A\Gamma).$$

Для доказательства изоморфизмов (3) и (4) остается теперь перейти к группам гомологий.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Для любого двустороннего Λ-модуля A эпиморфизм $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(\Sigma, A) \approx H_n(\Lambda, A),$$
$$H^n(\Lambda, A) \approx H^n(\Sigma, A).$$

6. СТАНДАРТНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Как было отмечено в § 4, группы гомологий и когомологий произвольной K-алгебры Λ обычно вычисляются с помощью некоторой Λ^e-проективной резольвенты модуля Λ. Существование по крайней мере одной такой резольвенты, так же как и ее единственность с точностью до гомотопии, вытекает из результатов § V, 1. В этом параграфе будет описана конструкция, относящая произвольной K-алгебре Λ некоторый вполне определенный ацикличный левый комплекс $S(\Lambda)$ над алгеброй Λ, рассматриваемой как левый

Λ^e-модуль. Если алгебра Λ K-проективна, то комплекс $S(\Lambda)$ является Λ^e-проективной резольвентой модуля Λ. Кроме того, комплекс $S(\Lambda)$ является функтором алгебры Λ.

Для каждого целого $n \geq -1$ обозначим через $S_n(\Lambda)$ тензорное произведение (над кольцом K) $n+2$ экземпляров модуля Λ. Другими словами, $S_{-1}(\Lambda) = \Lambda$ и $S_{n+1}(\Lambda) = \Lambda \otimes_K S_n(\Lambda)$. Группу $S_n(\Lambda)$ мы превратим в двусторонний Λ-модуль, полагая

$$(\mu \otimes \gamma^*)(\lambda_0 \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes \lambda_{n+1}) = (\mu\lambda_0) \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes (\lambda_{n+1}\gamma).$$

Сопоставляя любому элементу $a \in S_n(\Lambda)$ элемент $s_n a = 1 \otimes a$, мы получим некоторый K-гомоморфизм

$$s_n : S_n(\Lambda) \longrightarrow S_{n+1}(\Lambda),$$

являющийся, очевидно, правым Λ-гомоморфизмом[1]. Кроме того, полагая $t_n(\lambda \otimes a) = \lambda a$, мы получим такой гомоморфизм $t_n : S_{n+1}(\Lambda) \to S_n(\Lambda)$, что композиция $t_n s_n$ является тождественным отображением. Следовательно, гомоморфизм s_n является мономорфизмом.

Рассмотрим теперь левые Λ-гомоморфизмы

$$d_n : S_n(\Lambda) \longrightarrow S_{n-1}(\Lambda),$$

где n — любое неотрицательное число, для которых

$$(1) \qquad d_0(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu \in \Lambda,$$

$$(2) \qquad d_{n+1} s_n x + s_{n-1} d_n x = x, \qquad x \in S_n(\Lambda),\ n \geq 0.$$

Этими условиями гомоморфизмы d_n однозначно определяются по индукции. Действительно, если определен гомоморфизм d_n, то формула (2) определяет гомоморфизм d_{n+1} на образе гомоморфизма s_n и, следовательно, на всем модуле $S_{n+1}(\Lambda)$, ибо образ гомоморфизма s_n порождает $S_{n+1}(\Lambda)$ как левый Λ-модуль. Легко проверить, что гомоморфизмы d_n, удовлетворяющие соотношениям (1) и (2), можно определить также следующей явной формулой:

$$(3) \qquad d_n(\lambda_0 \otimes \ldots \otimes \lambda_{n+1}) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \lambda_0 \otimes \ldots \otimes (\lambda_i \lambda_{i+1}) \otimes \ldots \otimes \lambda_{n+1}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что гомоморфизм d_n является также правым Λ-гомоморфизмом и, следовательно, Λ^e-гомоморфизмом.

Покажем теперь, что $d_{n-1}d_n = 0$ для всех $n > 0$. Для $n = 1$ это следует из соотношения ассоциативности $(\lambda_0\lambda_1)\lambda_2 = \lambda_0(\lambda_1\lambda_2)$, справедливого в алгебре Λ. Для $n > 1$ мы докажем соотношение $d_{n-1}d_n = 0$ индукцией по n, используя соотношение (2). Действительно, из соотношения (2) вытекает, что

$$d_n d_{n+1} s_n = d_n - d_n s_{n-1} d_n = s_{n-2} d_{n-1} d_n.$$

[1] То есть отображение s_n является Λ-гомоморфизмом $S_n(\Lambda) \to S_{n+1}(\Lambda)$, где $S_n(\Lambda)$ и $S_{n+1}(\Lambda)$ рассматриваются как правые Λ-модули; подобный же смысл имеет выражение «левый Λ-гомоморфизм». — *Прим. перев.*

Следовательно, если $d_{n-1}d_n = 0$, то $d_n d_{n+1} s_n = 0$, и потому $d_n d_{n+1} = 0$' так как образ гомоморфизма s_n порождает $S_{n+1}(\Lambda)$ как левый Λ-модуль.

Заметим, что тензорные произведения $S_0(\Lambda) = \Lambda \otimes \Lambda$ и $\Lambda^e = \Lambda \otimes \Lambda^*$ совпадают между собой как двусторонние Λ-модули, а гомоморфизм $d_0 : S_0(\Lambda) \to S_{-1}(\Lambda)$ совпадает с пополняющим эпиморфизмом $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$. Таким образом, градуированный модуль $S(\Lambda) = \sum_{n \geq 0} S_n(\Lambda)$ с дифференциалом, n-й компонентой которого служит гомоморфизм d_n, и с пополняющим отображением $d_0 = \varrho$ является левым комплексом над Λ^e-модулем Λ. Из соотношения (2) вытекает, что этот комплекс ацикличен.

Модуль $S_n(\Lambda)$ удобно записывать в виде произведения

$$S_n(\Lambda) = \Lambda \otimes_K \tilde{S}_n(\Lambda) \otimes_K \Lambda = \Lambda^e \otimes_K \tilde{S}_n(\Lambda),$$

где $\tilde{S}_0(\Lambda) = K$, а $\tilde{S}_n(\Lambda)$ для $n > 0$ является K-модулем, представляющим собой тензорное произведение над кольцом K n экземпляров модуля Λ. При такой записи модуля $S_n(\Lambda)$ наиболее отчетливо видно, как в этом модуле действуют операторы из алгебры Λ^e.

Если алгебра Λ K-проективна, то, согласно следствию 2.5, модуль $\tilde{S}_n(\Lambda)$ K-проективен, и, следовательно, в силу того же следствия 2.5 модуль $S_n(\Lambda)$ Λ^e-проективен. Таким образом, в этом случае комплекс $S(\Lambda)$ является Λ^e-проективной резольвентой модуля Λ. Этот комплекс называется *стандартным комплексом* алгебры Λ. Очевидно, что произвольный гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ K-алгебр естественным образом индуцирует некоторое отображение $S(\varphi) : S(\Lambda) \to S(\Gamma)$.

При вычислении групп гомологий алгебры[1] Λ целесообразно воспользоваться соотношением

$$A \otimes_{\Lambda^e} S_n(\Lambda) = A \otimes_{\Lambda^e} \Lambda^e \otimes_K \tilde{S}_n(\Lambda) = A \otimes_K \tilde{S}_n(\Lambda).$$

Таким образом, группами гомологий $H_n(\Lambda, A)$ алгебры Λ с коэффициентами в некотором модуле A являются группы гомологий комплекса $A \otimes_K \tilde{S}(\Lambda)$, дифференциал в котором определяется формулой

$$\begin{aligned} d_n(a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n) = a\,\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \ldots \otimes \lambda_n + \\ + \sum_{0<i<n} (-1)^i\, a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_i \lambda_{i+1} \otimes \ldots \otimes \lambda_n + \\ + (-1)^n\, \lambda_n a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

Аналогично при вычислении групп когомологий алгебры Λ целесообразно воспользоваться соотношением

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(S_n(\Lambda), A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e \otimes \tilde{S}_n(\Lambda), A) = \mathrm{Hom}_K(\tilde{S}_n(\Lambda), A).$$

Элементы последней группы называются *n-мерными коцепями* и являются K-линейными функциями n аргументов, определенных

[1] Предполагаемой K-проективной. — *Прим. перев.*

на алгебре Λ и принимающих значения в модуле A. «Кограница» δf некоторой n-мерной коцепи f задается формулой

$$(\delta f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = \lambda_1 f(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) + \\ + \sum_{0<i<n+1} (-1)^i f(\lambda_1, \ldots, \lambda_i\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\lambda_{n+1}.$$

Эта формула показывает, что определенные нами группы когомологий совпадают с группами когомологий в смысле Хохшильда.

Наряду с комплексом $S(\Lambda)$ весьма полезен некий его вариант, называемый *нормализованным* стандартным комплексом и обозначаемый через $N(\Lambda)$. Для этого комплекса $N_n(\Lambda) = \Lambda^e \otimes_K \tilde{N}_n(\Lambda)$, где $\tilde{N}_0(\Lambda) = K$, а при $n > 0$ $\tilde{N}_n(\Lambda)$ является тензорным произведением над кольцом K n экземпляров K-модуля $\Lambda' = \operatorname{Coker}(K \to \Lambda)$. Естественный K-эпиморфизм $\Lambda \to \Lambda'$ индуцирует K-эпиморфизм $\tilde{S}_n(\Lambda) \to \tilde{N}_n(\Lambda)$ и Λ^e-эпиморфизм $S_n(\Lambda) \to N_n(\Lambda)$. Гомоморфизмы s_n и d_n переходят при этом в аналогичные гомоморфизмы градуированного модуля $N(\Lambda) = \sum N_n(\Lambda)$, также удовлетворяющие соотношениям (1) и (2). Следовательно, $N(\Lambda)$ является ацикличным левым комплексом над Λ^e-модулем Λ. Если модуль Λ' K-проективен, то комплекс $N(\Lambda)$ является Λ^e-проективной резольвентой модуля Λ.

Для произвольного элемента $\lambda_0 \otimes \ldots \otimes \lambda_{n+1}$ модуля $S_n(\Lambda)$ мы будем через $\lambda_0[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda_{n+1}$ обозначать образ этого элемента в модуле $N_n(\Lambda)$. Если, в частности, $\lambda_0 = 1$ (или $\lambda_{n+1} = 1$), то мы будем просто писать $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda_{n+1}$ (соответственно $\lambda_0[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$). В этих обозначениях граница элемента $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ определяется формулой

$$d_n[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = \lambda_1[\lambda_2, \ldots, \lambda_n] + \sum_{0<i<n} (-1)^i [\lambda_1, \ldots, \lambda_i\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n] + \\ + (-1)^n [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]\lambda_n.$$

Введенные обозначения применимы также к случаю $n = 0$. При этом роль единицы кольца $\tilde{N}_0(\Lambda) = K$ играет символ $[\ ]$, а произвольный элемент $\lambda_0 \otimes \lambda_1$ модуля $S_0(\Lambda) = N_0(\Lambda)$ записывается в виде $\lambda_0[\ ]\lambda_1$. При этих соглашениях имеет место следующая формула границы:

$$d_1[\lambda] = \lambda[\ ] - [\ ]\lambda.$$

Аналогичные обозначения можно также использовать и для ненормализованного стандартного комплекса $S(\Lambda)$. Таким образом, допуская некоторую двусмысленность, мы будем символ $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ одновременно рассматривать и как некоторый элемент комплекса $S(\Lambda)$, и как некоторый элемент комплекса $N(\Lambda)$. При этом следует отметить, что скобка $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, рассматриваемая как элемент комплекса $N(\Lambda)$, равна нулю, если по крайней мере одна из ее компонент λ_i принадлежит образу гомоморфизма $K \to \Lambda$.

7. РАЗМЕРНОСТЬ

Пусть Λ — произвольная K-алгебра и Λ^e — ее обертывающая алгебра. В этом параграфе мы будем интересоваться проективной размерностью алгебры Λ, рассматриваемой как левый Λ^e-модуль. В соответствии с сформулированным в § VI, 2 определением, проективная размерность алгебры Λ представляет собой некоторое целое число (или символ ∞) и обозначается через $\dim_{\Lambda^e} \Lambda$ или просто через $\dim \Lambda$. Проективная размерность алгебры Λ, рассматриваемой как левый Λ^e-модуль, совпадает с проективной размерностью алгебры Λ, рассматриваемой как правый Λ^e-модуль. Соотношение $\dim \Lambda \leq n$, по определению, означает, что существует Λ^e-проективная резольвента X алгебры Λ, для которой $X_k = 0$, когда $k > n$ (т. е. X является комплексом размерности $\leq n$). Согласно предложению VI, 2.1, это равносильно тому, что для любого двустороннего Λ-модуля A

$$H^{n+1}(\Lambda, A) = \operatorname{Ext}^{n+1}_{\Lambda^e}(\Lambda, A) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если K-алгебра Λ K-проективна, то для любой коммутативной K-алгебры L*

$$\dim (L \otimes_K \Lambda) \leq \dim \Lambda.$$

Если, кроме того, естественное отображение $K \to L$ является изоморфизмом K-модуля K на прямое слагаемое K-модуля L, то

$$\dim (L \otimes_K \Lambda) = \dim \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть предложения непосредственно вытекает из предложения 5.1. Для доказательства второй части рассмотрим K-гомоморфизм $\sigma : L \to K$, для которого композиция $K \to L \to K$ является тождественным отображением. Для любого двустороннего Λ-модуля A тензорное произведение $L \otimes_K A$ можно рассматривать как двусторонний $L \otimes_K \Lambda$-модуль, причем, согласно предложению 5.1,

$$H^n (L \otimes_K \Lambda, L \otimes_K A) \approx H^n(\Lambda, L \otimes_K A).$$

Отсюда, принимая во внимание, что композиция гомоморфизмов

$$H^n(\Lambda, A) \longrightarrow H^n(\Lambda, L \otimes_K A) \longrightarrow H^n(\Lambda, A)$$

является тождественным отображением, мы получаем, что из соотношения $H^n(L \otimes_K \Lambda, L \otimes_K A) = 0$ вытекает соотношение $H^n(\Lambda, A) = 0$. Таким образом, $\dim \Lambda \leq \dim (L \otimes_K \Lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Для любой алгебры Λ над полем K и любого поля L, содержащего поле K,*

$$\dim (L \otimes_K \Lambda) = \dim \Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Пусть Λ и Γ — произвольные K-алгебры и $\Lambda + \Gamma$ — их прямая сумма. Тогда*

$$\dim (\Lambda + \Gamma) = \max (\dim \Lambda, \dim \Gamma).$$

Непосредственно вытекает из теоремы 5.3 и следствия 5.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Если K-алгебры Λ и Γ K-проективны, то*

$$\dim(\Lambda \otimes_K \Gamma) \leq \dim \Lambda + \dim \Gamma.$$

Если, кроме того, кольцо K является полем и алгебры Λ и Γ имеют над K конечное число образующих, то

$$\dim(\Lambda \otimes_K \Gamma) = \dim \Lambda + \dim \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — Λ^e-проективная резольвента модуля Λ, размерность которой не превосходит p, а Y — Γ^e-проективная резольвента модуля Γ, размерность которой не превосходит q. Поскольку $\mathrm{Tor}_n^K(\Lambda, \Gamma) = 0$ для всех $n > 0$, можно воспользоваться предложением 2.7, согласно которому комплекс $X \otimes_K Y$ является $\Lambda^e \otimes_K \Gamma^e$-проективной резольвентой модуля $\Lambda \otimes_K \Gamma$. Первая часть предложения вытекает отсюда непосредственно, ибо размерность комплекса $X \otimes_K Y$ не превосходит $p + q$, а $\Lambda^e \otimes_K \Gamma^e \approx (\Lambda \otimes_K \Gamma)^e$.

Предположим теперь, что кольцо K является полем и что алгебры Λ и Γ имеют над K конечное число образующих. Тогда алгебры Λ^e и Γ^e также имеют над K конечное число образующих и, следовательно, являются нетеровыми алгебрами. Поэтому существуют проективные резольвенты X и Y, для которых составляющие X_n (соответственно составляющие Y_n) являются Λ^e-свободными (соответственно Γ^e-свободными) модулями с конечной базой. В таком случае для любого двустороннего Λ-модуля A и любого двустороннего Γ-модуля A' имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X, A) \otimes_K \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(Y, A') \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda \otimes \Gamma^e}(X \otimes_K Y, A \otimes_K A'),$$

индуцирующий изоморфизм групп гомологий

$$H^n(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X, A) \otimes_K \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(Y, A')) \approx H^n(\Lambda \otimes_K \Gamma, A \otimes_K A').$$

С другой стороны, так как кольцо K является полем, то из теоремы IV, 7.2 следует, что отображение α определяет изоморфизм рассматриваемой группы гомологий на группу

$$\sum_{p+q=n} H^p(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(X, A)) \otimes_K H^q(\mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(Y, A')).$$

Таким образом, имеет место изоморфизм

$$\sum_{p+q=n} H^p(\Lambda, A) \otimes_K H^q(\Gamma, A') \approx H^n(\Lambda \otimes_K \Gamma, A \otimes_K A').$$

Поэтому, если группы $H^p(\Lambda, A)$ и $H^q(\Gamma, A')$, а следовательно поскольку кольцо K является полем, и группа $H^p(\Lambda, A) \otimes_K H^q(\Gamma, A')$ отличны от нуля, то и группа $H^{p+q}(\Lambda \otimes_K \Gamma, A \otimes_K A')$ отлична от нуля. Тем самым показано, что $\dim \Lambda \otimes_K \Gamma \geq p + q$.

В предложении 7.4 содержится, в частности, одна теорема Розе [Rose, *Amer. Jour. Math.*, **74** (1952), 531—546].

Сравним теперь размерность $\dim \Lambda$ с некоторыми другими размерностями, а именно с $\mathrm{l.gl.dim}\, \Lambda$, $\mathrm{r.gl.dim}\, \Lambda$, $\mathrm{l.gl.dim}\, \Lambda^e$ и

r. gl. dim Λ^e. Так как кольцо Λ^e изоморфно своему противоположному кольцу $(\Lambda^e)^*$, то последние две размерности всегда совпадают и поэтому их можно обозначать одним и тем же символом gl. dim Λ^e.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Для любой K-алгебры Λ*

$$\dim \Lambda \leq \text{gl. dim}\, \Lambda^e.$$

Для K-проективной полупростой алгебры Λ

$$\dim \Lambda = \text{gl. dim}\, \Lambda^e.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть предложения непосредственно следует из определения глобальной размерности. Для доказательства второй части воспользуемся предложением 4.3, полагая в нем $\Sigma = \Lambda$. Согласно этому предложению, для любых двусторонних Λ-модулей B и C имеет место изоморфизм

$$H^n(\Lambda, \text{Hom}_\Lambda(B, C)) \approx \text{Ext}^n_{\Lambda^e}(B, C),$$

где $\text{Hom}_\Lambda(B, C)$ — группа всех правых Λ-гомоморфизмов $B \to C$. Отсюда следует, что gl. dim $\Lambda^e \leq \dim \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. *Для любой алгебры Λ над полупростым кольцом K*

$$\text{l. gl. dim}\, \Lambda \leq \dim \Lambda, \quad \text{r. gl. dim}\, \Lambda \leq \dim \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в предложении 4.3 $\Sigma = K$[1], мы получим, что для любых левых Λ-модулей B и C имеет место изоморфизм

$$H^n(\Lambda, \text{Hom}_K(B, C)) \approx \text{Ext}^n_\Lambda(B, C),$$

откуда и следует, что l. gl.dim $\Lambda \leq \dim \Lambda$.

В теореме X, 6.2 будут указаны некоторые достаточные условия, при выполнении которых вместо неравенств, установленных в предложении 7.6, имеют место равенства.

Исследуем теперь более детально алгебры, проективная размерность dim Λ которых равна нулю, т. е. Λ^e-проективные K-алгебры Λ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. $\dim \Lambda = 0$ *тогда и только тогда, когда в двустороннем Λ-модуле $\Lambda \otimes \Lambda$ (изоморфном модулю $\Lambda^e = \Lambda \otimes \Lambda^*$) существует инвариантный элемент e (т. е. элемент, для которого $\lambda e = e\lambda$), переходящий при отображении $x \otimes y \to xy$ в единицу 1 алгебры Λ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра Λ Λ^e-проективна, то существует Λ^e-гомоморфизм $f: \Lambda \to \Lambda^e$, для которого композиция $\Lambda \xrightarrow{f} \Lambda^e \xrightarrow{\varrho} \Lambda$ является тождественным отображением. Тогда элемент $e = f(1)$ обладает требуемыми свойствами. Обратно, если элемент e, обладающий перечисленными выше свойствами, существует, то, полагая $f\lambda = \lambda e$, мы получим Λ^e-гомоморфизм $\Lambda \to \Lambda^e$, для кото-

[1] Проще непосредственно сослаться на следствие 4.4. — *Прим. перев.*

рого композиция ϱf является тождественным отображением. Поэтому алгебра Λ будет Λ^e-проективной алгеброй.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. *Для алгебры $M_n(K)$ квадратных матриц порядка n над любым коммутативным кольцом K*

$$\dim M_n(K) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся критерием 7.7. Через e_{ij} мы обозначим матрицу, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой расположен элемент 1, а на остальных местах — нули. Тогда $\sum_i e_{ii}$ будет, очевидно, единичной матрицей. Кроме того, матрицы e_{ij} образуют K-базу алгебры $\Lambda = M_n(K)$. Рассмотрим элемент $e = \sum_i e_{i1} \otimes e_{1i} \in \Lambda \otimes_K \Lambda$. Очевидно, что

$$e_{rs}e = e_{r1} \otimes e_{1s} = e\, e_{rs},$$
$$\sum_i e_{i1}e_{1i} = \sum_i e_{ii}.$$

Таким образом, элемент e удовлетворяет обоим условиям предложения 7.7 и, следовательно, $\dim \Lambda = 0$.

ТЕОРЕМА 7.9. *Для алгебры Λ над полупростым кольцом K равенство $\dim \Lambda = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда алгебра Λ^e полупроста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim \Lambda = 0$, то, как следует из предложения 7.6, алгебра Λ полупроста. Поэтому можно воспользоваться предложением 7.5, согласно которому $\mathrm{gl.dim}\, \Lambda^e = 0$, что равносильно полупростоте алгебры Λ^e. Обратно, если алгебра Λ^e полупроста, то, согласно предложению 7.5, $\dim \Lambda = 0$.

ТЕОРЕМА 7.10. *Если кольцо K является полем, то для K-алгебры Λ с конечным числом образующих равенство $\dim \Lambda = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда алгебра Λ сепарабельна (т. е. для любого поля L, содержащего поле K, алгебра $L \otimes_K \Lambda$ полупроста).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim \Lambda = 0$. Тогда, согласно предложению 7.1, $\dim (L \otimes_K \Lambda) = 0$ и, следовательно, в силу предложения 7.6 алгебра $L \otimes_K \Lambda$ полупроста. Таким образом, алгебра Λ сепарабельна.

Обратно, предположим, что алгебра Λ сепарабельна. Тогда, как хорошо известно (см. Albert, Structure of Algebras, New York, 1939, p. 45), существует так называемое поле расщепления алгебры Λ, т. е. такое поле L, содержащее поле K, что алгебра $L \otimes_K \Lambda$ изоморфна прямой сумме $\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_r$ полных матричных алгебр над полем L. Согласно предложению 7.8, $\dim \Lambda_i = 0$, и поэтому в силу предложения 7.3 $\dim (\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_r) = 0$. Таким образом, $\dim (L \otimes_K \Lambda) = 0$ и, следовательно, согласно предложению 7.1, $\dim \Lambda = 0$.

Для доказательства существования алгебр любой заданной размерности n рассмотрим алгебру $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Как было показано в § VIII, 4, к этой алгебре применима теорема VIII, 4.2, согласно которой $\dim_\Lambda K = n$; при этом кольцо K рассматривалось как Λ-модуль относительно гомоморфизма $\varepsilon_0 : \Lambda \to K$, для которого $\varepsilon_0 x_i = 0$. Однако для любого гомоморфизма K-алгебр $\varepsilon : \Lambda \to K$ соответствие $x_i \to x_i - \varepsilon x_i$ определяет такой автоморфизм φ алгебры Λ, что $\varepsilon\varphi = \varepsilon_0$. Поэтому, рассматривая кольцо K как Λ-модуль относительно гомоморфизма ε, мы также получим, что $\dim_\Lambda K = n$.

Далее,

$$\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda \approx K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] = \Lambda[y_1, \ldots, y_n],$$

причем отображение $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$ определяет некоторый гомоморфизм Λ-алгебр $\eta : \Lambda[y_1, \ldots, y_n] \to \Lambda$ (легко видеть, что $\eta y_i = x_i$). Таким образом, $\dim_{\Lambda^e} \Lambda = n$, т. е. $\dim \Lambda = n$.

Так как $\dim_\Lambda K = n$, то $\mathrm{gl.}\dim \Lambda \geq n$. С другой стороны, если кольцо K полупросто, то, согласно предложению 7.6, $\mathrm{gl.}\dim \Lambda \leq \leq \dim \Lambda = n$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 7.11. *Для алгебры $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов над произвольным коммутативным кольцом K*

$$\dim \Lambda = \dim_\Lambda K = n.$$

Если кольцо K полупросто, то

$$\mathrm{gl.}\dim \Lambda = n.$$

Эта теорема дополняет теорему VIII, 6.5, в которой предполагалось, что кольцо K является телом, и рассматривались лишь градуированные модули.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В ситуации $({}_{\Lambda-\Gamma}A, B_{\Lambda-\Sigma}, {}_\Gamma C_\Sigma)$, где Λ, Γ, Σ — произвольные K-алгебры, построить изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)) \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Sigma}(B, \mathrm{Hom}_\Gamma(A, C)).$$

Доказать, что если алгебры Λ, Γ, Σ K-проективны и для всех $n > 0$

$$\mathrm{Ext}^n_\Gamma(A, C) = 0 = \mathrm{Ext}^n_\Sigma(B, C),$$

то

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)) \approx \mathrm{Ext}_{\Lambda\otimes\Sigma}(B, \mathrm{Hom}_\Gamma(A, C)).$$

2. Пусть Λ — свободная K-алгебра $F_K[x_1, \ldots, x_n]$, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$. Показать, что любой скрещенный гомоморфизм $f : \Lambda \to A$ однозначно определяется его значениями на образующих $x_1, \ldots, x_n$ и что эти значения могут быть заданы произвольно. Вывести отсюда, что левый идеал J алгебры Λ^e является Λ^e-свободным модулем, базу которого составляют элементы $x_i \otimes 1 - - 1 \otimes x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Показать, что $\dim \Lambda = 1$, если $n > 0$.

3. Показать, что в нормализованном стандартном комплексе $N(\Lambda)$ «стягивающая» гомотопия s имеет вид

$$s(\lambda[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda') = [\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda'$$

и что последовательность

$$0 \longrightarrow N_{-1}(\Lambda) \xrightarrow{s_{-1}} N_0(\Lambda) \xrightarrow{s_0} \ldots \longrightarrow N_n(\Lambda) \xrightarrow{s_n} N_{n+1}(\Lambda) \longrightarrow \ldots$$

точна. Вывести отсюда, что гомоморфизм d_n $(n > 0)$ изоморфно отображает подмодуль $\operatorname{Ker} s_n$ на подмодуль $\operatorname{Im} d_n$.

4. Пусть Λ — произвольная K-алгебра. Рассмотрим K-алгебру $\Lambda^+ = K + \Lambda$, в которой умножение и операторы из кольца K задаются следующими формулами:

$$(k_1, \lambda_1)(k_2, \lambda_2) = (k_1k_2, k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2), \quad k'(k, \lambda) = (k'k, k'\lambda).$$

Показать, что любой двусторонний Λ-модуль можно рассматривать как двусторонний Λ^+-модуль. Сравнить комплексы $S(\Lambda)$ и $N(\Lambda^+)$. Доказать, что если алгебра Λ K-проективна, то для любого двустороннего Λ-модуля A

$$H_n(\Lambda^+, A) \approx H_n(\Lambda, A), \quad H^n(\Lambda^+, A) \approx H^n(\Lambda, A).$$

5. Показать, что если K-алгебра Λ K-свободна и $\dim \Lambda = 0$, то $\dim (\Lambda \otimes_K{}^{\bullet}\Gamma) = \dim \Gamma$ для любой K-алгебры Γ. [Указание: предполагая, что $H^n(\Gamma, C) \neq 0$, показать, что

$$H^n(\Lambda \otimes_K \Gamma, \operatorname{Hom}_K(\Lambda^e, C)) \neq 0.]$$

6. Пусть Λ — произвольная K-алгебра. Показать, что $\dim \Lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $H^1(\Lambda, J) = 0$.

7. Пусть Λ — K-алгебра с базисом $1, a, r$ и с таблицей умножения $aa = a$, $rr = 0$, $ar = r$, $ra = 0$. Показать, что $\dim \Lambda = 1$.

8. Используя результаты § VI, 5, построить естественные гомоморфизмы:

$$(1) \qquad H^n(\Lambda, \operatorname{Hom}_K(A, K)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(H_n(\Lambda, A), K),$$

$$(2) \qquad H_n(\Lambda, \operatorname{Hom}_K(A, K)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(H^n(\Lambda, A), K).$$

Предполагая, что кольцо K является полем, показать, что отображение (1) изоморфно. Показать, что если, кроме того, K-алгебра Λ имеет конечное число образующих, то изоморфно и отображение (2).

ГЛАВА X

ДОПОЛНЕННЫЕ АЛГЕБРЫ

Введение. Понятие дополненной алгебры является очень частным и в то же время очень важным случаем понятия пополненного кольца. Теория гомологий дополненных алгебр включает в себя как теорию гомологий групп (или, более общо, полугрупп), так и теорию гомологий алгебр Ли (рассматриваемую в гл. XIII).

Группы гомологий $H_n(\Lambda, A)$ дополненной алгебры Λ определяются для любого правого Λ-модуля A; группы когомологий $H^n(\Lambda, C)$ определяются для любого левого Λ-модуля C. Наиболее интересен случай, когда алгебра Λ K-проективна; в этом случае теория ее групп гомологий и когомологий включается в теорию Хохшильда (гл. IX). Именно, оказывается (теорема 2.1), что комплексы, используемые для вычисления хохшильдовых групп алгебры Λ, можно использовать и для вычисления групп гомологий и когомологий алгебры Λ, рассматриваемой как дополненная алгебра. Этот прием применим, в частности, к стандартному комплексу. При этом в случае когда алгеброй Λ является групповая алгебра $K(\Pi)$ некоторой группы Π, получается так называемый «однородный» комплекс, впервые рассмотренный Эйленбергом и Маклейном [Eilenberg S., MacLane S., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29** (1943), 155—158].

Для некоторых конкретных полугрупп и групп стандартные комплексы целесообразно заменять другими, специально сконструированными комплексами. С некоторыми из таких комплексов мы познакомимся в § 5; аналогичные построения для циклических групп рассматриваются в § XII, 7.

В § 7 изучаются некоторые соотношения между алгебрами и их подалгебрами, а также между группами и их подгруппами.

1. ГОМОЛОГИИ ДОПОЛНЕННЫХ АЛГЕБР

K-алгебра Λ, рассматриваемая вместе с некоторым фиксированным гомоморфизмом K-алгебр $\varepsilon : \Lambda \to K$, называется *дополненной алгеброй*. Так как ядро I гомоморфизма ε является двусторонним идеалом, то алгебру Λ можно рассматривать как пополненное (слева и справа) кольцо (с пополняющим эпиморфизмом ε). Так как композиция $\varepsilon\eta$ гомоморфизма ε с естественным отображением $\eta : K \to \Lambda$ является, очевидно, тождественным отображением, то кольцо K

можно рассматривать как подалгебру алгебры Λ, а мономорфизм η — как отображение вложения. При этом алгебра Λ (как правый или левый K-модуль) разлагается в прямую сумму $K + I$.

На дополненные алгебры как на частные случаи пополненных колец переносятся все понятия, введенные в § VIII, 1. В частности, для любого правого Λ-модуля A определены группы гомологий $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K)$ и для любого левого Λ-модуля C определены группы когомологий $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(K, C)$. Этими группами являются группы гомологий $H_n(A \otimes_\Lambda X)$ и $H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, C))$ комплексов $A \otimes_\Lambda X$ и $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)$ соответственно, где X — произвольная Λ-проективная резольвента кольца K, рассматриваемого как левый Λ-модуль. Все результаты § VIII, 1 автоматически применимы к любым дополненным алгебрам; нужно только в их формулировках модуль Q заменить кольцом K.

С помощью пополняющего гомоморфизма $\varepsilon : \Lambda \to K$ мы можем любой K-модуль A превратить в левый (или правый) Λ-модуль ${}_\varepsilon A$ (соответственно A_ε), полагая $\lambda a = (\varepsilon\lambda) a$. Мы будем говорить, что операторы из алгебры Λ на модуле ${}_\varepsilon A$ *тривиальны*. Если A является правым (или левым) Λ-модулем, то ${}_\varepsilon A$ (или A_ε) будет двусторонним Λ-модулем, а следовательно, и левым Λ^e-модулем. В частности, кольцо K является Λ-модулем с тривиальными Λ-операторами[1].

Это замечание позволяет некоторые понятия, введенные нами для двусторонних модулей, перенести на левые (или правые) Λ-модули. Например, пусть C — произвольный левый Λ-модуль. Элемент $c \in C$ мы назовем *инвариантным*, если он как элемент модуля C_ε является инвариантным в смысле § IX, 4, т. е. если $\lambda c = c\lambda$. Но так как $c\lambda = c(\varepsilon\lambda) = (\varepsilon\lambda) c$, то элемент c модуля C тогда и только тогда инвариантен, когда $(\lambda - \varepsilon\lambda) c = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$ или, что равносильно, когда $Ic = 0$. Все инвариантные элементы модуля C образуют Λ-подмодуль C^Λ модуля C. Подмодуль C^Λ можно определить также как максимальный подмодуль, на котором Λ-операторы тривиальны. Формула VIII, 1, (2a) в рассматриваемом случае принимает вид $\mathrm{Hom}_\Lambda(K, C) = C^\Lambda$. С другой стороны, согласно предложению IX, 4.1, нульмерная хохшильдова группа когомологий $H^0(\Lambda, C_\varepsilon)$ также совпадает с группой C^Λ. Таким образом, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(K, C) \approx H^0(\Lambda, C_\varepsilon) \approx C^\Lambda. \tag{1}$$

Аналогично пусть A — произвольный правый Λ-модуль. Тогда, как легко видеть, $AI = ({}_\varepsilon A) J$, где J — ядро пополняющего эпиморфизма $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$. Следовательно, имеют место изоморфизмы

$$A \otimes_\Lambda K \approx H_0(\Lambda, {}_\varepsilon A) \approx A_\Lambda, \tag{2}$$

где $A_\Lambda = A/AI$. Подмодуль AI является, очевидно, минимальным

[1] В дальнейшем вместо выражения «операторы из кольца Λ» часто используется выражение «Λ-операторы». — *Прим. перев.*

подмодулем Λ-модуля A, фактормодуль по которому обладает тривиальными Λ-операторами.

Вернемся к рассмотрению произвольного левого Λ-модуля C. Следуя определению, данному в § IX, 3, мы будем называть скрещенным гомоморфизмом $f: \Lambda \to C$ (точнее, $f: \Lambda \to C_\varepsilon$) такой K-гомоморфизм, что

$$f(\lambda_1\lambda_2) = \lambda_1 f(\lambda_2) + (f\lambda_1)(\varepsilon\lambda_2).$$

Легко видеть, что любой такой скрещенный гомоморфизм допускает единственное разложение

$$\Lambda \xrightarrow{p} I \xrightarrow{g} C$$

в композицию некоторого Λ-гомоморфизма g и оператора проектирования p, определяемого формулой $p\lambda = \lambda - \varepsilon\lambda$. Скрещенный гомоморфизм f тогда и только тогда является главным скрещенным гомоморфизмом, когда гомоморфизм g продолжается до некоторого Λ-гомоморфизма $\Lambda \to C$. Сопоставляя эти замечания с предложением IX, 3.2, мы получим изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_\Lambda (I, C) \approx \mathrm{Hom}_{\Lambda^e} (J, C_\varepsilon).$$

Далее, сопоставляя формулу VIII, 1, (3a) и предложение IX, 4.1, мы получим изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda (K, C) \approx H^1(\Lambda, C_\varepsilon). \tag{3}$$

Обе эти группы изоморфны факторгруппе группы всех скрещенных гомоморфизмов $\Lambda \to C$ по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов.

Для любого Λ-модуля A с тривиальными Λ-операторами нульмерные группы гомологий $A \otimes_\Lambda K$ и когомологий $\mathrm{Hom}_\Lambda (K, A)$ можно отождествить с самим модулем A. Кроме того, из сказанного выше следует, что группу $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (K, A)$ можно отождествить с группой всех скрещенных гомоморфизмов $f: \Lambda \to A$ [т. е. таких K-гомоморфизмов f, что $f(\lambda_1\lambda_2) = (\varepsilon\lambda_1)(f\lambda_2) + (f\lambda_1)(\varepsilon\lambda_2)$], ибо в рассматриваемом случае все главные скрещенные гомоморфизмы, очевидно, равны нулю. Наконец, для одномерной группы гомологий $\mathrm{Tor}^\Lambda_1(A, K)$ мы, согласно формуле VIII, 1, (3), имеем

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_1 (A, K) \approx \mathrm{Ker}\, (A \otimes_\Lambda I \to A) \approx \mathrm{Ker}\, (A \otimes_K (K \otimes_\Lambda I) \to A \otimes_K K).$$

Отсюда, принимая во внимание, что гомоморфизм $K \otimes_\Lambda I \to K$ равен нулю, мы получаем, что $\mathrm{Tor}^\Lambda_1 (A, K) \approx A \otimes_K (K \otimes_\Lambda I)$. Но, согласно формуле VIII, 1, (9), $K \otimes_\Lambda I \approx I/I^2$. Таким образом, для любого Λ-модуля A с тривиальными Λ-операторами

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_1 (A, K) \approx A \otimes_K I/I^2. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь две дополненные алгебры

$$\Lambda \xrightarrow{\varepsilon} K, \quad \Gamma \xrightarrow{\varepsilon'} L.$$

Отображением первой из этих алгебр во вторую называется пара таких кольцевых гомоморфизмов $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ и $\psi : K \to L$, что $\varepsilon'\varphi = \psi\varepsilon$ и $\varphi(k\lambda) = (\psi k)(\varphi\lambda)$. Здесь мы находимся в ситуации, рассмотренной в § VIII, 3, и, следовательно, для любого правого Γ-модуля A и любого левого Γ-модуля C определены гомоморфизмы

$$F_n^\varphi : \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, K) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A, L),$$
$$F_\varphi^n : \operatorname{Ext}_\Gamma^n(L, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^n(K, C).$$

Наиболее часто встречается случай, когда $K = L$, а гомоморфизм ψ является тождественным отображением.

Сходный, хотя и несколько отличный, случай возникает на основе следующих построений. Пусть $\Lambda \xrightarrow{\varepsilon} K$ — произвольная дополненная K-алгебра. Расширяя основное кольцо до некоторой (не обязательно коммутативной) K-алгебры L, мы получим пополненное кольцо

$$L \otimes_K \Lambda \xrightarrow{L \otimes_K \varepsilon} L.$$

Таким образом, мы находимся в ситуации, рассмотренной в предложении IX, 1.1, и, следовательно, для любого правого $L \otimes_K \Lambda$-модуля A и любого левого $L \otimes_K \Lambda$-модуля C определены гомоморфизмы

(5) $$\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, K) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^{L\otimes\Lambda}(A, L),$$

(5a) $$\operatorname{Ext}_{L\otimes\Lambda}^n(L, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^n(K, C).$$

Применяя предложение IX, 1.1, мы получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если дополненная K-алгебра Λ K-проективна, то гомоморфизмы* (5) *и* (5a) *являются изоморфизмами. Кроме того, для любой Λ-проективной резольвенты X кольца K комплекс $L \otimes_K X$ является $L \otimes_K \Lambda$-проективной резольвентой алгебры L.*

Если алгебра L коммутативна, то произведение $L \otimes_K \Lambda$ будет дополненной L-алгеброй (получающейся из алгебры Λ ковариантным расширением основного кольца). Предложение 1.1 означает, что при таких расширениях группы гомологий и когомологий по существу не меняются.

2. СРАВНЕНИЕ С ГРУППАМИ ХОХШИЛЬДА

Формулы (1)—(3) предыдущего параграфа показывают, что в малых размерностях группы гомологий и когомологий дополненной алгебры Λ совпадают с ее хохшильдовыми группами гомологий и когомологий. С целью более последовательно проследить связь между этими группами рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Lambda^e \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\varphi"] & \Lambda \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \Lambda \arrow[r, "\varepsilon"'] & K \end{tikzcd}$$

где $\varphi(\lambda \otimes \gamma^*) = \lambda(\varepsilon\gamma)$. Так как $\varepsilon\varphi(\lambda \otimes \gamma^*) = \varepsilon(\lambda\gamma) = \varepsilon\eta(\lambda \otimes \gamma^*)$, то эта диаграмма коммутативна и, следовательно, пара (φ, ε) является отображением пополненного кольца Λ^e в пополненное кольцо Λ. Таким образом, мы находимся в ситуации, изученной в § VIII, 3, и, следовательно, для любого правого Λ-модуля A и любого левого Λ-модуля C имеют место гомоморфизмы

$$F_n^\varphi : H_n(\Lambda, {}_\varepsilon A) = \mathrm{Tor}_n^{\Lambda^e}({}_\varepsilon A, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, K),$$

$$F_\varphi^n : \mathrm{Ext}_\Lambda^n(K, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, C_\varepsilon) = H^n(\Lambda, C_\varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Если дополненная K-алгебра Λ K-проективна, то гомоморфизмы F_n^φ и F_φ^n являются изоморфизмами. Кроме того, для любой Λ^e-проективной резольвенты X алгебры Λ комплекс $X \otimes_\Lambda K$ является Λ-проективной резольвентой кольца $K = \Lambda \otimes_\Lambda K$, рассматриваемого как левый Λ-модуль.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующую лемму:

ЛЕММА 2.2. *Для любого двустороннего Λ-модуля B гомоморфизм*

$$\tau : {}_\varepsilon\Lambda \otimes_{\Lambda^e} B \longrightarrow B \otimes_\Lambda K,$$

определенный формулой $\tau(\lambda \otimes b) = \lambda b \otimes 1$, является изоморфизмом.

Определим гомоморфизм $\sigma : B \otimes_\Lambda K \to {}_\varepsilon\Lambda \otimes_{\Lambda^e} B$, полагая $\sigma(b \otimes k) = k \otimes b$. Тогда

$$\sigma\tau(\lambda \otimes_{\Lambda^e} b) = \sigma(\lambda b \otimes_\Lambda 1) = 1 \otimes_{\Lambda^e} \lambda b = \lambda \otimes_{\Lambda^e} b,$$

$$\tau\sigma(b \otimes_\Lambda k) = \tau(k \otimes_{\Lambda^e} b) = kb \otimes_\Lambda 1 = b \otimes_\Lambda k,$$

так что гомоморфизм τ действительно является изоморфизмом.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1. Эта теорема будет доказана, если нам удастся проверить условия (i) и (ii) теоремы об отображении VIII, 3.1. Что касается условия (i), то для его доказательства достаточно применить лемму 2.2 к случаю $B = \Lambda$. С другой стороны, полагая в той же лемме $B = X$, где X — произвольная Λ^e-проективная резольвента алгебры Λ, мы получим, что

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda^e}({}_\varepsilon\Lambda, \Lambda) = H_n({}_\varepsilon\Lambda \otimes_{\Lambda^e} X) \approx H_n(X \otimes_\Lambda K).$$

Так как алгебра Λ K-проективна, то, согласно следствию IX, 2.4, комплекс X Λ^*-проективен, т. е. Λ-проективен как правый Λ-модуль. Следовательно, $H_n(X \otimes_\Lambda K) = \mathrm{Tor}_n^\Lambda(\Lambda, K)$. Поскольку последняя группа для всех $n > 0$ равна нулю, мы видим, что условие (ii) теоремы об отображении действительно выполнено. Тем самым теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.1 полностью сводит теорию гомологий и когомологий дополненных K-проективных K-алгебр к теории Хохшильда. В связи с этим вместо обозначения $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K)$, где A — произвольный правый Λ-модуль, мы будем пользоваться гомологическим обозначением $H_n(\Lambda, {}_\varepsilon A)$ или даже просто $H_n(\Lambda, A)$, опуская индекс ε. Аналогичным обозначением мы будем пользоваться и для групп когомологий.

Теорема 2.1 применима, в частности, к построенным в § IX, 6 стандартным комплексам $S(\Lambda)$ и $N(\Lambda)$ (применимость этой теоремы к нормализованному стандартному комплексу $N(\Lambda)$ обеспечивается тем, что модуль $\Lambda' = \Lambda/K \approx I$, будучи прямым слагаемым проективного K-модуля Λ, сам является K-проективным модулем). Комплексы $S(\Lambda)\otimes_\Lambda K$ и $N(\Lambda) \otimes_\Lambda K$ мы будем обозначать через $S(\Lambda, \varepsilon)$ и $N(\Lambda, \varepsilon)$ соответственно. Для того чтобы дать явное описание комплекса $N(\Lambda, \varepsilon)$, заметим, что $N_n(\Lambda) = \Lambda \otimes_\Lambda \tilde{N}_n(\Lambda) \otimes_K \Lambda$ и, следовательно, $N_n(\Lambda, \varepsilon) = N_n(\Lambda) \otimes_\Lambda K = \Lambda \otimes_K \tilde{N}_n(\Lambda)$. Дифференциальный оператор комплекса

$$N(\Lambda, \varepsilon) = \sum_{n\geq 0} \Lambda \otimes_K \tilde{N}_n(\Lambda)$$

задается формулами

$$d_1[\lambda] = \lambda - \varepsilon\lambda,$$

$$d_n[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = \lambda_1[\lambda_2, \ldots, \lambda_n] + \sum_{0<i<n} (-1)^i [\lambda_1, \ldots, \lambda_i\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n] + $$
$$+ (-1)^n [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}](\varepsilon\lambda_n).$$

Напомним, что скобка $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ $(n \geq 0)$ K-полилинейна и равна нулю, если по крайней мере одна из ее компонент λ_i равна единице. Отбрасывая это последнее условие, получим (ненормализованный) комплекс $S(\Lambda, \varepsilon)$.

Все проведенное в этом параграфе исследование можно почти дословно повторить и для случая, когда кольцо K рассматривается как правый Λ-модуль и, следовательно, дополненная алгебра Λ — как пополненное справа кольцо. Если алгебра Λ K-проективна, то комплексы $S(\varepsilon, \Lambda) = K \otimes_\Lambda S(\Lambda)$ и $N(\varepsilon, \Lambda) = K \otimes_\Lambda N(\Lambda)$ являются Λ-проективными резольвентами кольца K, рассматриваемого как правый Λ-модуль.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай, когда модуль коэффициентов A (групп гомологий и когомологий) обладает только тривиальными Λ-операторами, т. е. является просто K-модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть Λ — произвольная дополненная K-алгебра, а A — некоторый K-модуль. Тогда для любой проективной резольвенты X кольца K, рассматриваемого как левый Λ-модуль, имеют место естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K) \approx H_n(A \otimes_K \bar{X}),$$
$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(K, A) \approx H^n(\mathrm{Hom}_K(\bar{X}, A)),$$

где $\bar{X} = K \otimes_\Lambda X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K) = H_n(A \otimes_\Lambda X) = H_n((A \otimes_K K) \otimes_\Lambda X) \approx$$
$$\approx H_n(A \otimes_K (K \otimes_\Lambda X)) = H_n(A \otimes_K \bar{X}).$$

Для групп когомологий доказательство аналогично.

Применяя только что полученный результат к нормализованному стандартному комплексу $N(\Lambda, \varepsilon)$ (в предположении, что алгебра Λ K-проективна), мы получим комплекс $N(\varepsilon, \Lambda, \varepsilon) = K \otimes_\Lambda N(\Lambda, \varepsilon)$, однородными составляющими которого являются модули $N_n(\varepsilon, \Lambda, \varepsilon) = K \otimes_\Lambda N_n(\Lambda, \varepsilon) = K \otimes_\Lambda \Lambda \otimes_K \widetilde{N}_n(\Lambda) = \widetilde{N}_n(\Lambda)$. Дифференциальный оператор комплекса

$$N(\varepsilon, \Lambda, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \widetilde{N}_n(\Lambda)$$

задается формулами

$$d_1 [\lambda_1] = 0,$$

$$d_n [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = (\varepsilon\lambda_1)[\lambda_2, \ldots, \lambda_n] + \sum_{0<i<n} (-1)^i [\lambda_1, \ldots, \lambda_i\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n] + $$
$$+ (-1)^n [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}] (\varepsilon\lambda_n).$$

3. ПОПОЛНЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Возвратимся к начатому в § VIII, 2 изучению полугрупп. Пусть Π — произвольная полугруппа, L — любое (не обязательно коммутативное) кольцо и $\varepsilon : L(\Pi) \to L$ — пополняющий эпиморфизм кольца $L(\Pi)$. Как было показано в § VIII, 2, эпиморфизм ε однозначно определяется некоторой функцией $\Pi \to L$ (которую мы также будем обозначать через ε), принимающей значения в центре кольца L и обладающей следующим свойством :

$$\varepsilon(xx') = (\varepsilon x)(\varepsilon x'), \qquad \varepsilon 1 = 1.$$

Полугруппа Π, рассматриваемая вместе с такой пополняющей функцией $\varepsilon : \Pi \to L$, называется *пополненной полугруппой*.

Оказывается, что при построении теории гомологий пополненных полугрупп можно без ущерба для общности предполагать кольцо L коммутативным. Действительно, рассмотрим произвольное представление пополняющей функции ε в виде сквозного отображения

$$\Pi \xrightarrow{\varepsilon'} K \xrightarrow{\mu} L,$$

где K — некоторое коммутативное кольцо, μ — некоторый гомоморфизм кольца K в центр кольца L и ε' — некоторая пополняющая функция. По крайней мере одно такое представление всегда существует : достаточно в качестве кольца K взять центр кольца L. Превратив с помощью гомоморфизма μ кольцо L в K-алгебру, мы можем кольцо $L(\Pi)$ отождествить с тензорным произведением $L \otimes_K K(\Pi)$. При этом отождествлении пополняющий эпиморфизм $\varepsilon : L(\Pi) \to L$ перейдет в гомоморфизм $L \otimes \varepsilon' : L \otimes_K K(\Pi) \to L$. Алгебра $K(\Pi)$, очевидно, K-проективна, ибо она обладает K-базой, состоящей из всех элементов полугруппы Π. Следовательно, в рассматриваемом случае применимо предложение 1.1, согласно которому для любого правого $L(\Pi)$-модуля A и любого левого $L(\Pi)$-модуля C

$$\mathrm{Tor}_n^{K(\Pi)}(A, K) \approx \mathrm{Tor}_n^{L(\Pi)}(A, L), \tag{1}$$

$$\mathrm{Ext}^n_{K(\Pi)}(K, C) \approx \mathrm{Ext}^n_{L(\Pi)}(L, C). \tag{1a}$$

Соотношения (1) и (1a) непосредственно вводят нас в теорию гомологий дополненных алгебр. Поскольку алгебра $K(\Pi)$ K-проективна, мы можем (согласно теореме 2.1) левые части соотношений (1) и (1a) рассматривать как хохшильдовы группы гомологий и когомологий алгебры $K(\Pi)$. Мы будем обозначать их через $H_n(\Pi, A)$ и $H^n(\Pi, C)$ соответственно. Так как в этом обозначении не отражены ни кольцо K, ни пополняющий эпиморфизм ε, то им можно пользоваться лишь тогда, когда совершенно ясно, какое кольцо принято за K и как выбран эпиморфизм ε. При этом A предполагается правым, а C — левым $K(\Pi)$-модулем. Пополняющий идеал, т. е. ядро гомоморфизма $\varepsilon : K(\Pi) \to K$, мы будем, как правило, обозначать через $I(\Pi)$.

Еще более принижая роль кольца K, мы будем вместо выражения «$K(\Pi)$-модуль» пользоваться выражением «Π-модуль». Аналогично вместо обозначений $\otimes_{K(\Pi)}$, $\mathrm{Hom}_{K(\Pi)}$, $\mathrm{Tor}_n^{K(\Pi)}$, $\mathrm{Ext}^n_{K(\Pi)}$ мы будем пользоваться обозначениями $\otimes_\Pi$, Hom_Π, Tor_n^Π, Ext^n_Π.

Наиболее важными примерами пополняющих функций полугруппы Π являются следующие две: 1) $\varepsilon x = 1$ для любого элемента $x \in \Pi$ — *единичная пополняющая функция*; 2) $\varepsilon 1 = 1$ и $\varepsilon x = 0$ для любого элемента $x \in \Pi$, отличного от единицы, — *нулевая пополняющая функция*. Последней функцией можно пользоваться лишь тогда, когда в полугруппе Π из соотношения $xx' = 1$ вытекает соотношение $x = 1 = x'$ (т. е. когда в полугруппе Π нет обратимых элементов). В каждом из этих двух случаев в качестве кольца K можно взять кольцо Z целых чисел.

Стандартные комплексы $S(\Lambda, \varepsilon)$ и $N(\Lambda, \varepsilon)$ для алгебры $\Lambda = K(\Pi)$ мы будем обозначать через $S(\Pi, \varepsilon)$ и $N(\Pi, \varepsilon)$ соответственно. Нет, конечно, никакой необходимости повторять данное в § 2 описание этих комплексов. Следует, быть может, только отметить, что все элементы вида $[x_1, \ldots, x_n]$, $x_i \in \Pi$ образуют $K(\Pi)$-базу модуля $S_n(\Pi, \varepsilon)$. Аналогичное замечание справедливо и для модуля $N_n(\Pi, \varepsilon)$ (единственное изменение состоит в том, что элемент $[x_1, \ldots, x_n]$ считается равным нулю всякий раз, когда по крайней мере одна из его компонент x_i равна единице).

Легко показать, что группы $H_n(\Pi, A)$ и $H^n(\Pi, C)$ являются функторами аргумента Π. При этом гомоморфным отображением $\Pi' \to \Pi$ пополненных полугрупп называется такое мультипликативное отображение $\varphi : \Pi' \to \Pi$, что $\varphi 1 = 1$ и $\varepsilon\varphi = \varepsilon'$, где $\varepsilon : \Pi \to K$ и $\varepsilon' : \Pi' \to K$ — пополняющие функции полугрупп Π и Π' соответственно.

Любое такое отображение индуцирует, очевидно, некоторое отображение $\varphi: K(\Pi') \to K(\Pi)$ дополненных алгебр и, следовательно, для любого правого Π-модуля A и любого левого Π-модуля C определяет гомоморфизмы:

$$F_n^{\varphi}: H_n(\Pi', A) \longrightarrow H_n(\Pi, A),$$
$$F_{\varphi}^n: H^n(\Pi, C) \longrightarrow H^n(\Pi', C).$$

Применяя теорему об отображении, мы непосредственно получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Гомоморфизм F_n^{φ} тогда и только тогда является изоморфизмом для любого правого Π-модуля A, когда*

(i) *соответствие $x \otimes k \to \varepsilon(x)k$ определяет изоморфизм*

$$K(\Pi) \otimes_{\Pi'} K \approx K,$$

(ii) $H_n(\Pi', K(\Pi)) = 0$ *для всех* $n > 0$.

При выполнении этих условий гомоморфизм F_{φ}^n для любого левого Π-модуля C также является изоморфизмом. Кроме того, для любой Π'-проективной резольвенты X кольца K комплекс $K(\Pi) \otimes_{\Pi'} X$ является его Π-проективной резольвентой.

Заметим, что условие (i) выполняется всякий раз, когда отображение $\varphi: \Pi' \to \Pi$ является эпиморфизмом.

4. ГРУППЫ

Предположим теперь, что Π является группой. Прежде всего покажем, что в этом случае без какого-либо ущерба для общности пополняющую функцию можно предполагать единичной. Действительно, пусть $\varepsilon: \Pi \to K$ — произвольная пополняющая функция. K-алгебру $K(\Pi)$ с пополняющей функцией ε мы обозначим через $K(\Pi, \varepsilon)$, а с единичной пополняющей функцией i — через $K(\Pi, i)$. Тогда соответствие $x \to (\varepsilon x)x, x \in \Pi$ определяет, очевидно, изоморфизм $\varphi: K(\Pi, \varepsilon) \to K(\Pi, i)$ дополненных алгебр.

Таким образом, пополняющую функцию мы всегда можем считать единичной. Кроме того, кольцо K мы всегда можем считать кольцом Z целых чисел. Другими словами, достаточно рассматривать алгебру $Z(\Pi)$, снабженную пополняющим эпиморфизмом $\varepsilon(\sum z_i x_i) = \sum z_i$, $z_i \in Z$, $x_i \in \Pi$. Соответствующий пополняющий идеал $I(\Pi)$ является в этом случае свободной абелевой группой, базу которой составляют все элементы вида $x - 1$, $x \in \Pi$.

В нашем случае целесообразно несколько изменить базы стандартных комплексов $S(\Pi)$ и $N(\Pi)$[1]. С этой целью мы введем новый символ $(x_0, \ldots, x_n)$, полагая

(1) $$(x_0, \ldots, x_n) = x_0 \, [x_0^{-1} x_1, \ldots, x_{n-1}^{-1} x_n].$$

[1] То есть комплексов $S(\Pi, i)$ и $N(\Pi, i)$. — *Прим. перев.*

Тогда

$$x(x_0, \ldots, x_n) = (xx_0, \ldots, xx_n), \tag{2}$$

$$[x_1, \ldots, x_n] = (1, x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2 \ldots x_n), \tag{3}$$

$$d_n(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Таким образом, модуль $S_n(\Pi)$ является свободной абелевой группой, порожденной всеми элементами вида $(x_0, \ldots, x_n)$, $x_i \in \Pi$, в которой Π-операторы действуют по формуле (2), а дифференциал определяется формулой (4). Такой стандартный комплекс называется *однородным*. Аналогичное представление допускает и нормализованный стандартный комплекс $N(\Pi)$; при этом $(x_0, \ldots, x_n) = 0$, если $x_{i-1} = x_i$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n$. Обратим внимание, что формула (4) для дифференциального оператора не содержит операторов из группы Π и имеет обычный вид, известный из теории гомологий симплициальных комплексов.

Группы гомологий и когомологий группы Π в малых размерностях описываются следующим образом:

Группа $H_0(\Pi, A) = A/AI = A_\Pi$ является факторгруппой группы A по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $a(x - 1)$, $a \in A$, $x \in \Pi$.

Группа $H^0(\Pi, C) = C^\Pi$ является подгруппой всех инвариантных элементов группы C, т. е. таких элементов $c \in C$, что $xc = c$ для всех $x \in \Pi$.

Группа $H^1(\Pi, C)$ является факторгруппой группы всех скрещенных гомоморфизмов $f: \Pi \to C$ [т. е. таких функций $f: \Pi \to C$, что $f(xy) = x(fy) + (fx)$ для любых элементов $x, y \in \Pi$] по подгруппе всех главных скрещенных гомоморфизмов [т. е. таких функций $f: \Pi \to C$, что $fx = xc - c$, где c — некоторый фиксированный элемент группы C].

В частности, если Π-операторы на модуле A тривиальны (т. е. $A^\Pi = A$), то

$$H_0(\Pi, A) = A = H^0(\Pi, A), \tag{5}$$

$$H^1(\Pi, A) \approx \operatorname{Hom}(\Pi, A). \tag{6}$$

Очевидно, что в соотношении (6) группу $\operatorname{Hom}(\Pi, A)$ можно заменить группой $\operatorname{Hom}(\Pi/[\Pi, \Pi], A)$, где $[\Pi, \Pi]$ — коммутант группы Π. В случае, когда Π-операторы на модуле A тривиальны, можно вычислить также и группу $H_1(\Pi, A)$. Действительно, согласно формуле 1, (4), $H_1(\Pi, A) \approx A \otimes I/I^2$, где $I = I(\Pi)$. Но, как легко проверить, определенные формулами $\varphi(x - 1) = x$, $\psi x = x - 1$ отображения

$$\varphi: I/I^2 \longrightarrow \Pi/[\Pi, \Pi], \quad \psi: \Pi/[\Pi, \Pi] \longrightarrow I/I^2$$

являются взаимно обратными изоморфизмами. Таким образом,

$$I/I^2 \approx \Pi/[\Pi, \Pi] \tag{7}$$

и, следовательно,

$$H_1(\Pi, A) \approx A \otimes \Pi/[\Pi, \Pi]. \tag{8}$$

Докажем теперь следующее предложение, показывающее, что в отдельных случаях группы гомологий и когомологий группы совпадают с группами гомологий и когомологий некоторой полугруппы, содержащейся в данной группе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть Π — произвольная группа, а Π' — такая полугруппа, содержащаяся в группе Π, что любой элемент группы Π можно представить в виде частного $x^{-1}y$ элементов $x, y \in \Pi'$. Тогда гомоморфизмы*

$$H_n(\Pi', A) \longrightarrow H_n(\Pi, A), \quad H^n(\Pi, C) \longrightarrow H^n(\Pi', C),$$

индуцированные отображением вложения $\Pi' \to \Pi$, являются изоморфизмами. Кроме того, для любой Π'-проективной резольвенты X кольца Z комплекс $Z(\Pi) \otimes_{\Pi'} X$ является Π-проективной резольвентой Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 3.1. Для того чтобы убедиться в выполнении условия (i), мы должны показать, что в группе $Z(\Pi) \otimes_{\Pi'} Z$ для любого элемента $z \in \Pi$ имеет место соотношение $z \otimes_{\Pi'} 1 = 1 \otimes_{\Pi'} 1$. Но в самом деле, если $z = x^{-1}y$, $x, y \in \Pi'$, то

$$z \otimes 1 = x^{-1}y \otimes 1 = x^{-1} \otimes y1 = x^{-1} \otimes 1 = x^{-1} \otimes x1 = 1 \otimes 1,$$

где $\otimes$ означает $\otimes_{\Pi'}$.

Чтобы убедиться в выполнении условия (ii), мы должны показать, что $\mathrm{Tor}_n^{\Pi'}(Z(\Pi), Z) = 0$ для всех $n > 0$. Поскольку функторы $\mathrm{Tor}_n^{\Pi'}$ перестановочны с операцией взятия предела прямого спектра (см. предложение VI, 1.3), для этого достаточно показать, что $Z(\Pi)$ является пределом прямого спектра правых Π'-проективных модулей. С этой целью мы покажем, что Π'-модуль $Z(\Pi)$ является объединением некоторого направленного семейства подмодулей M_s, каждый из которых изоморфен Π'-модулю $Z(\Pi')$.

Любому элементу $s \in \Pi$ мы сопоставим отображение $f_s : \Pi' \to \Pi$, задаваемое формулой $f_s x = sx$. Поскольку Π является группой, отображение f_s индуцирует, очевидно, Π'-изоморфизм модуля $Z(\Pi')$ на некоторый подмодуль M_s правого Π'-модуля $Z(\Pi)$. Так как $s \in M_s$, то объединение всех подмодулей M_s совпадает с модулем $Z(\Pi)$. Остается, таким образом, показать, что семейство подмодулей $\{M_s\}$ направлено. Для любой пары элементов s, t группы Π существует по крайней мере одна такая пара элементов v, w полугруппы Π', что $s^{-1}t = v^{-1}w$ и, следовательно, $sv^{-1} = tw^{-1}$. Поэтому, полагая $u = sv^{-1} = tw^{-1}$, мы получим, что

$$sx = u(vx) \in M_u, \quad tx = u(wx) \in M_u, \qquad x \in \Pi'.$$

Таким образом, $M_s \subset M_u$ и $M_t \subset M_u$, так что семейство $\{M_s\}$ действительно является направленным семейством подмодулей.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Утверждение предложения* 4.1 *имеет место для любой абелевой группы Π и любой ее подполугруппы Π', порождающей всю группу Π.*

Основное свойство, отличающее группы от полугрупп, состоит в том, что в группе определено преобразование $\omega x = x^{-1}$, задающее изоморфизм

$$\omega : Z(\Pi) \approx (Z(\Pi))^*.$$

С помощью этого «антиподизма» мы можем любой правый Π-модуль A превратить в левый Π-модуль, полагая

$$xa = ax^{-1}.$$

Это позволяет нам при построении теории гомологий и когомологий групп пользоваться лишь левыми Π-модулями.

5. ПРИМЕРЫ РЕЗОЛЬВЕНТ

Основное преимущество стандартного комплекса $S(\Pi)$ состоит в том, что этот комплекс может быть построен для любой пополненной полугруппы Π, причем он является ковариантным функтором аргумента Π. Однако почти для каждой конкретной полугруппы Π существуют более простые Π-проективные резольвенты модуля K, с помощью которых можно быстрее вычислить группы гомологий и когомологий этой полугруппы. Мы рассмотрим сейчас несколько таких примеров.

В качестве первого примера мы одновременно рассмотрим два следующих случая:

Π является *свободной полугруппой*, порожденной некоторым (конечным или бесконечным) множеством $\{x_\alpha\}$, с произвольной пополняющей функцией $\varepsilon : \Pi \to K$.

Π является *свободной группой*, порожденной некоторым множеством $\{x_\alpha\}$, с единичной пополняющей функцией $\Pi \to Z$.

Пусть C — произвольный левый $K(\Pi)$-модуль. Легко проверить, что любой скрещенный гомоморфизм $f : K(\Pi) \to C$ однозначно определяется его значениями на элементах x_α, причем эти значения могут быть выбраны произвольно. Отсюда, ввиду взаимно однозначного соответствия между скрещенными гомоморфизмами и $K(\Pi)$-гомоморфизмами $g : I(\Pi) \to C$, вытекает, что любой такой гомоморфизм g однозначно определяется его значениями на элементах $x_\alpha - \varepsilon x_\alpha$, причем эти значения также можно выбирать произвольно. Это возможно только тогда, когда элементы $x_\alpha - \varepsilon x_\alpha$ образуют $K(\Pi)$-базу идеала $I(\Pi)$, рассматриваемого как левый $K(\Pi)$-модуль. Таким образом, модуль $I(\Pi)$ $K(\Pi)$-свободен, и потому точная последовательность

$$0 \longrightarrow I(\Pi) \longrightarrow K(\Pi) \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

является $K(\Pi)$-проективной резольвентой кольца K. Следовательно,

$$H_n(\Pi, A) = 0 = H^n(\Pi, C) \text{ для любого } n > 1.$$

В то же время, согласно формуле VIII, 1, (9),

$$H_1(\Pi, K) = \operatorname{Tor}_1^{\Pi}(K, K) = I/I^2.$$

С другой стороны, из тождества $xy - 1 = (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$ вытекает, что образы элементов $x_\alpha - 1$ образуют K-базу фактормодуля I/I^2. Таким образом, если множество $\{x_\alpha\}$ не пусто, то этот модуль отличен от нуля. Тем самым показано, что для любой свободной полугруппы (или группы) Π с непустой базой $\{x_\alpha\}$

$$\text{l.} \dim_{K(\Pi)} K = 1.$$

Аналогично доказывается, что $\text{r.} \dim_{K(\Pi)} K = 1$.

Попутно мы показали, что для любого элемента x свободной группы Π, порожденной некоторым множеством $\{x_\alpha\}$, справедливо соотношение

$$x - 1 = \sum a_\alpha(x)(x_\alpha - 1),$$

где $a_\alpha(x)$ — некоторые однозначно определенные элементы алгебры $Z(\Pi)$. Функции a_α являются скрещенными гомоморфизмами $\Pi \to Z(\Pi)$ и однозначно определяются условиями $a_\alpha(x_\alpha) = 1$ и $a_\alpha(x_\beta) = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Элементы $a_\alpha(x)$ называются частными производными элемента x и обозначаются через $\dfrac{\partial x}{\partial x_\alpha}$.

В качестве следующего примера мы рассмотрим *свободную абелеву полугруппу* Π, порожденную конечным множеством элементов $x_1, \ldots, x_n$, с произвольной пополняющей функцией $\varepsilon : \Pi \to K$. Выделив в алгебре $K(\Pi)$ элементы $x_i' = x_i - \varepsilon x_i$, мы замечаем, что эту алгебру можно отождествить с алгеброй многочленов $K[x_1', \ldots, x_n']$ от неизвестных $x_1', \ldots, x_n'$, снабженной пополняющим эпиморфизмом ε, для которого $\varepsilon(x_i') = 0$. Последняя алгебра была рассмотрена в § VIII, 4. Из результатов этого параграфа, в частности, вытекает, что одной из $K(\Pi)$-проективных резольвент кольца K является комплекс

$$K(\Pi) \otimes_K E(y_1, \ldots, y_n),$$

где $E(y_1, \ldots, y_n)$ — внешняя K-алгебра от неизвестных $y_1, \ldots, y_n$. Дифференциал в этом комплексе задается формулой

$$d_i(x \otimes y_{p_1} \ldots y_{p_i}) = \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{j+1} x(x_{p_j} - \varepsilon x_{p_j}) \otimes y_{p_1} \ldots \hat{y}_{p_j} \ldots y_{p_i}.$$

К рассматриваемому случаю применимо также замечание, сделанное в конце § VIII, 4.

В качестве последнего примера рассмотрим *свободную абелеву группу* Π, порожденную конечным множеством $x_1, \ldots, x_n$ (с единичной пополняющей функцией $\Pi \to Z$). К этой группе применимо предложение 4.1, в котором за полугруппу Π' следует принять свободную абелеву полугруппу, порожденную элементами $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, мы можем за резольвенту принять комплекс

$$Z(\Pi) \otimes E(y_1, \ldots, y_n)$$

с дифференциалом

$$d_i(x \otimes y_{p_1} \ldots y_{p_i}) = \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{j+1} x(x_{p_j} - 1) \otimes y_{p_1} \ldots \hat{y}_{p_j} \ldots y_{p_i}.$$

Дальнейшие примеры для случая конечных групп будут приведены в гл. XII.

6. ОБРАТНЫЙ ПРОЦЕСС

В силу теоремы 2.1 теория гомологий и когомологий K-проективных дополненных K-алгебр сводится к теории Хохшильда. Оказывается, что в некоторых очень важных случаях имеет место и обратное, т. е. теорию Хохшильда можно свести к теории гомологий дополненных алгебр.

Пусть для некоторой дополненной K-алгебры Λ задан такой гомоморфизм

$$E : \Lambda \longrightarrow \Lambda^e$$

K-алгебр, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "E"'] & K \arrow[d, "\eta"] \\ \Lambda^e \arrow[r, "\varrho"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

где ε — пополняющий гомоморфизм алгебры Λ, η — естественное отображение кольца K в K-алгебру Λ, а ϱ — пополняющий эпиморфизм кольца Λ^e. Коммутативность этой диаграммы равносильна включению

$$(1) \qquad EI \subset J.$$

Получающаяся ситуация является частным случаем ситуации, рассмотренной в § VIII, 3. Следовательно, для любого двустороннего Λ-модуля A определены гомоморфизмы

$$F_n^E : \operatorname{Tor}_n^\Lambda (A_E, K) \longrightarrow H_n(\Lambda, A),$$
$$F_E^n : H^n(\Lambda, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^n (K, {}_EA),$$

где ${}_EA$ (соответственно A_E) — левый (соответственно правый) Λ-модуль, получающийся с помощью гомоморфизма E из модуля A, рассматриваемого как левый (соответственно правый) Λ^e-модуль. В частности, символ Λ_E^e обозначает алгебру Λ^e, рассматриваемую как левый Λ^e-модуль и как правый Λ-модуль относительно гомоморфизма E.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если*

(E. 1) $$J = \Lambda^e_E I,$$

(E. 2) *правый Λ-модуль Λ^e_E проективен,*
то гомоморфизмы F^E_n и F^n_E являются изоморфизмами, причем для любой Λ-проективной резольвенты X кольца K, рассматриваемого как левый Λ-модуль, комплекс $\Lambda^e_E \otimes_\Lambda X$ является Λ^e-проективной резольвентой алгебры Λ, рассматриваемой как левый Λ^e-модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что выполнены условия (i) и (ii) теоремы об отображении VIII, 3.1.

Так как из точности последовательности $0 \to I \to \Lambda \to K \to 0$ вытекает точность последовательности

$$\Lambda^e_E \otimes_\Lambda I \longrightarrow \Lambda^e_E \longrightarrow \Lambda^e_E \otimes_\Lambda K \longrightarrow 0,$$

то

$$\Lambda^e_E \otimes_\Lambda K \approx \operatorname{Coker}(\Lambda^e_E \otimes_\Lambda I \longrightarrow \Lambda^e_E) = \Lambda^e_E/\Lambda^e_E I = \Lambda^e_E/J = \Lambda.$$

Так как изоморфизм $\Lambda^e_E \otimes_\Lambda K \approx \Lambda$ задается, очевидно, соответствием $\gamma \otimes_\Lambda 1 \to \varrho\gamma$, то тем самым условие (i) теоремы об отображении проверено.

Условие (ii) в рассматриваемом случае принимает вид $\operatorname{Tor}^\Lambda_n(\Lambda^e_E, K) = 0$ для всех $n > 0$ и потому непосредственно следует из условия (E. 2).

Полезно несколько подробнее рассмотреть условие (E. 1). Включение $\Lambda^e_E I \subset J$ равносильно включению (1). Противоположное же включение $J \subset \Lambda^e_E I$ означает, что идеал J содержится в левом идеале алгебры Λ^e, порожденном подкольцом EI. Следовательно, поскольку левый идеал J порождается всеми элементами вида $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$, $\lambda \in \Lambda$ (см. предложение IX, 3.1), условие (E. 1) равносильно [при выполнении включения (1)] следующему условию:

(E. 1') *Для любого элемента $\lambda \in \Lambda$ элемент $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$ принадлежит левому идеалу алгебры Λ^e, порожденному подкольцом EI.*

ТЕОРЕМА 6.2. *Если алгебра Λ K-проективна и удовлетворяет условиям* (E. 1) *и* (E. 2), *то*

$$\dim \Lambda = \text{l.}\dim_\Lambda K = \text{r.}\dim_\Lambda K.$$

Если, кроме того, кольцо K полупросто, то

$$\dim \Lambda = \text{l.gl.}\dim \Lambda = \text{r.gl.}\dim \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\dim \Lambda = \text{l.}\dim_\Lambda K$ непосредственно вытекает из теорем 2.1 и 6.1. Для доказательства же равенства $\dim \Lambda = \text{r.}\dim_\Lambda K$ достаточно показать, что $\dim \Lambda = \text{l.}\dim_{\Lambda^*} K$. С этой целью заметим, что отображение $E : \Lambda \to \Lambda^e$ индуцирует отображение $E^* : \Lambda^* \to (\Lambda^e)^* = (\Lambda^*)^e$, также удовлетворяющее условиям (E. 1) и (E. 2). Следовательно, в силу уже доказанного, $\dim \Lambda^* = \text{l.}\dim_{\Lambda^*} K$. Но $\dim \Lambda = \dim \Lambda^*$, откуда и следует нужное нам соотношение.

Если кольцо K полупросто, то, согласно предложению IX, 7.6, $\text{l.gl.}\dim \Lambda \le \dim \Lambda$. В то же время $\dim \Lambda = \text{l.}\dim_\Lambda K \le \text{l.gl.}\dim \Lambda$.

Следовательно, $\dim \Lambda = \mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\Lambda$. Для правой глобальной размерности $\mathrm{r.\,gl.\,dim}\,\Lambda$ доказательство аналогично.

В качестве иллюстрации обратного процесса рассмотрим алгебру $\Lambda = Z(\Pi)$ [или, более общо, алгебру $\Lambda = K(\Pi)$], где Π — произвольная группа с единичной пополняющей функцией. Определим отображение $E : \Lambda \to \Lambda^e$, полагая $Ex = x \otimes (x^{-1})^*$ для любого элемента $x \in \Pi$. Тогда $\varrho E x = 1$ и, следовательно, имеет место включение (1). Из соотношений

$$x \otimes 1 - 1 \otimes x^* = (x \otimes 1)(1 \otimes 1 - x^{-1} \otimes x^*) = (x \otimes 1)E(1 - x^{-1})$$

вытекает, что условие (E. 1') выполнено. Условие (E. 2) также выполнено, поскольку, как легко видеть, элементы $1 \otimes x^*$, $x \in \Pi$, образуют базу алгебры Λ^e, рассматриваемой как правый Λ-модуль. Таким образом, применимы теоремы 6.1 и 6.2. В рассматриваемом случае для любого двустороннего Λ-модуля A операторы на левом Π-модуле ${}_EA$ задаются отображениями $a \to xax^{-1}$, а на правом Π-модуле A_E — отображениями $a \to x^{-1}ax$.

В § XIII, 5 будет показано, что обратный процесс применим также и в теории гомологий алгебр Ли.

7. ПОДАЛГЕБРЫ И ПОДГРУППЫ

Пусть Λ и Γ — произвольные K-алгебры, а $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ — некоторый их гомоморфизм. Если алгебра Γ является дополненной алгеброй с пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon : \Gamma \to K$, то алгебру Λ также можно превратить в дополненную алгебру, принимая за пополняющий гомоморфизм отображение $\varepsilon\varphi : \Lambda \to K$. В наиболее часто встречающихся случаях алгебра Λ является подалгеброй алгебры Γ, а гомоморфизм φ — отображением вложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если алгебра Γ, рассматриваемая как левый (правый) Λ-модуль*[1], *проективна, то любая Γ-проективная или Γ-инъективная резольвента X произвольного левого (правого) Γ-модуля A является также Λ-проективной (соответственно Λ-инъективной) резольвентой Λ-модуля A.*

Непосредственно вытекает из предложений II, 6.2 и II, 6.2а.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Если алгебра Γ, рассматриваемая как левый Λ-модуль, проективна, то для любого правого Λ-модуля A и любого левого Λ-модуля C имеют место изоморфизмы (обозначения см. в* § II, 6)

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, K) \approx \mathrm{Tor}_n^\Gamma(A_{(\varphi)}, K), \quad \mathrm{Ext}_\Gamma^n(K, {}^{(\varphi)}C) \approx \mathrm{Ext}_\Lambda^n(K, C).$$

Непосредственно вытекает из предложений VI, 4.1.1 и VI, 4.1.4.

Подобным же образом из предложений VI, 4.1.2 и VI, 4.1.3 вытекает

[1] Относительно гомоморфизма φ. — *Прим. ред.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Если алгебра Γ, рассматриваемая как правый Λ-модуль, проективна, то для любого правого Γ-модуля A и любого левого Γ-модуля C*

$$\operatorname{Tor}_n^{\Lambda}(A, K) \approx \operatorname{Tor}_n^{\Gamma}(A, \Gamma \otimes_{\Lambda} K), \quad \operatorname{Ext}_{\Gamma}^n(\Gamma \otimes_{\Lambda} K, C) \approx \operatorname{Ext}_{\Lambda}^n(K, C).$$

Применим эти результаты к группам. Пусть π — некоторая подгруппа группы Π, и пусть $\varphi: Z(\pi) \to Z(\Pi)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением вложения $\pi \to \Pi$. Легко проверить, что полная система $\{x_\alpha\}$ представителей правых смежных классов группы Π по подгруппе π образует базу алгебры $Z(\Pi)$, рассматриваемой как левый $Z(\pi)$-модуль. По аналогичным соображениям алгебра $Z(\Pi)$ является также и свободным правым $Z(\pi)$-модулем. Поэтому применимо предложение 7.2. Заменив в этом предложении модули $A_{(\varphi)}$ и ${}^{(\varphi)}C$ выражениями, которыми они были определены в § II, 6, мы получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Пусть π — произвольная подгруппа группы Π. Тогда для любого правого π-модуля A и любого левого π-модуля C*

(1) $$H_n(\pi, A) \approx H_n(\Pi, A \otimes_\pi Z(\Pi)),$$

(1a) $$H^n(\pi, C) \approx H^n(\Pi, \operatorname{Hom}_\pi(Z(\pi), C)).$$

Аналогично из предложения 7.3 вытекает нижеследующее предложение 7.5. При формулировке этого предложения мы воспользовались тем, что модуль $Z(\Pi) \otimes_\pi Z$ можно отождествить со свободной абелевой группой $Z(\Pi/\pi)$, порожденной левыми смежными классами $x\pi$ группы Π по подгруппе π, в которой группа Π действует как группа левых сдвигов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Пусть π — произвольная подгруппа группы Π. Тогда для любого правого Π-модуля A и любого левого Π-модуля C*

(2) $$H_n(\pi, A) \approx \operatorname{Tor}_n^{\Pi}(A, Z(\Pi/\pi)),$$

(2a) $$H^n(\pi, C) \approx \operatorname{Ext}_{\Pi}^n(Z(\Pi/\pi), C).$$

Продолжая обозначать через π некоторую подгруппу группы Π, рассмотрим в группе Π произвольный элемент x. Тогда в ситуации $(A_\Pi, {}_\Pi C)$ формула $c_x(a \otimes_\pi c) = ax^{-1} \otimes_{x\pi x^{-1}} xc$ определяет некоторое отображение

$$c_x: A \otimes_\pi C \longrightarrow A \otimes_{x\pi x^{-1}} C.$$

Принимая здесь за модуль C произвольную Π-проективную резольвенту модуля Z и переходя к группам гомологий, мы для любого правого Π-модуля A, как легко видеть, получим изоморфизмы

$$c_x: H_n(\pi, A) \approx H_n(x\pi x^{-1}, A).$$

В ситуации $({}_\Pi A, {}_\Pi C)$ отображение

$$c_x: \operatorname{Hom}_\pi(A, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{x\pi x^{-1}}(A, C)$$

определяется формулой $(c_x f)\, a = x(f(x^{-1}a))$. Принимая за модуль A произвольную Π-проективную резольвенту модуля Z и переходя к группам гомологий, мы для любого левого Π-модуля C получим изоморфизмы

$$c_x : H^n(\pi, C) \approx H^n(x\pi x^{-1}, C).$$

Из определений отображений c_x непосредственно вытекают следующие утверждения:

(3) $$c_x c_y = c_{xy};$$

(4) если $x \in \pi$, то c_x является тождественным отображением.

Если теперь подгруппа π является *нормальным делителем* группы Π, то $\pi = x\pi x^{-1}$ и, как непосредственно следует из свойств (3) и (4), отображения c_x определяют факторгруппу Π/π как группу левых операторов каждой из групп $H_n(\pi, A)$ и $H^n(\pi, C)$, где A — произвольный правый, а C — произвольный левый Π-модули.

Те же самые операторы можно определить иначе. Π-модуль $Z(\Pi/\pi)$, участвующий в формулах (2) и (2a), представляет собой алгебру группы Π/π, рассматриваемую как левый Π-модуль. Так как алгебра $Z(\Pi/\pi)$ является также правым Π/π-модулем, то с помощью изоморфизма (2) на группах $H_n(\pi, A)$ можно определить правые Π/π-операторы, а с помощью изоморфизма (2a) на группах $H^n(\pi, C)$ — левые Π/π-операторы. Мы предоставляем читателю самому проверить, что так определенные операторы совпадают с операторами, получающимися с помощью отображений c_x.

В гл. XIII мы проведем аналогичные построения для алгебр Ли. Более глубокие результаты будут получены в гл. XVI с помощью спектральных последовательностей.

8. СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫЕ И СЛАБО ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Пусть Λ — произвольная K-алгебра и $\eta : K \to \Lambda$ — естественное отображение. Правый Λ-модуль A называется *слабо проективным*, если он η-проективен в смысле § II, 6. Это равносильно тому, что ядро отображения $g : A \otimes_K \Lambda \to A$, определенного формулой $a \otimes \lambda \to a\lambda$, является прямым слагаемым правого Λ-модуля $A \otimes_K \Lambda$, правые Λ-операторы которого индуцируются правыми Λ-операторами алгебры Λ (но не модуля A!). Подобным же образом (с помощью отображения $\Lambda \otimes_K A \to A$) определяются слабо проективные левые Λ-модули.

Аналогично левый Λ-модуль C называется *слабо инъективным*, если он η-инъективен в смысле § II, 6. Это равносильно тому, что образ отображения $h : C \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda, C)$, сопоставляющего произвольному элементу c гомоморфизм $\lambda \to \lambda c$, является прямым слагаемым левого Λ-модуля $\mathrm{Hom}_K(\Lambda, C)$, левые Λ-операторы которого индуцируются правыми Λ-операторами алгебры Λ. Слабо инъективные правые Λ-модули определяются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Для любого K-модуля M и любого слабо проективного правого Λ-модуля A модуль $M \otimes_K A$ слабо проективен, а модуль* $\mathrm{Hom}_K(A, M)$ *слабо инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лишь второе утверждение. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(A \otimes_K \Lambda, M) & & \mathrm{Hom}_K(\Lambda, \mathrm{Hom}_K(A, M)) \arrow[ll, "s"'] \\
& \mathrm{Hom}_K(A, M) \arrow[ul, "\mathrm{Hom}_K(g, M)"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

где s — рассмотренный в предложении II, 5.2 Λ-изоморфизм. Поскольку модуль A слабо проективен, подмодуль $\mathrm{Ker}(g)$ является прямым слагаемым Λ-модуля $A \otimes_K \Lambda$ и потому образ гомоморфизма $\mathrm{Hom}_K(g, M)$ —прямым слагаемым Λ-модуля $\mathrm{Hom}_K(A \otimes_K \Lambda, M)$. Следовательно, тем же свойством обладает и образ гомоморфизма h, т. е. модуль $\mathrm{Hom}_K(A, M)$ слабо инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Если K-алгебра Λ K-проективна и в ситуации $(A_\Lambda, {}_\Lambda C)$ модуль C K-проективен, а модуль A слабо проективен, то для всех $n > 0$*

$$\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, C) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2а. *Если K-алгебра Λ K-проективна и в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C)$ модуль A K-проективен, а модуль C слабо инъективен, то для всех $n > 0$*

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) = 0.$$

Эти предложения непосредственно вытекают из следствий VI, 4.2.1 и VI, 4.2.4. Из них в свою очередь вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8.3. *Если дополненная K-алгебра Λ K-проективна, то для любого слабо проективного правого Λ-модуля A и для любого слабо инъективного левого Λ-модуля C*

$$H_n(\Lambda, A) = 0 = H^n(\Lambda, C) \text{ для всех } n > 0.$$

Перейдем теперь к изучению слабо проективных и слабо инъективных модулей в случае, когда основной алгеброй Λ является алгебра $\Lambda = Z(\Pi)$, где Π — некоторая группа.

Пусть A — произвольный правый Π-модуль. На группе $A \otimes Z(\Pi)$ можно двумя способами определить строение правого Π-модуля, полагая для любых элементов $a \in A$, $x, y \in \Pi$

(1) $$(a \otimes x)y = a \otimes xy,$$

(1′) $$(a \otimes x)y = ay \otimes xy$$

соответственно. Отображение $\varphi: a \otimes x \to ax \otimes x$, очевидно, изоморфно отображает первый модуль на второй. При определении слабо проективных модулей мы пользуемся отображением $g: A \otimes Z(\Pi) \to A$, задаваемым формулой $g(a \otimes x) = ax$, которое является

Π-гомоморфизмом, если группу $A \otimes Z(\Pi)$ рассматривать как Π-модуль, на котором Π-операторы определяются формулой (1). Соответствующее отображение $g' = g\varphi^{-1}$, задаваемое формулой $g'(a \otimes x) = a$, является Π-гомоморфизмом, если группу $A \otimes Z(\Pi)$ рассматривать как Π-модуль, на котором Π-операторы определяются формулой (1'). Отсюда непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. *Правый Π-модуль A тогда и только тогда слабо проективен, когда существует такой Π-гомоморфизм $\nu: A \to A \otimes Z(\Pi)$ [здесь группа $A \otimes Z(\Pi)$ рассматривается как Π-модуль с Π-операторами (1')], что композиция $g'\nu$ является тождественным отображением.*

Пусть теперь C — произвольный левый Π-модуль. На группе $\mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C)$ можно двумя способами определить строение левого Π-модуля, полагая для любых элементов $f \in \mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C)$, $x, y \in \Pi$

$$(yf)x = f(xy), \tag{2}$$

$$(yf)x = yf(y^{-1}x) \tag{2'}$$

соответственно. Отображение $f \to \psi f$, где $(\psi f)\,x = x(fx^{-1})$, изоморфно отображает первый модуль на второй. При определении слабо инъективных модулей мы пользуемся отображением $h: C \to \mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C)$, задаваемым формулой $(hc)\,x = xc$. Соответствующее отображение $h' = \psi h: C \to \mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C)$, задаваемое формулой $(h'c)\,x = c$, является Π-гомоморфизмом, если группу $\mathrm{Hom}(Z(\Pi),C)$ рассматривать как Π-модуль, на котором Π-операторы определяются формулой (2'). Отсюда, как и выше, непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4а. *Левый Π-модуль C тогда и только тогда слабо инъективен, когда существует такой Π-гомоморфизм $\mu: \mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C) \to C$ [здесь группа $\mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), C)$ рассматривается как Π-модуль с Π-операторами (2')], что композиция $\mu h'$ является тождественным отображением. Таким образом, отображение μ любой гомоморфизм f, принимающий на элементах x группы Π постоянное значение, равное элементу c, переводит в этот элемент: $c = \mu f$. Такое отображение μ мы будем называть отображением усреднения.*

В качестве примеров использования полученных критериев докажем следующие два предложения, которые нам понадобятся в гл. XVI.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. *Если в ситуации $({}_\Pi A, {}_\Pi C)$ модуль A слабо проективен, то левый Π-модуль $A \otimes C$, на котором Π-операторы задаются формулой*

$$x(a \otimes c) = xa \otimes xc,$$

слабо проективен, а левый Π-модуль $\mathrm{Hom}\,(A, C)$, на котором Π-операторы задаются формулой

$$(xf)a = x(f(x^{-1}a)),$$

слабо инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 8.1 и опирается на диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda\otimes A)\otimes C \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "(g'\otimes C)"'] & & \Lambda\otimes(A\otimes C) \arrow[dl, "g'"] \\
& A\otimes C &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Lambda\otimes A, C) & & \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathrm{Hom}(A, C)) \arrow[ll, "s'"'] \\
& \mathrm{Hom}(A, C) \arrow[ul, "\mathrm{Hom}(g', C)"] \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

где Λ — алгебра $Z(\Pi)$, рассматриваемая как левый Π-модуль, а r и s' — отображения, рассмотренные в предложениях II, 5.1 и II, 5.2 соответственно и являющиеся Π-изоморфизмами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. *Левый Π-модуль A тогда и только тогда слабо проективен, когда существует такой Z-эндоморфизм $\varrho : A \to A$, что*

(i) *для любого $a \in A$ функция $\varrho(x^{-1}a)$ отлична от нуля лишь на конечном множестве элементов $x \in \Pi$,*

(ii) $a = \sum_{x\in\Pi} x\varrho(x^{-1}a)$ *для любого $a \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g' : Z(\Pi) \otimes A \to A$ — отображение, задаваемое формулой $g'(x \otimes a) = a$. Тогда, если модуль A слабо проективен, то, согласно предложению 8.4, существует такой Π-гомоморфизм $\nu : A \to Z(\Pi) \otimes A$, что для любого $a \in A$

$$g'\nu a = a$$

[предполагается, что Π-операторы на группе $Z(\Pi) \otimes A$ определены формулой $y(x \otimes a) = yx \otimes ya$]. Так как элементы $x \in \Pi$ образуют базу свободного Z-модуля $Z(\Pi)$, то образ νa любого элемента $a \in A$ можно записать в виде конечной линейной комбинации

$$\nu a = \sum x \otimes g(x, a)^{1)}, \qquad x \in \Pi. \tag{3}$$

Для любого элемента $y \in \Pi$

$$\nu(ya) = \sum_x x \otimes g(x, ya),$$

$$y(\nu a) = \sum_x yx \otimes yg(x, a) = \sum_x x \otimes yg(y^{-1}x, a).$$

Следовательно, соотношение $\nu(ya) = y(\nu a)$ равносильно соотношению

$$g(x, ya) = yg(y^{-1}x, a) \text{ для любых } x, y \in \Pi, \tag{4}$$

1) Здесь $g(x, a)$ — некоторая функция аргументов $x \in \Pi$ и $a \in A$, принимающая значения в модуле A. — *Прим. перев.*

которое в свою очередь равносильно соотношению

(5) $$g(x, a) = xg(1, x^{-1}a) \text{ для любого } x \in \Pi.$$

Поэтому, полагая $\varrho a = g(1, a)$, мы получим, что

(6) $$g(x, a) = x\varrho(x^{-1}a).$$

Так как для любого фиксированного $a \in A$ функция $g(x, a)$ отлична от нуля лишь для конечного множества элементов $x \in \Pi$, то эндоморфизм ϱ обладает свойством (i). Наконец,

$$a = g'\nu a = g'(\sum_x x \otimes g(x, a)) = \sum_x g(x, a) = \sum_x x\varrho(x^{-1}a).$$

Обратно, если существует эндоморфизм $\varrho : A \to A$, обладающий свойствами (i) и (ii), то формула (6) определяет функцию $g(x, a)$ и, следовательно, формула (3) — отображение ν. Это отображение Π-гомоморфно и композиция $g'\nu$ является тождественным отображением.

Во всех теоремах этого параграфа, относящихся к группам, основное кольцо Z можно заменить любым коммутативным кольцом K.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Λ — произвольная дополненная K-алгебра, а A — некоторый K-модуль. Показать, что Λ-модуль $\Lambda \otimes_K A$ тогда и только тогда Λ-проективен, когда модуль A K-проективен. Предполагая, что каждый K-проективный модуль K-свободен, показать, что если модуль $\Lambda \otimes_K A$ Λ-проективен, то он Λ-свободен.

2. Показать, что обратный процесс (см. § 6) применим к алгебрам $\Lambda = F_K(x_1, \ldots, x_n)$ и $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$ с пополняющим гомоморфизмом, для которого $\varepsilon x_i = 0$; за гомоморфизм E принять гомоморфизм $E : \Lambda \to \Lambda^e$, для которого $Ex_i = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i^*$.

3. Пусть Λ — дополненная K-проективная алгебра над (коммутативным) наследственным кольцом K. Для любого Λ-модуля A с тривиальными Λ-операторами построить точные расщепляемые последовательности

$$0 \to H_n(\Lambda, K) \otimes_K A \to H_n(\Lambda, A) \to \mathrm{Tor}_1^K(H_{n-1}(\Lambda, K), A) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Ext}_K^1(H^{n-1}(\Lambda, K), A) \to H^n(\Lambda, A) \to \mathrm{Hom}_K(H^n(\Lambda, K), A) \to 0.$$

4. Пусть Π — некоторая группа (или полугруппа с произвольной пополняющей функцией $\Pi \to Z$). Для любой абелевой группы A с тривиальными Π-операторами построить точные расщепляемые последовательности

$$0 \to H_n(\Pi, Z) \otimes A \to H_n(\Pi, A) \to \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(\Pi, Z), A) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H^{n-1}(\Pi, Z), A) \to H^n(\Pi, A) \to \mathrm{Hom}(H^n(\Pi, Z), A) \to 0.$$

5. Принимая во внимание, что для любой дополненной K-проективной K-алгебры Λ модуль $\Lambda' = \operatorname{Coker}(K \to \Lambda)$ можно отождествить с пополняющим идеалом $\boldsymbol{I}$, описать комплекс $N(\Lambda, \varepsilon)$, используя символы $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $\lambda_i \in \boldsymbol{I}$.

6. Пусть Λ — произвольная дополненная K-алгебра, и пусть z — некоторый элемент ее центра. Для любого левого Λ-модуля C умножение на элемент z определяет некоторый эндоморфизм $C \to C$. Показать, что индуцированный этим эндоморфизмом эндоморфизм $H^n(\Lambda, C) \to H^n(\Lambda, C)$ задается умножением на элемент εz кольца K. Получить аналогичный результат для групп гомологий.

ГЛАВА XI

УМНОЖЕНИЯ

Введение. Функторы Tor и Ext можно комбинировать друг с другом посредством четырех умножений $\top$, $\perp$, $\vee$ и $\wedge$. Каждое из этих умножений связывает модули над тремя алгебрами Λ, Γ и $\Lambda \otimes \Gamma$ и удовлетворяет определенным законам ассоциативности, антикоммутативности и т. п.

Можно ввести также внутренние умножения, связывающие модули над одной и той же алгеброй. Определение внутренних умножений $\pitchfork$ и $\Cup$, соответствующих внешним умножениям $\top$ и $\perp$, основывается на некотором гомоморфизме алгебр $\Lambda \otimes \Lambda \rightarrow \Lambda$; этот гомоморфизм во всяком случае существует, если алгебра Λ коммутативна. Определение внутренних умножений $\smile$ и $\frown$, соответствующих внешним умножениям $\vee$ и $\wedge$, основывается на некотором гомоморфизме $\Lambda \rightarrow \Lambda \otimes \Lambda$; этот гомоморфизм (обычно называемый «диагональным отображением») существует в большинстве интересных случаев.

Внешние и внутренние произведения можно вычислять с помощью соответствующих формул умножения в комплексах (§ 5).

Описанная ситуация имеет очень близкий аналог в алгебраической топологии.

Общая теория умножений для функторов Tor и Ext применяется в § 6 и 7 к гомологическим теориям, построенным в гл. IX и X. В § 8 внутренние умножения $\smile$ и $\frown$ с помощью «антиподизма» $\Lambda \rightarrow \Lambda^*$ несколько модифицируются. В § 9 с помощью этих модифицированных умножений доказывается редукционная теорема, обобщающая теорему Эйленберга и Маклейна о редукции с помощью $\smile$-умножений [Eilenberg S., MacLane S., *Ann. of Math.*, **48** (1947), 51—78, Ch. III].

1. ВНЕШНИЕ УМНОЖЕНИЯ

В этом и в следующих параграфах рассматриваются K-алгебры над одним и тем же коммутативным кольцом K. В связи с этим ради упрощения записи мы будем вместо $\otimes_K$ и Hom_K писать просто $\otimes$ и Hom.

Исходя из произвольных комплексов X и Y, однородными составляющими которых являются K-модули, мы можем образовать комплексы $X \otimes Y$ и $\operatorname{Hom}(X, Y)$ и построить гомоморфизмы

$$\alpha : H(X) \otimes H(Y) \longrightarrow H(X \otimes Y), \tag{1}$$

$$\alpha' : H(\operatorname{Hom}(X, Y)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H(X), H(Y)) \tag{1'}$$

(см. § VI, 6). Так как степень каждого из этих гомоморфизмов равна нулю, то

$$\alpha : H^p(X) \otimes H^q(Y) \longrightarrow H^{p+q}(X \otimes Y),$$

$$\alpha' : H^{p+q}(\operatorname{Hom}(X, Y)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p(X), H^q(Y)).$$

Поскольку гомоморфизмы α и α' играют основную роль в теории умножений, к изложению которой мы сейчас приступаем, мы вкратце напомним их определения.

Пусть $h_1 \in H^p(X)$, $h_2 \in H^q(Y)$ — некоторые классы гомологий, а $z_1 \in Z^p(X)$, $z_2 \in Z^q(Y)$ — их произвольные представители. Рассматривая z_1 и z_2 как элементы модулей X^p и Y^q соответственно, мы получим, что $z_1 \otimes z_2 \in X^p \otimes Y^q$ и $d(z_1 \otimes z_2) = 0$, т. е. что $z_1 \otimes z_2 \in Z^{p+q}(X \otimes Y)$. Класс элемента $z_1 \otimes z_2$ и принимается за $\alpha(h_1 \otimes h_2) \in H^{p+q}(X \otimes Y)$.

Пусть $h_1 \in H^{p+q}(\operatorname{Hom}(X, Y))$, $h_2 \in H_p(X)$ — некоторые классы гомологий, а $f \in Z^{p+q}(\operatorname{Hom}(X, Y))$, $z_2 \in Z_p(X)$ — их произвольные представители. Тогда $fz_2 \in Y^q$, причем $d(fz_2) = 0$. Следовательно, fz_2 определяет некоторый элемент группы $H^q(Y)$. Этот элемент и принимается за $(\alpha' h_1)\, h_2$.

Рассмотрим K-алгебру

$$\Omega = \Lambda \otimes \Gamma,$$

где Λ и Γ — произвольные K-алгебры (в соответствии со сказанным выше мы пишем $\otimes$ вместо $\otimes_K$).

Для любого левого Λ-модуля A и любого левого Γ-модуля A' тензорное произведение $A \otimes A'$ является левым Ω-модулем.

Далее, для любой Λ-проективной резольвенты X модуля A и любой Γ-проективной резольвенты X' модуля A' тензорное произведение $X \otimes X'$ является, согласно следствию IX, 2.5, Ω-проективным левым комплексом над модулем $A \otimes A'$. Поэтому имеют место гомоморфизмы (нулевой степени)

$$H(B \otimes_\Omega (X \otimes X')) \longrightarrow \operatorname{Tor}^\Omega(B, A \otimes A'), \qquad B_\Omega, \tag{2}$$

$$\operatorname{Ext}_\Omega(A \otimes A', C) \longrightarrow H(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', C)), \qquad {}_\Omega C. \tag{2'}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (ср. следствие IX, 2.7). *Если алгебры Λ и Γ K-проективны и $\operatorname{Tor}_n^K(\Lambda, \Lambda') = 0$ для всех $n > 0$, то комплекс $X \otimes X'$ является Ω-проективной резольвентой модуля $A \otimes A'$ и, следовательно, гомоморфизмы* (2) *и* (2') *являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебры Λ и Γ K-проективны, то в силу предложения II, 6.2 комплексы X и X' являются K-проективными резольвентами модулей A и A' соответственно. Следовательно, $H_n(X \otimes X') = \mathrm{Tor}_n^K(A, A') = 0$ для всех $n > 0$.

Рассмотрим теперь ситуацию $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', C'_\Gamma)$. В этой ситуации мы определим гомоморфизм

$$\varphi_1 : (C \otimes_\Lambda A) \otimes (C' \otimes_\Gamma A') \longrightarrow (C \otimes C') \otimes_\Omega (A \otimes A'),$$

полагая $\varphi_1((c \otimes a) \otimes (c' \otimes a')) = (c \otimes c') \otimes (a \otimes a')$. Заменив здесь модули A и A' их проективными резольвентами X и X', мы получим отображение

$$\Phi_1 : (C \otimes_\Lambda X) \otimes (C' \otimes_\Gamma X') \longrightarrow (C \otimes C') \otimes_\Omega (X \otimes X').$$

Переходя к группам гомологий и применяя гомоморфизм α, мы получим гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}^\Lambda(C, A) \otimes \mathrm{Tor}^\Gamma(C', A') \longrightarrow H((C \otimes C') \otimes_\Omega (X \otimes X')).$$

Композиция этого гомоморфизма с гомоморфизмом (2) называется $\top$-умножением:

$$\top : \mathrm{Tor}^\Lambda(C, A) \otimes \mathrm{Tor}^\Gamma(C', A') \longrightarrow \mathrm{Tor}^\Omega(C \otimes C', A \otimes A').$$

Умножение $\top$, являясь гомоморфизмом нулевой степени, представляет собой систему отображений:

$$\boxed{\top : \mathrm{Tor}_p^\Lambda(C, A) \otimes \mathrm{Tor}_q^\Gamma(C', A') \longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^\Omega(C \otimes C', A \otimes A').}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.1. *Для $p = q = 0$ $\top$-умножение совпадает с гомоморфизмом φ_1.*

Для доказательства достаточно воспользоваться определением гомоморфизма $\top$ и пополняющими отображениями $X \to A$ и $X' \to A'$.

Рассмотрим теперь ситуацию $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', {}_\Gamma C')$. В этой ситуации группу $\mathrm{Hom}(C, C')$ можно определить как левый Ω-модуль, полагая

$$((\lambda \otimes \gamma) f) c = \gamma(f(c\lambda)), \qquad c \in C,\ f \in \mathrm{Hom}(C, C').$$

Мы определим гомоморфизм

$$\varphi_2 : \mathrm{Hom}_\Omega(A \otimes A', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C \otimes_\Lambda A, \mathrm{Hom}_\Gamma(A', C')),$$

полагая

$$((\varphi_2 f)(c \otimes a))a' = (f(a \otimes a'))c.$$

Заменяя модули A и A' их проективными резольвентами X и X', мы получим отображение

$$\Phi_2 : \mathrm{Hom}_\Omega(X \otimes X', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C \otimes_\Lambda X, \mathrm{Hom}_\Gamma(X', C')).$$

Переходя к группам гомологий и применяя гомоморфизм α', мы получим гомоморфизм

$$H(\mathrm{Hom}_\Omega(X \otimes X', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^\Lambda(C, A), \mathrm{Ext}_\Gamma(A', C')).$$

Композиция этого гомоморфизма с гомоморфизмом (2′) называется $\perp$-умножением:

$$\perp : \mathrm{Ext}_\Omega (A \otimes A', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^\Lambda (C, A), \mathrm{Ext}_\Gamma (A', C')).$$

Умножение $\perp$, являясь гомоморфизмом нулевой степени, представляет собой систему отображений

$$\boxed{\perp : \mathrm{Ext}_\Omega^{p+q}(A \otimes A', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_p^\Lambda(C, A), \mathrm{Ext}_\Gamma^q (A', C')).}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.2. *Для $p = q = 0$ $\perp$-умножение совпадает с гомоморфизмом φ_2.*

Остальные два умножения $\vee$ и $\wedge$ мы введем при следующих предположениях:

(i) алгебры Λ и Γ K-проективны;

(ii) $\mathrm{Tor}_n^K (A, A') = 0$ для всех $n > 0$.

Как следует из предложения 1.1, при этих предположениях гомоморфизмы (2) и (2′) являются изоморфизмами.

Рассмотрим сначала ситуацию $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Gamma A', {}_\Gamma C')$. В этой ситуации мы определим гомоморфизм

$$\varphi_3 : \mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) \otimes \mathrm{Hom}_\Gamma (A', C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Omega (A \otimes A', C \otimes C'),$$

полагая

$$(\varphi_3(f \otimes f'))(a \otimes a') = fa \otimes f'a'.$$

Заменяя модули A и A' их проективными резольвентами X и X', мы получим отображение

$$\Phi_3 : \mathrm{Hom}_\Lambda (X, C) \otimes \mathrm{Hom}_\Gamma (X', C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Omega (X \otimes X', C \otimes C').$$

Переходя к группам гомологий и применяя гомоморфизм α, мы получим гомоморфизм

$$\mathrm{Ext}_\Lambda (A, C) \otimes \mathrm{Ext}_\Gamma (A', C') \longrightarrow H(\mathrm{Hom}_\Omega (X \otimes X', C \otimes C')).$$

Композиция этого гомоморфизма с изоморфизмом, обратным к изоморфизму (2′), называется $\vee$-умножением:

$$\vee : \mathrm{Ext}_\Lambda (A, C) \otimes \mathrm{Ext}_\Gamma (A', C') \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Omega (A \otimes A', C \otimes C').$$

Умножение $\vee$, являясь гомоморфизмом нулевой степени, представляет собой систему отображений

$$\boxed{\vee : \mathrm{Ext}_\Lambda^p (A, C) \otimes \mathrm{Ext}_\Gamma^q (A', C') \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Omega^{p+q} (A \otimes A', C \otimes C').}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.3. *Для $p = q = 0$ $\vee$-умножение совпадает с гомоморфизмом φ_3.*

Рассмотрим, наконец, ситуацию $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Gamma A', C'_\Gamma)$. В этой ситуации группу $\mathrm{Hom}(C, C')$ можно определить как правый Ω-модуль, полагая

$$(f(\lambda \otimes \gamma))c = (f(\lambda c))\gamma, \qquad c \in C, f \in \mathrm{Hom}(C, C').$$

Мы определим гомоморфизм

$$\varphi_4 : \operatorname{Hom}(C, C') \otimes_\Omega (A \otimes A') \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_\Lambda(A, C), C' \otimes_\Gamma A'),$$

полагая

$$(\varphi_4(f \otimes a \otimes a'))g = f(ga) \otimes a',$$

где $f \in \operatorname{Hom}(C, C')$, $g \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C)$. Заменяя модули A и A' их проективными резольвентами X и X', мы получим отображение

$$\Phi_4 : \operatorname{Hom}(C, C') \otimes_\Omega (X \otimes X') \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C), C' \otimes_\Gamma X').$$

Переходя к группам гомологий и применяя гомоморфизм α', мы получим гомоморфизм

$$H(\operatorname{Hom}(C, C') \otimes_\Omega (X \otimes X')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_\Lambda(A, C), \operatorname{Tor}^\Gamma(C', A')).$$

Композиция этого гомоморфизма с изоморфизмом, обратным к изоморфизму (2), называется $\wedge$-умножением :

$$\wedge : \operatorname{Tor}^\Omega(\operatorname{Hom}(C, C'), A \otimes A') \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_\Lambda(A, C), \operatorname{Tor}^\Gamma(C', A')).$$

Умножение $\wedge$, являясь гомоморфизмом нулевой степени, представляет собой систему отображений

$$\boxed{\wedge : \operatorname{Tor}^\Omega_{p+q}(\operatorname{Hom}(C, C'), A \otimes A') \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, C), \operatorname{Tor}^\Gamma_q(C', A')).}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.4. *Для $p = q = 0$ $\wedge$-умножение совпадает с гомоморфизмом φ_4.*

Введенные нами обозначения для умножений удобны лишь до тех пор, пока мы не рассматриваем отдельных элементов групп Tor и Ext. В последнем же случае удобнее пользоваться следующими обозначениями :

$$\top(a \otimes b) = a \top b, \qquad (\perp a)\, b = a \perp b,$$
$$\vee(a \otimes b) = a \vee b, \qquad (\wedge a)\, b = a \wedge b.$$

Подчеркнем еще раз, что умножения $\vee$ и $\wedge$ определены лишь в предположении, что выполнены условия (i) и (ii).

2. ФОРМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЙ

Формальные свойства введенных умножений слишком многочисленны, чтобы мы могли их все здесь подробно рассмотреть. Ввиду этого мы ограничимся описанием лишь некоторых из этих свойств, опуская при этом большинство доказательств. Во всем дальнейшем следует иметь в виду, что всякий раз, когда мы имеем дело с умножениями $\vee$ и $\wedge$, предполагаются выполненными соответствующие условия, при которых эти умножения определены.

При фиксированных K-алгебрах Λ и Γ рассмотрим сначала произвольные отображения $A \to A_1$, $C \to C_1$, $A' \to A'_1$ и $C' \to C'_1$. Тогда для умножения $\top$ будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{\Lambda}(C, A) \otimes \mathrm{Tor}^{\Gamma}(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Omega}(C \otimes C', A \otimes A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}^{\Lambda}(C_1, A_1) \otimes \mathrm{Tor}^{\Gamma}(C_1', A_1') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Omega}(C_1 \otimes C_1', A_1 \otimes A_1') \end{array}$$

Далее мы рассмотрим произвольные гомоморфизмы K-алгебр $\varphi : \Lambda' \to \Lambda$ и $\psi : \Gamma' \to \Gamma$. С помощью этих гомоморфизмов любой Λ-модуль (соответственно Γ-модуль) можно рассматривать как Λ'-модуль (соответственно Γ'-модуль). При этом в ситуации $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', C'_\Gamma)$ будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{\Lambda'}(C, A) \otimes \mathrm{Tor}^{\Gamma'}(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Omega'}(C \otimes C', A \otimes A') \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_* \otimes \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi \otimes \psi)_*} \\ \mathrm{Tor}^{\Lambda}(C, A) \otimes \mathrm{Tor}^{\Gamma}(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Omega}(C \otimes C', A \otimes A') \end{array}$$

где $\varphi_* : \mathrm{Tor}^{\Lambda'} \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}$ и $\psi_* : \mathrm{Tor}^{\Gamma'} \to \mathrm{Tor}^{\Gamma}$ — отображения, индуцированные гомоморфизмами φ и ψ соответственно.

Вновь фиксируя K-алгебры Λ и Γ, рассмотрим произвольный кольцевой гомоморфизм $L \to K$, предполагая кольцо L коммутативным. Тогда кольца Λ и Γ можно рассматривать как L-алгебры, причем будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{\Lambda}(C, A) \otimes_L \mathrm{Tor}^{\Gamma}(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Lambda \otimes_L \Gamma}(C \otimes_L C', A \otimes_L A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}^{\Lambda}(C, A) \otimes_K \mathrm{Tor}^{\Gamma}(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^{\Lambda \otimes_K \Gamma}(C \otimes_K C', A \otimes_K A') \end{array}$$

Аналогичные диаграммы можно построить и для остальных трех умножений. Можно также рассматривать и более сложные случаи, когда одновременно задаются отображения модулей $A, C, \ldots$, алгебр Λ, Γ и основного кольца K.

Перейдем теперь к законам коммутативности. Формулируя эти законы, мы должны алгебру $\Omega = \Lambda \otimes \Gamma$ отождествлять с алгеброй $\Gamma \otimes \Lambda$ (см. предложение IX, 1.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, C) \otimes \mathrm{Tor}_q^{\Gamma}(A', C') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}_{p+q}^{\Omega}(A \otimes A', C \otimes C') \\ \downarrow{\scriptstyle (-1)^{pq} f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathrm{Tor}_q^{\Gamma}(A', C') \otimes \mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, C) & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}_{p+q}^{\Omega}(A' \otimes A, C' \otimes C) \end{array}$$

в которой f — изоморфизм, устанавливающий коммутативность тензорного произведения, а g — отображение, индуцированное аналогичными изоморфизмами $f_1 : A \otimes A' \to A' \otimes A$ и $f_2 : C \otimes C' \to C' \otimes C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что отображение $F_1 : X \otimes X' \to X' \otimes X$ над изоморфизмом f_1 можно определить формулой $F_1(x \otimes x') = (-1)^{pq}(x' \otimes x)$, где $x \in X_p$, $x' \in X'_q$.

Заменяя в приведенной диаграмме функтор Tor функтором Ext, мы получим закон коммутативности $\vee$-умножения.

Рассмотрим теперь законы ассоциативности, которых имеется шесть. Мы их сформулируем без доказательств. Для любых K-алгебр Λ, Γ, Σ мы будем через Ω обозначать алгебру $(\Lambda \otimes \Gamma) \otimes \Sigma = \Lambda \otimes (\Gamma \otimes \Sigma)$ (таким образом, тензорное умножение мы рассматриваем как ассоциативную операцию).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *В ситуации* $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', C'_\Gamma, {}_\Sigma A'', C''_\Sigma)$ *для любых элементов* $a \in \operatorname{Tor}_p^\Lambda(C, A)$, $b \in \operatorname{Tor}_q^\Gamma(C', A')$, $c \in \operatorname{Tor}_r^\Sigma(C'', A'')$

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2а. *В ситуации* $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Gamma A', {}_\Gamma C', {}_\Sigma A'', {}_\Sigma C'')$ *для любых элементов* $a \in \operatorname{Ext}_\Lambda^p(A, C)$, $b \in \operatorname{Ext}_\Gamma^q(A', C')$, $c \in \operatorname{Ext}_\Sigma^r(A'', C'')$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

При формулировке следующих двух законов ассоциативности мы группу $\operatorname{Hom}(C, \operatorname{Hom}(C', C''))$ будем отождествлять с группой $\operatorname{Hom}(C \otimes C', C'')$. Заметим, что в ситуациях $(C_\Lambda, C'_\Gamma, {}_\Sigma C'')$ и $({}_\Lambda C, {}_\Gamma C', C''_\Sigma)$ это отождествление согласовано с Ω-операторами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *В ситуации* $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', C_\Gamma, {}_\Sigma A'', {}_\Sigma C'')$ *для любых элементов* $a \in \operatorname{Ext}_\Omega^{p+q+r}(A \otimes A' \otimes A'', \operatorname{Hom}(C \otimes C', C''))$, $b \in \operatorname{Tor}_p^\Lambda(C, A)$, $c \in \operatorname{Tor}_q^\Gamma(C', A')$

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \perp c.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3а. *В ситуации* $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Gamma A', {}_\Gamma C', {}_\Sigma A'', {}_\Sigma C'')$ *для любых элементов* $a \in \operatorname{Tor}^\Omega_{p+q+r}(\operatorname{Hom}(C \otimes C', C''), A \otimes A' \otimes A'')$, $b \in \operatorname{Ext}_\Lambda^p(A, C)$, $c \in \operatorname{Ext}_\Gamma^q(A', C')$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Для формулировки последних двух законов ассоциативности нам понадобится естественный гомоморфизм

$$\xi : \operatorname{Hom}(C, C') \otimes C'' \longrightarrow \operatorname{Hom}(C, C' \otimes C''),$$

определяемый формулой

$$[\xi(f \otimes c'')]\, c = (fc) \otimes c''.$$

Очевидно, что в ситуациях $({}_\Lambda C, C'_\Gamma, C''_\Sigma)$ и $(C_\Lambda, {}_\Gamma C', {}_\Sigma C'')$ отображение ξ является Ω-гомоморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *В ситуации* $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Gamma A', C'_\Gamma, {}_\Sigma A'', C''_\Sigma)$ *для любых элементов* $a \in \mathrm{Tor}_{p+q}^{\Lambda\otimes\Gamma}(\mathrm{Hom}(C, C'), A \otimes A')$, $b \in \mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, C)$, $c \in \mathrm{Tor}^\Sigma_r(C'', A'')$

$$(a \wedge b) \top c = [\xi_* (a \top c)] \wedge b,$$

где

$$\xi_* : \mathrm{Tor}^\Omega_n (\mathrm{Hom}(C, C') \otimes C'', D) \longrightarrow \mathrm{Tor}^\Omega_n (\mathrm{Hom}(C, C' \otimes C''), D)$$

— *отображение, индуцированное гомоморфизмом* ξ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4a. *В ситуации* $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_\Gamma A', {}_\Gamma C', {}_\Sigma A'', {}_\Sigma C'')$ *для любых элементов* $a \in \mathrm{Ext}^{p+q}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A \otimes A', \mathrm{Hom}(C, C'))$, $b \in \mathrm{Tor}^\Lambda_p(C, A)$, $c \in \mathrm{Ext}^r_\Sigma(A'', C'')$

$$(a \perp b) \vee c = [\xi^*(a \vee c)] \perp b,$$

где

$$\xi^* : \mathrm{Ext}^n_\Omega (D, \mathrm{Hom}(C, C') \otimes C'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Omega (D, \mathrm{Hom}(C, C' \otimes C''))$$

— *отображение, индуцированное гомоморфизмом* ξ.

Рассмотрим теперь связывающие гомоморфизмы. Так как каждое из четырех умножений зависит от четырех аргументов, то имеют место шестнадцать законов перестановочности умножений со связывающими гомоморфизмами. Мы сформулируем лишь два из этих законов (законы перестановочности $\top$-умножения со связывающими гомоморфизмами, соответствующими аргументам A и A'); остальные законы совершенно аналогичны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если вместе с точной последовательностью*

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0 \tag{1}$$

точна последовательность

$$0 \longrightarrow A_1 \otimes A' \longrightarrow A \otimes A' \longrightarrow A_2 \otimes A' \longrightarrow 0, \tag{2}$$

то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}^\Lambda(C, A_2) \otimes \mathrm{Tor}^\Gamma(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^\Omega(C \otimes C', A_2 \otimes A') \\
\downarrow{\scriptstyle \delta\otimes i} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\
\mathrm{Tor}^\Lambda(C, A_1) \otimes \mathrm{Tor}^\Gamma(C', A') & \xrightarrow{\top} & \mathrm{Tor}^\Omega(C \otimes C', A_1 \otimes A')
\end{array}$$

в которой δ — *связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности* (1), Δ — *связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности* (2), *а* i — *тождественное отображение*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \to X_1 \to X \to X_2 \to 0$ — проективная резольвента точной последовательности $0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0$, а X' — проективная резольвента модуля A'. Коммутативность рассматриваемой диаграммы непосредственно вытекает из определения $\top$-умножения и коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
H_p(C \otimes_\Lambda X_2) \otimes H_q(C' \otimes_\Gamma X') & \longrightarrow & H_{p-1}(C \otimes_\Lambda X_1) \otimes H_q(C' \otimes_\Gamma X') \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
H_{p+q}((C \otimes_\Lambda X_2) \otimes (C' \otimes_\Gamma X')) & \longrightarrow & H_{p+q-1}((C \otimes_\Lambda X_1) \otimes (C' \otimes_\Gamma X')) \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_1} \\
H_{p+q}((C \otimes C') \otimes_\Omega (X_2 \otimes X')) & \longrightarrow & H_{p+q-1}((C \otimes C') \otimes_\Omega (X_1 \otimes X')) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Tor}^\Omega_{p+q}(C \otimes C', A_2 \otimes A') & \longrightarrow & \operatorname{Tor}^\Omega_{p+q-1}(C \otimes C', A_1 \otimes A')
\end{array}$$

верхний квадрат которой коммутативен в силу предложения IV, 7.1, средний квадрат — в силу естественности отображения Φ_1, а нижний квадрат — в силу предложения V, 4.3 (сформулированного для правых производных функторов).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5'. *Если вместе с точной последовательностью*

$$(1') \qquad 0 \longrightarrow A_1' \longrightarrow A' \longrightarrow A_2' \longrightarrow 0$$

точна последовательность

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow A \otimes A_1' \longrightarrow A \otimes A' \longrightarrow A \otimes A_2' \longrightarrow 0,$$

то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Tor}^\Lambda(C, A) \otimes \operatorname{Tor}^\Gamma(C', A_2') & \xrightarrow{\top} & \operatorname{Tor}^\Omega(C \otimes C', A \otimes A_2') \\
\downarrow{\scriptstyle i \otimes \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\
\operatorname{Tor}^\Lambda(C, A) \otimes \operatorname{Tor}^\Gamma(C', A_1') & \xrightarrow{\top} & \operatorname{Tor}^\Omega(C \otimes C', A \otimes A_1')
\end{array}$$

Заметим, что в определении отображения $i \otimes \delta$ участвует дополнительный знак, обусловленный тем, что связывающий гомоморфизм δ имеет степень $+1$. Ввиду этого $\Delta(a \top b) = (-1)^p a \top \delta b$ для любых элементов $a \in \operatorname{Tor}_p^\Lambda(C, A)$, $b \in \operatorname{Tor}_q^\Gamma(C', A_2')$.

3. ИЗОМОРФИЗМЫ

ТЕОРЕМА 3.1. *Если кольцо K полупросто, то отображения $\top$ и $\perp$ являются изоморфизмами. Если, кроме того, алгебры Λ и Γ нетеровы слева, то для любого левого Λ-модуля A с конечным числом образующих и любого левого Γ-модуля A' с конечным числом образующих отображения $\vee$ и $\wedge$ также являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что так как кольцо K полупросто, то условия (i) и (ii) из § 1 выполнены и, следовательно, гомоморфизмы 1, (2) и 1, (2') являются изоморфизмами. Кроме того, поскольку функторы $\otimes_K$ и Hom_K в рассматриваемом случае точны, гомоморфизмы α и α', согласно теореме IV, 7.2, также являются изоморфизмами.

Рассмотрим далее определенные в § 1 отображения

$$\varphi_1 : (C \otimes_\Lambda A) \otimes (C' \otimes_\Gamma A') \longrightarrow (C \otimes C') \otimes_\Omega (A \otimes A'),$$
$$\varphi_2 : \mathrm{Hom}_\Omega (A \otimes A', \mathrm{Hom}(C, C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C \otimes_\Lambda A, \mathrm{Hom}_\Gamma (A', C')).$$
$$\varphi_3 : \mathrm{Hom}_\Lambda (A, C) \otimes \mathrm{Hom}_\Gamma (A', C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Omega (A \otimes A', C \otimes C'),$$
$$\varphi_4 : \mathrm{Hom}(C, C') \otimes_\Omega (A \otimes A') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_\Lambda (A, C), C' \otimes_\Gamma A').$$

Легко видеть, что отображения φ_1, φ_2, а потому и отображения Φ_1, Φ_2, получающиеся при замене модулей A и A' их проективными резольвентами X и X', являются изоморфизмами. Поэтому отображения $\top$ и $\perp$ также являются изоморфизмами.

Отображения φ_3 и φ_4, очевидно, являются изоморфизмами, когда $A = \Lambda$ и $A' = \Gamma$. Поэтому, ввиду аддитивности рассматриваемых функторов, отображения φ_3 и φ_4 являются изоморфизмами и в случае, когда модули A и A' (над кольцами Λ и Γ соответственно) проективны и имеют конечное число образующих. С другой стороны, если алгебры Λ и Γ нетеровы слева, то, согласно предложению V, 1.3, для любых левых модулей A и A' с конечным числом образующих (над кольцами Λ и Γ соответственно) существуют проективные резольвенты X и X', однородные составляющие которых имеют конечное число образующих. Следовательно, соответствующие этим резольвентам отображения Φ_3 и Φ_4 также являются изоморфизмами. Тем самым теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если алгебры Λ и Γ K-проективны, то для любого левого Λ-модуля A и любого левого Γ-модуля A', для которых $\mathrm{Tor}_n^K (A, A') = 0$ при всех $n > 0$, имеет место неравенство*

$$\dim_{\Lambda\otimes\Gamma} (A \otimes A') \leq \dim_\Lambda A + \dim_\Gamma A'.$$

В случае когда кольцо K является полем, алгебры Λ и Γ нетеровы слева, а модули имеют конечное число образующих, это неравенство переходит в равенство[1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim_\Lambda A \leq m$ и $\dim_\Gamma A' \leq n$. Тогда существуют такая проективная резольвента X модуля A и такая проективная резольвента X' модуля A', что $X_p = 0$, если $p > m$, и $X'_q = 0$, если $q > n$. Согласно предложению 1.1, комплекс $X \otimes X'$ является $\Lambda \otimes \Gamma$-проективной резольвентой модуля $A \otimes A'$. С другой стороны, все однородные составляющие степеней $> n + m$ этой резольвенты равны нулю. Следовательно,

$$\dim_{\Lambda\otimes\Gamma} (A \otimes A') \leq m + n.$$

[1] Если K является полем, то $\mathrm{Tor}_n^K (A, A') = 0$ для любого $n > 0$ и любых модулей A и A'. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что выполнены все условия второго утверждения теоремы. Пусть $\dim_\Lambda A \geq m$ и $\dim_\Gamma A' \geq n$. Тогда существуют такие модули C и C', что $\operatorname{Ext}^m_\Lambda(A, C) \neq 0$ и $\operatorname{Ext}^n_\Gamma(A', C') \neq 0$. Так как кольцо K является полем, то и

$$\operatorname{Ext}^m_\Lambda(A, C) \otimes \operatorname{Ext}^n_\Gamma(A', C') \neq 0.$$

Но, согласно теореме 3.1, отображение $\vee$ в рассматриваемом случае является изоморфизмом. Таким образом, $\operatorname{Ext}^{m+n}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A \otimes A', C \otimes C') \neq 0$. Следовательно,

$$\dim_{\Lambda\otimes\Gamma}(A \otimes A') \geq m + n.$$

Рассмотрим теперь $\perp$- и $\wedge$-умножения в случае, когда $\Gamma = K = \Lambda'$ и, следовательно, когда $\Omega = \Lambda$, $\operatorname{Ext}_\Gamma(A', C') = \operatorname{Hom}(A', C') = C'$, $\operatorname{Tor}^\Gamma(C', A') = C'$. В этом случае умножения $\perp$ и $\wedge$ определены в ситуациях $({}_\Lambda A, C_\Lambda, {}_K C')$ и $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_K C')$ соответственно, причем

$$(1) \qquad \perp : \operatorname{Ext}_\Lambda(A, \operatorname{Hom}(C, C')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}^\Lambda(C, A), C'),$$

$$(2) \qquad \wedge : \operatorname{Tor}^\Lambda(\operatorname{Hom}(C, C'), A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_\Lambda(A, C), C').$$

Если, исходя из общего определения отображений $\perp$ и $\wedge$, внимательно проследить построение гомоморфизмов (1) и (2), основанное на рассмотрении произвольной Λ-проективной резольвенты модуля A (и самого кольца K в качестве своей собственной K-проективной резольвенты), то можно убедиться, что гомоморфизм (2) определен и для не K-проективных алгебр Λ. Кроме того, гомоморфизмы (1) и (2) представляют собой частные случаи определенных в § VI, 5 гомоморфизмов ϱ и σ соответственно. Ввиду этого из предложений VI, 5.1 и VI, 5.3 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Если модуль C' K-инъективен, то гомоморфизм* (1) *является изоморфизмом. Если, кроме того, алгебра Λ нетерова слева, а Λ-модуль A имеет конечное число образующих, то гомоморфизм* (2) *также является изоморфизмом.*

4. ВНУТРЕННИЕ УМНОЖЕНИЯ

Пусть теперь кольцо Λ коммутативно. Тогда его можно рассматривать как Λ-алгебру, причем $\Lambda \otimes_\Lambda \Lambda = \Lambda$. Поэтому умножения $\wedge$ и $\perp$ в этом случае сводятся к следующим *внутренним умножениям:*

$$\frown : \operatorname{Tor}^\Lambda(C, A) \otimes_\Lambda \operatorname{Tor}^\Lambda(C', A') \to \operatorname{Tor}^\Lambda(C \otimes_\Lambda C', A \otimes_\Lambda A'),$$

$$\smile : \operatorname{Ext}_\Lambda(A \otimes_\Lambda A', \operatorname{Hom}_\Lambda(C, C')) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Tor}^\Lambda(C, A), \operatorname{Ext}_\Lambda(A', C')),$$

определенным для любых Λ-модулей A, C, A', C'. Оба эти умножения являются Λ-гомоморфизмами.

Напомним, что в Λ-модулях $C \otimes_\Lambda C'$ и $\operatorname{Hom}_\Lambda (C, C')$ операторы из алгебры Λ действуют по формулам

$$\lambda(c \otimes c') = \lambda c \otimes c' = c \otimes \lambda c', \quad (\lambda f)\, c = \lambda(fc) = f(\lambda c).$$

Так как внутренние умножения $\frown$ и $\smile$ представляют собой специальные случаи определенных в § 1 умножений, то для них справедливы все формальные свойства, установленные в § 2.

Внутренние умножения другого типа можно построить уже для любой (не обязательно коммутативной) K-алгебры Λ в предположении, что задан некоторый гомоморфизм колец $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ (где $\Lambda \otimes \Lambda$ — тензорное произведение алгебр над кольцом K), который мы будем называть *диагональным отображением*. Отображение D индуцирует гомоморфизмы $\operatorname{Tor}_n^\Lambda \to \operatorname{Tor}_n^{\Lambda\otimes\Lambda}$ и $\operatorname{Ext}^n_{\Lambda\otimes\Lambda} \to \operatorname{Ext}^n_\Lambda$, композиции которых с $\vee$- и $\wedge$-умножениями

$$\smile : \operatorname{Ext}_\Lambda (A, C) \otimes \operatorname{Ext}_\Lambda (A', C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda (A \otimes A', C \otimes C'),$$

$$\frown : \operatorname{Tor}^\Lambda (\operatorname{Hom} (C, C'), A \otimes A') \longrightarrow \operatorname{Hom} (\operatorname{Ext}_\Lambda (A, C), \operatorname{Tor}^\Lambda (C', A'))$$

называются $\smile$- и *$\frown$-умножением* соответственно[1]. Оба эти умножения имеют смысл лишь тогда, когда алгебра Λ K-проективна и $\operatorname{Tor}_n^K (A, A') = 0$ для всех $n > 0$. $\smile$-умножение определено в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Lambda A', {}_\Lambda C')$, а $\frown$-умножение — в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, {}_\Lambda A', C'_\Lambda)$. Операторы из алгебры Λ на модулях $A \otimes A'$, $C \otimes C'$ и $\operatorname{Hom} (C, C')$ определяются как композиции диагонального отображения D с операторами из алгебры $\Lambda \otimes \Lambda$.

$\smile$- и $\frown$-умножения удовлетворяют тем же законам перестановочности со связывающими гомоморфизмами, как и $\vee$- и $\wedge$-умножения. Остальные формальные свойства для $\smile$- и $\frown$-умножений имеют место лишь при определенных условиях, которым должно удовлетворять диагональное отображение $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$. Например, мы будем говорить, что диагональное отображение D *коммутативно*, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \Lambda \otimes \Lambda \arrow[dd, "\tau"] \\
\Lambda \arrow[ur, "D"] \arrow[dr, "D"'] & \\
& \Lambda \otimes \Lambda
\end{tikzcd}$$

где $\tau(\lambda \otimes \lambda') = \lambda' \otimes \lambda$. Если диагональное отображение D коммутативно, то имеет место закон перестановочности:

(1) $$a \smile b = (-1)^{pq}\, b \smile a$$

для любых $a \in \operatorname{Ext}^p_\Lambda (A, C)$, $b \in \operatorname{Ext}^q_\Lambda (A', C')$.

---

[1] В оригинале используются также термины «cup-product» и «cap-product» соответственно. — *Прим. перев.*

Диагональное отображение D называется *ассоциативным*, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "D \otimes \Lambda"] & (\Lambda \otimes \Lambda) \otimes \Lambda \arrow[d, "\mu"] \\ \Lambda \arrow[ur, "D"] \arrow[dr, "D"'] & & \\ & \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\Lambda \otimes D"] & \Lambda \otimes (\Lambda \otimes \Lambda) \end{tikzcd}$$

где $\mu((\lambda \otimes \lambda') \otimes \lambda'') = \lambda \otimes (\lambda' \otimes \lambda'')$. В этом случае имеют место закон ассоциативности $(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c)$, аналогичный закону ассоциативности, сформулированному в предложении 2.2а, и закон ассоциативности $a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \frown c$, аналогичный закону ассоциативности, сформулированному в предложении 2.3а.

Точно сформулировать и доказать эти формальные свойства умножений $\smile$ и $\frown$ мы предоставляем читателю.

Λ-гомоморфизмы

$$C \otimes C' \longrightarrow B \qquad ({}_\Lambda B, {}_\Lambda C, {}_\Lambda C')$$

мы будем называть также *$\smile$-спариваниями*. Задание $\smile$-спаривания позволяет с помощью $\smile$-умножения определить отображение

$$\smile : \operatorname{Ext}_\Lambda (A, C) \otimes \operatorname{Ext}_\Lambda (A', C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda (A \otimes A', B).$$

Λ-гомоморфизмы

$$B \longrightarrow \operatorname{Hom} (C, C') \qquad (B_\Lambda, {}_\Lambda C, C'_\Lambda)$$

мы будем называть также *$\frown$-спариваниями*. Задание $\frown$-спаривания позволяет с помощью $\frown$-умножения определить отображение

$$\frown : \operatorname{Tor}^\Lambda (B, A \otimes A') \longrightarrow \operatorname{Hom} (\operatorname{Ext}_\Lambda (A, C), \operatorname{Tor}^\Lambda (C', A')).$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ УМНОЖЕНИЙ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о вычислении умножений с помощью специальным образом подобранных проективных резольвент модулей A, A' и $A \otimes A'$. Излагаемый здесь метод используется в дальнейшем в некоторых специальных случаях для доказательства так называемых «формул умножения».

Пусть X — произвольная Λ-проективная резольвента модуля A, X' — произвольная Γ-проективная резольвента модуля A' и Y — произвольная Ω-проективная резольвента модуля $A \otimes A'$.

Начнем с умножений $\top$ и $\perp$. Согласно их определений, гомоморфизмы $\top$ и $\perp$ можно представить в виде следующих сквозных отображений :

$$H(C \otimes_\Lambda X) \otimes H(C' \otimes_\Gamma X') \xrightarrow{\Phi_1 a} H((C \otimes C') \otimes_\Omega (X \otimes X')) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H((C \otimes C') \otimes_\Omega Y),$$

$$H(\operatorname{Hom}_\Omega(Y, D)) \longrightarrow H(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', D)) \xrightarrow{\alpha'\Phi_2}$$
$$\xrightarrow{\alpha'\Phi_2} \operatorname{Hom}(H(C \otimes_\Lambda X), H(\operatorname{Hom}_\Gamma(X', C'))),$$

где $D = \operatorname{Hom}(C, C')$. Отображения $\Phi_1\alpha$ и $\alpha'\Phi_2$ нам известны «в явном виде». Существование остальных двух отображений обеспечивается тем, что тензорное произведение $X \otimes X'$ является Ω-проективным левым комплексом над модулем $A \otimes A'$. Для явного описания этих отображений необходимо иметь явное описание хотя бы одного Ω-отображения

(1) $$f: X \otimes X' \longrightarrow Y$$

над тождественным отображением модуля $A \otimes A'$.

Аналогичное положение имеет место и для умножений $\vee$ и $\wedge$. Эти умножения также можно представить в виде сквозных отображений

$$H(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C)) \otimes H(\operatorname{Hom}_\Gamma(X', C')) \xrightarrow{\Phi_3\alpha} H(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', C \otimes C')) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H(\operatorname{Hom}_\Omega(Y, C \otimes C')),$$

$$H(D \otimes_\Omega Y) \longrightarrow H(D \otimes_\Omega (X \otimes X')) \xrightarrow{\alpha'\Phi_4}$$
$$\xrightarrow{\alpha'\Phi_4} \operatorname{Hom}(H(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C)), H(C' \otimes_\Gamma X')),$$

где $D = \operatorname{Hom}(C, C')$. Поэтому, для того чтобы найти их явное выражение, необходимо иметь явное описание хотя бы одного Ω-отображения

(2) $$g: Y \longrightarrow X \otimes X'$$

над тождественным отображением модуля $A \otimes A'$.

Прежде чем дать общий метод построения отображений f и g, нам следует более детально рассмотреть различные возможности построения резольвент X, X' и Y.

Резольвента X модуля A на практике всегда строится не как Λ-проективный, а как Λ-свободный комплекс. Каждую однородную составляющую X_n такой резольвенты можно представить в виде $X_n = \Lambda \otimes \widetilde{X}_n$, где $\widetilde{X}_n$ — некоторый свободный K-модуль. Фактически все проективные резольвенты, как те, с которыми мы встречались до сих пор, так и те, с которыми мы встретимся позже, имеют вид $X = \Lambda \otimes \widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — некоторый градуированный K-модуль. Модуль $\widetilde{X}$ можно, очевидно, рассматривать как K-подмодуль (но не как подкомплекс) резольвенты X. Резольвенты X описанного вида мы будем называть *расщепленными*. Аналогичное положение имеет место, конечно, и для резольвент X' и Y. Заметим, что тензорное произведение $X \otimes X'$ расщепленных резольвент $X = \Lambda \otimes \widetilde{X}$ и $X' = \Gamma \otimes \widetilde{X}'$ также является расщепленной резольвентой: $X \otimes X' = \Omega \otimes \widetilde{X} \otimes \widetilde{X}'$.

Другим понятием, которое нам здесь понадобится, является понятие *стягивающей гомотопии*. Стягивающей гомотопией левого комплекса X над модулем A называется семейство $\{s_n, \sigma\}$ таких K-гомоморфизмов

$$\sigma : A \longrightarrow X_0, \quad s_n : X_n \longrightarrow X_{n+1},$$

что

$$d_{n+1}s_n x + s_{n-1}d_n x = x - \sigma\varepsilon x \text{ для любого } x \in X_n,$$
$$\varepsilon\sigma x = x \text{ для любого } x \in A,$$

где $\varepsilon : X_0 \to A$ — пополняющее отображение[1]. Левый комплекс X над модулем A, обладающий стягивающей гомотопией, очевидно, ацикличен. Обратно, если X является ацикличным левым комплексом над модулем A, то имеет место точная последовательность

(X)[2] $$\ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

и потому в случае, когда модули X и A K-проективны, мы можем рассматривать ее как проективную резольвенту нулевого модуля. Отсюда в силу предложения V, 1.2 вытекает, что тождественное отображение последовательности (X) гомотопно ее нулевому отображению. Соответствующая гомотопия является, очевидно, стягивающей гомотопией комплекса X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если алгебра Λ K-проективна, то для любой Λ-проективной резольвенты K-проективного Λ-модуля A существует по крайней мере одна стягивающая гомотопия.*

Действительно, ввиду того, что алгебра Λ K-проективна, любая Λ-проективная резольвента X модуля A является, согласно предложению II, 6.2, K-проективным комплексом. Поэтому предложение 5.1 непосредственно вытекает из только что сделанного замечания.

Заметим, что стягивающая гомотопия $\{s_n, \sigma\}$ комплекса X и стягивающая гомотопия $\{s'_n, \sigma'\}$ комплекса X' определяют по формулам

$$\tau = \sigma \otimes \sigma',$$
$$t = s \otimes i' + (\sigma\varepsilon) \otimes s',$$

где i' — тождественное отображение комплекса X', стягивающую гомотопию $\{t_n, \tau\}$ комплекса $X \otimes X'$.

Значение введенных выше понятий выясняется следующим предложением:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть $Z = \Omega \otimes \tilde{Z}$ — расщепленный левый комплекс над левым Ω-модулем C и Z' — левый комплекс над*

[1] Отображение s_{-1} считается нулевым; кроме того, отображение ε рассматривается как отображение комплексов $X \to A$, равное нулю на всех однородных элементах положительной степени. — *Прим. ред.*

[2] В оригинале эта последовательность значится под номером (3). — *Прим. перев.*

модулем C, обладающий стягивающей гомотопией $\{t_n, \tau\}$. Тогда индуктивная формула

$$f(\omega \otimes z) = \omega\tau\varepsilon z, \qquad z \in \widetilde{Z}_0,$$
$$f(\omega \otimes z) = \omega t_{q-1} f dz, \qquad z \in \widetilde{Z}_q,\ q > 0,$$

определяет некоторое отображение

$$f: Z \longrightarrow Z'$$

над тождественным отображением модуля C. Это отображение однозначно характеризуется соотношением

$$dtfz = 0, \qquad z \in \widetilde{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение f является, очевидно, Ω-гомоморфизмом. Если $z \in \widetilde{Z}_0$, то

$$\varepsilon' f(\omega \otimes z) = \omega\varepsilon'\tau\varepsilon z = \omega\varepsilon z = \varepsilon(\omega \otimes z),$$

так что $\varepsilon' f = \varepsilon$. Если $z \in \widetilde{Z}_1$, то

$$df(\omega \otimes z) = \omega dtfdz = \omega f dz - \omega\tau\varepsilon' f dz = fd(\omega \otimes z) - \omega\tau\varepsilon dz = fd(\omega \otimes z).$$

Пусть уже показано, что $df = fd$ на всех однородных составляющих комплекса Z степеней, меньших q, где $q > 1$. Тогда для любого элемента $z \in \widetilde{Z}_q$

$$df(\omega \otimes z) = \omega dtfdz = \omega f dz - \omega t d f dz = fd(\omega \otimes z) - \omega t f d d z = fd(\omega \otimes z).$$

Тем самым доказано, что гомоморфизм f является отображением комплексов над тождественным отображением модуля C.

Для любого отображения комплексов $f: Z \to Z'$ над тождественным отображением модуля C выполняются соотношения

$$fz = \tau\varepsilon z + dtfz, \qquad z \in \widetilde{Z}_0,$$
$$fz = tdfz + dtfz = tfdz + dtfz, \qquad z \in \widetilde{Z}_q,\ q > 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что отображение f тогда и только тогда совпадает с только что определенным отображением, когда $dtfz = 0$ для любого $z \in \widetilde{Z}$.

Вернемся теперь к построению отображений (1) и (2). При построении отображения $f: X \otimes X' \to Y$ мы будем предполагать, что резольвенты X и X' расщеплены и что в резольвенте Y задана некоторая стягивающая гомотопия. В этом случае, поскольку комплекс $X \otimes X'$ также расщеплен, построение отображения f мы можем осуществить, опираясь на предложение 5.2.

При построении отображения $g: Y \to X \otimes X'$ мы будем предполагать, что резольвента Y расщеплена и что в резольвентах X и X' заданы некоторые стягивающие гомотопии. Тогда, как было отмечено выше, в комплексе $X \otimes X'$ естественным образом определяется стягивающая гомотопия и потому для построения отображения g также можно воспользоваться предложением 5.2.

Предполагая теперь кольцо Λ коммутативным, рассмотрим внутренние умножения $\frown$ и $\smile$. Для вычисления этих умножений необходимо знать хотя бы одно Λ-отображение

$$h : X \otimes_\Lambda X' \longrightarrow Y \tag{3}$$

над тождественным отображением модуля $A \otimes_\Lambda A'$, где X, X' и Y — некоторые Λ-проективные резольвенты модулей A, A' и $A \otimes_\Lambda A'$ соответственно. Если резольвенты X и X' расщеплены, $X = \Lambda \otimes \widetilde{X}$, $X' = \Lambda \otimes \widetilde{X}'$, и в резольвенте Y выбрана стягивающая гомотопия, то, поскольку комплекс $X \otimes_\Lambda X' = \Lambda \otimes \widetilde{X} \otimes \widetilde{X}'$ также расщеплен, для построения отображения h можно снова воспользоваться предложением 5.2.

Рассмотрим, наконец, $\smile$- и $\frown$-умножения, соответствующие некоторому диагональному отображению $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$. Для вычисления этих умножений необходимо знать хотя бы одно отображение

$$j : Y \to X \otimes X' \tag{4}$$

над тождественным отображением модуля $A \otimes A'$, где X, X' и Y — некоторые Λ-проективные резольвенты модулей A, A' и $A \otimes A'$ соответственно (Λ-операторы в модулях $A \otimes A'$ и $X \otimes X'$ задаются с помощью диагонального отображения D). Как и выше, если резольвента Y расщеплена и в резольвентах X и X', а потому и в комплексе $X \otimes X'$ выбраны стягивающие гомотопии, то для построения отображения j можно воспользоваться предложением 5.2.

6. УМНОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ХОХШИЛЬДА

Пусть Λ и Γ — произвольные K-алгебры, а $\Lambda \otimes_K \Gamma$ — их тензорное произведение. Тогда

$$(\Lambda \otimes \Gamma)^e = (\Lambda \otimes \Gamma) \otimes (\Lambda \otimes \Gamma)^* \approx \Lambda \otimes \Gamma \otimes \Lambda^* \otimes \Gamma^* \approx \Lambda^e \otimes \Gamma^e,$$

где все тензорные произведения берутся над кольцом K. Таким образом, алгебру $(\Lambda \otimes \Gamma)^e$ можно отождествить с алгеброй $\Lambda^e \otimes \Gamma^e$. Произведя это отождествление, мы можем изложенные в § 1 конструкции применить вместо случая $(\Lambda, \Gamma, A, A', C, C')$ к случаю $(\Lambda^e, \Gamma^e, \Lambda, \Gamma, A, A')$, заменяя при этом алгебру Ω алгеброй $(\Lambda \otimes \Gamma)^e$. В результате мы получим умножения

$$\top : H_p(\Lambda, A) \otimes H_q(\Gamma, A') \longrightarrow H_{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, A \otimes A'),$$
$$\perp : H^{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, \operatorname{Hom}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p(\Lambda, A), H^q(\Gamma, A')),$$
$$\vee : H^p(\Lambda, A) \otimes H^q(\Gamma, A') \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, A \otimes A'),$$
$$\wedge : H_{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, \operatorname{Hom}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, A), H_q(\Gamma, A')),$$

где $\otimes = \otimes_K$, $\operatorname{Hom} = \operatorname{Hom}_K$, A — произвольный двусторонний Λ-модуль, A' — произвольный двусторонний Γ-модуль, а $A \otimes A'$

и $\operatorname{Hom}(A, A')$ — двусторонние $\Lambda \otimes \Gamma$-модули, $\Lambda \otimes \Gamma$-операторы на которых определены формулами

$$(\lambda_1 \otimes \gamma_1)(a \otimes a')(\lambda_2 \otimes \gamma_2) = \lambda_1 a \lambda_2 \otimes \gamma_1 a' \gamma_2,$$
$$[(\lambda_1 \otimes \gamma_1) f(\lambda_2 \otimes \gamma_2)]\, a = \gamma_1 [f(\lambda_2 a \lambda_1)]\gamma_2.$$

Каждое из этих четырех умножений является K-гомоморфизмом. Умножения $\top$ и $\perp$ определены всегда, а умножения $\vee$ и $\wedge$ — лишь при выполнении условий (i) и (ii) из § 1, которые в рассматриваемом случае принимают следующий вид: (i) алгебры Λ^e и Γ^e K-проективны; (ii) $\operatorname{Tor}_n^K(\Lambda, \Gamma) = 0$ для всех $n > 0$. Очевидно, что оба эти условия заведомо выполнены, если алгебры Λ и Γ K-проективны. В связи с этим, рассматривая умножения $\vee$ и $\wedge$, мы всегда будем предполагать, что алгебры Λ и Γ K-проективны.

Все формальные свойства умножений, установленные в § 2, остаются здесь справедливыми без каких-либо изменений. Остаются справедливыми и все результаты § 3. Заметим, кстати, что предложение IX, 7.4 оказывается при этом непосредственным следствием теоремы 3.2. Более того, доказательство этого предложения по существу неявно использует $\vee$-умножение и фактически основывается на тех же соображениях, что и доказательство теорем 3.1 и 3.2.

Перейдем теперь к внутренним умножениям. Пусть Λ — произвольная коммутативная K-алгебра. Тогда алгебра Λ^e также коммутативна и $\Lambda \otimes_{\Lambda^e} \Lambda = \Lambda$. Введенные в § 4 умножения $\frown$ и $\smile$ в рассматриваемом случае принимают следующий вид:

$$\frown : H_p(\Lambda, A) \otimes_{\Lambda^e} H_q(\Lambda, A') \longrightarrow H_{p+q}(\Lambda, A \otimes_{\Lambda^e} A'),$$
$$\smile : H^{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(H_p(\Lambda, A), H^q(\Lambda, A')),$$

где A и A' — произвольные двусторонние Λ-модули, а $A \otimes_{\Lambda^e} A'$ и $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(A, A')$ — двусторонние Λ-модули, Λ-операторы на которых определены формулами

$$\lambda(a \otimes a')\lambda' = \lambda a \otimes a'\lambda',$$
$$(\lambda f \lambda')a = \lambda[f(a\lambda')].$$

Оба умножения $\frown$ и $\smile$ являются Λ^e-гомоморфизмами.

В случае $\smile$- и $\frown$-умножений мы будем рассматривать K-проективную K-алгебру Λ вместе с некоторым гомоморфизмом K-алгебр $D : \Lambda \to \Lambda \otimes_K \Lambda$, который мы будем называть диагональным отображением. Так как отображение D индуцирует, очевидно, некоторый гомоморфизм K-алгебр $D^e : \Lambda^e \to (\Lambda \otimes_K \Lambda)^e$, то мы можем построить умножения

$$\smile : H^p(\Lambda, A) \otimes H^q(\Lambda, A') \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda, A \otimes A'),$$
$$\frown : H_{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, A), H_q(\Lambda, A')),$$

где A и A' — произвольные двусторонние Λ-модули, а $A \otimes \Lambda'$ и $\operatorname{Hom}(A, A')$ — двусторонние Λ-модули, на которых операторы из алгебры Λ определяются как композиции диагонального отображения D с операторами из алгебры $\Lambda \otimes \Lambda$. Как и в случае $\vee$- и $\wedge$-умножений, мы здесь через $\otimes$ и Hom обозначаем операции $\otimes_K$ и Hom_K соответственно. Ввиду этого $\smile$- и $\frown$-умножения являются K-гомоморфизмами.

Переходя теперь к вопросу о вычислении умножений с помощью комплексов, начнем с рассмотрения нормализованных стандартных комплексов $N(\Lambda)$, $N(\Gamma)$, $N(\Lambda \otimes \Gamma)$. Мы будем предполагать, что модули Λ, Γ, $\mathrm{Coker}\,(K \to \Lambda)$, $\mathrm{Coker}\,(K \to \Gamma)$, а следовательно, и модуль $\mathrm{Coker}\,(K \to \Lambda \otimes \Gamma)$ K-проективны. В этом случае все указанные выше нормализованные стандартные комплексы являются проективными резольвентами соответствующих модулей.

Для вычислений умножений $\top$ и $\perp$ мы должны знать хотя бы одно отображение

$$f : N(\Lambda) \otimes N(\Gamma) \longrightarrow N(\Lambda \otimes \Gamma)$$

над тождественным отображением модуля $\Lambda \otimes \Gamma$. Так как стандартные комплексы по определению расщеплены и так как при построении каждого стандартного комплекса попутно строится вполне определенная стягивающая гомотопия этого комплекса, то для задания отображения f можно воспользоваться описанным в § 5 методом. Однако мы предпочтем отображение f определить сначала с помощью явной формулы ; затем мы покажем, что так определенное отображение удовлетворяет индуктивному определению, изложенному в предложении 5.2. Рассмотрим элементы

$$a = [\lambda_1, \ldots, \lambda_p], \quad b = [\gamma_1, \ldots, \gamma_q]$$

модулей $N_p(\Lambda)$ и $N_q(\Gamma)$ соответственно. Если $p = 0$, то элемент $a = [\lambda_1, \ldots, \lambda_p]$ представляет собой единицу кольца $N_0(\Lambda) = \Lambda^e$; аналогичное обстоятельство имеет место в случае, когда $q = 0$. Положим

$$(1) \qquad f(a \otimes b) = \sum{}' \pm [\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q}],$$

где суммирование распространено на всевозможные перестановки $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q}$ элементов $\lambda_1 \otimes 1, \ldots, \lambda_p \otimes 1, 1 \otimes \gamma_1, \ldots, 1 \otimes \gamma_q$, в которых как элементы $\lambda_1 \otimes 1, \ldots, \lambda_p \otimes 1$, так и элементы $1 \otimes \gamma_1, \ldots$ $\ldots, 1 \otimes \gamma_q$ сохраняют естественный порядок следования. Знак «+» соответствует четным, а знак «—» нечетным перестановкам. Отображение f по линейности продолжается до некоторого отображения всего $(\Lambda \otimes \Gamma)^e$-модуля $N_p(\Lambda) \otimes N_q(\Gamma)$ [ср. Eilenberg S., MacLane S., *Ann. of Math.*, **58** (1953)]. Для того чтобы сравнить так определенное отображение с отображением, определенным по индукции, напомним, что $[\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q}] = s(\zeta_1[\zeta_2, \ldots, \zeta_{p+q}])$, где s — стягивающая гомотопия комплекса $N(\Lambda \otimes \Gamma)$. Рассматривая отдельно оба возможных случая (когда $\zeta_1 = \lambda_1 \otimes 1$ и когда $\zeta_1 = 1 \otimes \gamma_1$), мы без труда получим отсюда, что для $p > 0$, $q > 0$

$$(2) \qquad f(a \otimes b) = s\{(\lambda_1 \otimes 1)\, f(a_1 \otimes b) + (-1)^p (1 \otimes \gamma_1)\, f(a \otimes b_1)\},$$

где $a_1 = [\lambda_2, \ldots, \lambda_p]$ и $b_1 = [\gamma_2, \ldots, \gamma_q]$. Если $p = 0$, то

$$f(1 \otimes b) = [1 \otimes \gamma_1, \ldots, 1 \otimes \gamma_q],$$

если же $q = 0$, то

$$f(a \otimes 1) = [\lambda_1 \otimes 1, \ldots, \lambda_p \otimes 1].$$

Чтобы доказать, что определенное выше отображение f совпадает с отображением, определенным индуктивной формулой, указанной в предложении 5.2, достаточно показать, что $f(a \otimes b) = sfd(a \otimes b)$. С этой целью напомним, что в комплексе $N(\Lambda \otimes \Gamma)$ стягивающая гомотопия s равна нулю на всех элементах вида $[\omega_1, \ldots, \omega_k]\,\omega$, т. е. на элементах, не имеющих впереди себя операторов. Поскольку формула, определяющая отображение f, никаких операторов не содержит, отсюда следует, что при вычислении выражения $sfd(a \otimes b)$ мы можем элемент $d(a \otimes b)$ заменить элементом $\lambda_1 a_1 \otimes b + (-1)^p a \otimes \gamma_1 b_1$ (предполагается, что $p > 0$, $q > 0$). Остается указать, что после такой замены элемент $sfd(a \otimes b)$ в точности совпадет с правой частью формулы (2). В случаях, когда $p = 0$ или $q = 0$, эти рассуждения только упрощаются.

Для вычисления умножений $\vee$ и $\wedge$ мы должны знать хотя бы одно отображение

$$g : N(\Lambda \otimes \Gamma) \longrightarrow N(\Lambda) \otimes N(\Gamma)$$

над тождественным отображением модуля $\Lambda \otimes \Gamma$. Такое отображение может быть определено формулой

(3) $$g(\lambda_1 \otimes \gamma_1, \ldots, \lambda_n \otimes \gamma_n) = \\ = \sum_{0 \le p \le n} [\lambda_1, \ldots, \lambda_p]\, \lambda_{p+1} \ldots \lambda_n \otimes \gamma_1 \ldots \gamma_p\, [\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_n].$$

Проверка того, что так определенное отображение совпадает с отображением, определенным указанной в предложении 5.2 индуктивной формулой с помощью стандартного расщепления и стандартной стягивающей гомотопии, проводится совершенно так же, как и выше. Детальное ее проведение мы оставляем читателю.

Для вычисления умножений $\pitchfork$ и $\Cup$ в случае, когда алгебра Λ коммутативна, мы должны знать хотя бы одно отображение

$$h : N(\Lambda) \otimes_{\Lambda^e} N(\Lambda) \longrightarrow N(\Lambda)$$

над тождественным отображением модуля Λ. Такое отображение определяется формулой

$$h(a \otimes_{\Lambda^e} b) = \sum \pm [\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q}],$$

где

$$a = [\lambda_1, \ldots, \lambda_p], \quad b = [\lambda'_1, \ldots, \lambda'_q],$$

а $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q}$ — произвольная перестановка элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_q$, сохраняющая порядок следования как элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, так и элементов $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_q$. Знак «+» соответствует четным, а знак «—» — нечетным перестановкам.

Для умножений $\smile$ и $\frown$, зависящих от выбора диагонального отображения D, нельзя указать явной формулы, во всяком случае до тех пор, пока мы в явном виде не зададим отображение D.

До сих пор мы пользовались лишь нормализованными стандартными комплексами. Однако описанный в § 5 метод применим для построения отображений f, g, h также и в случае ненормализованных стандартных комплексов. Естественно, что окончательные формулы получаются в этом случае значительно более громоздкими. В связи с этим весьма удивительно, что формулы, определяющие отображения f, g, h в случае нормализованных стандартных комплексов, имеют смысл и определяют некоторые отображения, перестановочные с дифференциальными операторами, и в случае ненормализованных стандартных комплексов. Эти отображения, однако, уже не совпадают с отображениями, получающимися индуктивным приемом, описанным в предложении 5.2. Мы не располагаем никаким рациональным объяснением этого феномена.

7. УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ДОПОЛНЕННЫХ АЛГЕБР

Пусть Λ и Γ — дополненные K-алгебры с пополняющими гомоморфизмами $\varepsilon_\Lambda : \Lambda \to K$ и $\varepsilon_\Gamma : \Gamma \to K$ соответственно. Их тензорное произведение $\Lambda \otimes_K \Gamma$ также является дополненной алгеброй с пополняющим гомоморфизмом

$$\varepsilon(\lambda \otimes \gamma) = (\varepsilon_\Lambda \lambda)(\varepsilon_\Gamma \gamma).$$

Заменив в определениях § 1 модули A и A' кольцом K, мы в ситуации $(A_\Lambda, A'_\Gamma, {}_\Gamma C')$ получим умножения

$$\top : \operatorname{Tor}_p^\Lambda(A, K) \otimes \operatorname{Tor}_q^\Gamma(A', K) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+q}^{\Lambda\otimes\Gamma}(A \otimes A', K),$$
$$\perp : \operatorname{Ext}^{p+q}_{\Lambda\otimes\Gamma}(K, \operatorname{Hom}(A, C')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}_p^\Lambda(A, K), \operatorname{Ext}^q_\Gamma(K, C')).$$

Если алгебры Λ и Γ, а потому и алгебра $\Lambda \otimes \Gamma$ K-проективны, то мы можем перейти к гомологическим обозначениям:

$$\top : H_p(\Lambda, A) \otimes H_q(\Gamma, A') \longrightarrow H_{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, A \otimes A'),$$
$$\perp : H^{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, \operatorname{Hom}(A, C')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p(\Lambda, A), H^q(\Gamma, C')).$$

Если алгебры Λ и Γ K-проективны, то в ситуации $({}_\Lambda C, A'_\Gamma, {}_\Gamma C')$ определены умножения

$$\vee : H^p(\Lambda, C) \otimes H^q(\Gamma, C') \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, C \otimes C'),$$
$$\wedge : H_{p+q}(\Lambda \otimes \Gamma, \operatorname{Hom}(C, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, C), H_q(\Gamma, A')).$$

Если алгебра Λ коммутативна, то определены внутренние умножения $\pitchfork$ и Ψ, которые в случае, когда алгебра Λ K-проективна, являются Λ-гомоморфизмами:

$$\pitchfork : H_p(\Lambda, A) \otimes_\Lambda H_q(\Lambda, A') \longrightarrow H_{p+q}(\Lambda, A \otimes_\Lambda A'),$$
$$\Psi : H^{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}_\Lambda(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(H_p(\Lambda, A), H^q(\Lambda, A')).$$

Наконец, если задано диагональное отображение $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$, то определены умножения $\smile$ и $\frown$. При этом мы должны требовать, чтобы отображение D было согласовано с пополняющим гомоморфизмом ε в том смысле, чтобы были коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& \Lambda \otimes \Lambda \arrow[dd, "\varepsilon \otimes \Lambda"] \\
\Lambda \arrow[ur, "D"] \arrow[dr, "i_1"'] & \\
& K \otimes \Lambda
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& \Lambda \otimes \Lambda \arrow[dd, "\Lambda \otimes \varepsilon"] \\
\Lambda \arrow[ur, "D"] \arrow[dr, "i_2"'] & \\
& \Lambda \otimes K
\end{tikzcd}$$

где $i_1\lambda = 1 \otimes \lambda$ и $i_2\lambda = \lambda \otimes 1$. После естественных отождествлений алгебры Λ с каждой из алгебр $K \otimes \Lambda$ и $\Lambda \otimes K$ отображения i_1 и i_2 превращаются в тождественные отображения, а условие коммутативности указанных диаграмм принимает следующий вид:

композиции $(\varepsilon \otimes \Lambda)\, D$ и $(\Lambda \otimes \varepsilon)\, D$ являются тождественными отображениями.

Из этого условия, налагаемого на диагональное отображение D, вытекает, что после естественных отождествлений произвольного (левого или правого) Λ-модуля A с модулями $K \otimes A$ и $A \otimes K$ соответственно Λ-операторы, определенные на модуле A, совпадут с Λ-операторами, определенными с помощью диагонального отображения D на модулях $K \otimes A$ и $A \otimes K$. Таким образом, мы можем, в частности, модуль K отождествлять с модулем $K \otimes K$. В результате мы приходим к умножениям

$$\smile : H^p(\Lambda, C) \otimes H^q(\Lambda, C') \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda, C \otimes C'),$$

$$\frown : H_{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}(C, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, C), H_q(\Lambda, A')).$$

Рассмотренные умножения вычисляются аналогично умножениям, изученным в предыдущем параграфе; следует лишь комплексы $N(\Lambda)$ заменить комплексами $N(\Lambda, \varepsilon)$. При этом формулы для отображений

$$f : N(\Lambda, \varepsilon_\Lambda) \otimes N(\Gamma, \varepsilon_\Gamma) \longrightarrow N(\Lambda \otimes \Gamma, \varepsilon),$$

$h : N(\Lambda, \varepsilon) \otimes_\Lambda N(\Lambda, \varepsilon) \longrightarrow N(\Lambda, \varepsilon)$ (алгебра Λ коммутативна) остаются без изменения, а формула для отображения

$$g : N(\Lambda \otimes \Gamma, \varepsilon) \longrightarrow N(\Lambda, \varepsilon_\Lambda) \otimes N(\Gamma, \varepsilon_\Gamma)$$

принимает следующий вид:

$$g[\lambda_1 \otimes \gamma_1, \ldots, \lambda_n \otimes \gamma_n] = \\ = \sum_{0 \le p \le n} [\lambda_1, \ldots, \lambda_p]\, \varepsilon_\Lambda(\lambda_{p+1} \ldots \lambda_n) \otimes \gamma_1 \ldots \gamma_p\, [\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_n].$$

Эти формулы сохраняют смысл и для ненормализованных стандартных комплексов.

Перейдем теперь к полугруппам. Для любых полугрупп Π и Π' с пополняющими функциями $\varepsilon : \Pi \to K$ и $\varepsilon' : \Pi' \to K$ соответственно определим их прямое произведение $\Pi \times \Pi'$ как полугруппу, элементами которой являются всевозможные пары вида (x, x'), $x \in \Pi$, $x' \in \Pi'$, а умножение и пополняющая функция задаются формулами $(x, x')(y, y') = (xy, x'y')$ и $\bar{\varepsilon}(x, x') = \varepsilon(x)\varepsilon'(x')$. Легко видеть, что, положив $(x, x') = x \otimes x'$, мы отождествим алгебру $K(\Pi \times \Pi')$ с алгеброй $K(\Pi) \otimes_K K(\Pi')$. Поэтому все сказанное выше относительно умножений $\top$, $\perp$, $\frown$ и $\smile$ остается справедливым при замене алгебр Λ, Γ, $\Lambda \otimes \Gamma$ полугруппами Π, Π', $\Pi \times \Pi'$. Соответствующих формул мы здесь повторять не будем.

Умножения $\smile$ и $\frown$ для случая полугрупп мы определим с помощью диагонального отображения $D : K(\Pi) \to K(\Pi \times \Pi)$, индуцированного соответствием $x \to (x, x)$. Это диагональное отображение согласовано с пополняющим гомоморфизмом в случае, когда пополняющая функция $\varepsilon : \Pi \to K$ удовлетворяет соотношению $\varepsilon(x) = \varepsilon(x)\varepsilon(x)$, т. е. когда она *идемпотентна*. К числу идемпотентных пополняющих функций принадлежат, очевидно, как единичная, так и нулевая пополняющие функции. Таким образом, в предположении идемпотентности пополняющей функции мы в ситуации $(A_\Pi, {}_\Pi C, {}_\Pi C')$ получим умножения

$$\smile : H^p(\Pi, C) \otimes H^q(\Pi, C') \longrightarrow H^{p+q}(\Pi, C \otimes C'),$$

$$\frown : H_{p+q}(\Pi, \operatorname{Hom}(C, A)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Pi, C), H_q(\Pi, A)).$$

Так как рассматриваемое диагональное отображение D коммутативно и ассоциативно в смысле § 4, то эти умножения обладают указанными в § 4 свойствами коммутативности и ассоциативности.

Для вычисления этих произведений в явном виде мы определим отображение

$$j : N(\Pi) \longrightarrow N(\Pi) \otimes N(\Pi)$$

над тождественным отображением Π-модуля K как композицию отображения $N(\Pi) \to N(\Pi \times \Pi)$, индуцированного диагональным отображением D, с определенным выше отображением $g : N(\Pi \times \Pi) \to N(\Pi) \otimes N(\Pi)$. Таким образом,

$$j[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{0 \le p \le n} [x_1, \ldots, x_p]\, \varepsilon(x_{p+1} \ldots x_n) \otimes x_1 \ldots x_p [x_{p+1}, \ldots, x_n].$$

Эта формула остается справедливой также и для ненормализованных стандартных комплексов.

8. ФОРМУЛЫ АССОЦИАТИВНОСТИ

Предположим, что для дополненной K-алгебры Λ с пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to K$ выбрано некоторое диагональное отображение

$$D : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$$

и некоторый «антиподизм»

$$\omega : \Lambda \longrightarrow \Lambda^*,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(i) отображения D и ω являются гомоморфизмами K-алгебр;

(ii) отображения D и ω согласованы с пополняющим гомоморфизмом ε, т. е. $\varepsilon = \varepsilon^*\omega$ и композиции $(\varepsilon \otimes \Lambda)D$ и $(\Lambda \otimes \varepsilon)D$ являются тождественными отображениями;

(iii) композиция $\omega^*\omega$, где отображение $\omega^* : \Lambda^* \to \Lambda$ индуцировано отображением ω, является тождественным отображением;

(iv) диагональное отображение D ассоциативно, т. е.

$$(\Lambda \otimes D)D = (D \otimes \Lambda)D \ ;$$

(v) отображения D и ω перестановочны между собой, т. е.

$$D^*\omega = (\omega \otimes \omega)D\,;$$

(vi) отображение $E = (\Lambda \otimes \omega)D : \Lambda \to \Lambda^e$ обладает свойством (E. 1) (см. § X, 6).

Из условия (iii) вытекает, что композиция $\omega\omega^*$ также является тождественным отображением, так что ω является изоморфизмом и $\omega^{-1} = \omega^*$.

Рассмотрим ситуацию $(A_\Lambda, {}_\Lambda C)$. Тензорное произведение $A \otimes C$ мы можем рассматривать как правый $\Lambda \otimes \Lambda^*$-модуль, а, следовательно, применив отображение E, — и как правый Λ-модуль. В силу условия (vi) имеет место соотношение $(A \otimes C)I = (A \otimes C)J$, где I — ядро гомоморфизма $\varepsilon : \Lambda \to K$, а J — ядро гомоморфизма $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$. Отсюда, поскольку идеал J порождается (как левый Λ^e-модуль) элементами вида $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$, причем

$$(a \otimes c)(\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*) = a\lambda \otimes c - a \otimes \lambda c,$$

вытекает, что подмодуль $(A \otimes C)I$ является ядром естественного гомоморфизма $A \otimes C \to A \otimes_\Lambda C$. Таким образом,

$$(1) \qquad A \otimes_\Lambda C \approx (A \otimes C)/(A \otimes C)I = (A \otimes C)_\Lambda \approx (A \otimes C) \otimes_\Lambda K.$$

Рассмотрим теперь ситуацию $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C)$. Группу $\mathrm{Hom}\,(A, C)$ мы можем рассматривать как левый Λ^e-модуль, операторы в котором определены формулой $[(\lambda \otimes \gamma^*)f\,]a = \lambda f(\gamma a)$. Применив отображение E, мы можем рассматривать эту группу и как левый Λ-модуль. В силу условия (vi) элементы модуля $\mathrm{Hom}\,(A, C)$, инвариантные относительно операторов из алгебры Λ^e (т. е. аннулируемые идеалом J), совпадают с элементами, инвариантными относительно операторов из алгебры Λ (т. е. аннулируемыми идеалом I). Так как $[(\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*)f\,]a = \lambda(fa) - f(\lambda a)$, отсюда следует, что множество инвариантных элементов Λ-модуля $\mathrm{Hom}\,(A, C)$ совпадает с подгруппой $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(A, C)$. Таким образом,

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}_\Lambda\,(A, C) = [\mathrm{Hom}\,(A, C)\,]^\Lambda \approx \mathrm{Hom}_\Lambda\,(K, \mathrm{Hom}\,(A, C)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *В ситуации* $({}_\Lambda A, {}_\Lambda B, {}_\Lambda C)$ *рассмотренный в предложении* II, 5.2′ *изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \approx \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \tag{3}$$

индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C) \tag{4}$$

(здесь группы $\mathrm{Hom}(B, C)$ *и* $A \otimes B$ *рассматриваются с помощью соответственно отображений* E *и* D *как левые* Λ*-модули).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части соотношения (3) мы превратим в левые $(\Lambda \otimes \Lambda^* \otimes \Lambda^*)$-модули, полагая

$$\{[(\lambda \otimes \gamma^* \otimes \mu^*)f]a\}b = \lambda\{[f(\mu a)]\gamma b\}$$

для левой части и

$$[(\lambda \otimes \gamma^* \otimes \mu^*)g](a \otimes b) = \lambda[g(\mu a \otimes \gamma b)]$$

для правой части. При этом изоморфизм (3) превращается в операторный изоморфизм. Затем, с помощью отображения

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda^* \otimes \Lambda^*,$$

определенного формулой

$$\varphi = (\Lambda \otimes \omega \otimes \omega)(\Lambda \otimes D)D = (\Lambda \otimes \omega \otimes \omega)(D \otimes \Lambda)D,$$

мы можем обе части соотношения (3) определить и как левые Λ-модули. При этом изоморфизм (3) будет сохранять инвариантные элементы. Так как

$$\varphi = (E \otimes \Lambda^*)E,$$

то операторы из алгебры Λ на группе $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ можно задать в два этапа: сначала с помощью отображения E задать операторы из алгебры Λ на группе $\mathrm{Hom}(B, C)$, после чего с помощью того же отображения E задать операторы из алгебры Λ на группе $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$. Следовательно, в силу формулы (2) множество инвариантных элементов Λ-модуля $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ совпадает с подгруппой $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}(B, C))$. Для правой части соотношения (3) рассуждения аналогичны. Так как

$$\varphi = (\Lambda \otimes D^*)E,$$

то операторы из алгебры Λ на группе $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$ можно задать, определяя сначала с помощью отображения D группу $A \otimes B$, а затем с помощью отображения E — группу $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C)$ как левые Λ-модули. Поэтому формула (2) также применима и, значит, множеством инвариантных элементов Λ-модуля $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$ является подгруппа $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C)$.

Совершенно аналогично доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1а. *В ситуации* $(A_\Lambda, {}_\Lambda B, {}_\Lambda C)$ *рассмотренный в предложении* II, 5.1 *изоморфизм*

$$(A \otimes B) \otimes C \approx A \otimes (B \otimes C) \tag{3a}$$

индуцирует изоморфизм

(4a) $$(A \otimes B) \otimes_\Lambda C \approx A \otimes_\Lambda (B \otimes C)$$

(здесь группа $A \otimes B$ рассматривается с помощью отображения E как правый Λ-модуль, а группа $B \otimes C$ — с помощью отображения D как левый Λ-модуль).

В качестве примера применения предложения 8.1 докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Если в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda B, {}_\Lambda C)$ модуль A Λ-проективен, а модуль B K-проективен, то модуль $A \otimes B$ Λ-проективен. Если модуль B K-проективен, а модуль C Λ-инъективен, то модуль* $\mathrm{Hom}(B, C)$ *Λ-инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль A Λ-проективен, а модуль B K-проективен. Тогда $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, D)$ и $\mathrm{Hom}(B, C)$ являются точными функторами от аргументов D и C соответственно. Поэтому $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}(B, C))$, а следовательно, и $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C)$ будут точными функторами аргумента C, а, значит, модуль $A \otimes B$ Λ-проективен. Второе утверждение доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь ситуацию

$$({}_\Lambda A, {}_\Lambda A', {}_\Lambda B, {}_\Lambda C, C'_\Lambda).$$

Применяя предложение 8.1 к тройкам $(\mathrm{Hom}(B,C), B, C)$ и $(C', B, C' \otimes B)$ (здесь группа C' рассматривается с помощью отображения ω как левый Λ-модуль), мы получим изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}(B, C), \mathrm{Hom}(B, C)) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}(B, C) \otimes B, C),$$
$$\mathrm{Hom}_\Lambda(C' \otimes B, C' \otimes B) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda(C', \mathrm{Hom}(B, C' \otimes B)).$$

При этих изоморфизмах тождественным отображениям

$$\mathrm{Hom}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, C) \text{ и } C' \otimes B \longrightarrow C' \otimes B$$

соответствуют Λ-гомоморфизмы

(5) $$\varphi : \mathrm{Hom}(B, C) \otimes B \longrightarrow C,$$

(5a) $$\psi : C' \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, C' \otimes B),$$

определенные формулами

$$\varphi(f \otimes b) = fb, \quad (\psi c')b = c' \otimes b.$$

Предположим теперь, что алгебра Λ K-проективна и что

(*) $$\mathrm{Tor}_n^K(A', A) = 0 \text{ для всех } n > 0.$$

Тогда определены умножения

$$\smile : \mathrm{Ext}_\Lambda(A', \mathrm{Hom}(B, C)) \otimes \mathrm{Ext}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}_\Lambda(A' \otimes A, \mathrm{Hom}(B, C) \otimes B),$$
$$\frown : \mathrm{Tor}^\Lambda(\mathrm{Hom}(B, C' \otimes B), A \otimes A') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_\Lambda(A, B), \mathrm{Tor}^\Lambda(C' \otimes B, A')).$$

Комбинируя эти отображения с гомоморфизмами φ и ψ, мы получим *модифицированные умножения*

(6) $$\smile : \mathrm{Ext}_\Lambda(A', \mathrm{Hom}(B, C)) \otimes \mathrm{Ext}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}_\Lambda(A' \otimes A, C),$$

(6a) $$\frown : \mathrm{Tor}^\Lambda(C', A \otimes A') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_\Lambda(A, B), \mathrm{Tor}^\Lambda(C' \otimes B, A')).$$

Принимая за A' кольцо K [при этом $A \otimes A' = A$, а условие (*) выполняется автоматически], мы получим, что

$$(7) \qquad \smile : H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(B, C)) \otimes \operatorname{Ext}^q_\Lambda(A, B) \to \operatorname{Ext}^{p+q}_\Lambda(A, C),$$

$$(7а) \qquad \frown : \operatorname{Tor}^\Lambda_{p+q}(C', A) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, B), H_q(\Lambda, C' \otimes B)).$$

Далее, принимая за A кольцо K, мы получим, что

$$(8) \qquad \smile : H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(B, C)) \otimes H^q(\Lambda, B) \to H^{p+q}(\Lambda, C), \qquad ({}_\Lambda B, {}_\Lambda C),$$

$$(8а) \qquad \frown : H_{p+q}(\Lambda, C') \to \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, B), H_q(\Lambda, C' \otimes B)), \qquad ({}_\Lambda B, C'_\Lambda).$$

Напомним, что группа $\operatorname{Hom}(B, C)$ здесь определена как левый Λ-модуль, а группа $C' \otimes B$ — как правый Λ-модуль с помощью одного и того же отображения E.

Рассмотрим отдельно случай, когда $p = q = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Отображения*

$$\smile : \operatorname{Hom}_\Lambda(A', \operatorname{Hom}(B, C)) \otimes \operatorname{Hom}_\Lambda(A, B) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A' \otimes A, C),$$

$$\frown : C' \otimes_\Lambda (A \otimes A') \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B), (C' \otimes B) \otimes_\Lambda A')$$

задаются формулами

$$(f \smile g)(a' \otimes a) = (fa')(ga),$$

$$[c' \otimes (a \otimes a')] \frown f = (c' \otimes fa) \otimes a'.$$

Непосредственно вытекает из предложений 1.2.3, 1.2.4 и определений модифицированных умножений.

Для случая, когда $\Lambda = Z(\Pi)$, где Π — произвольная группа с единичной пополняющей функцией, мы определим отображения D и ω формулами

$$Dx = (x, x) = x \otimes x, \quad \omega x = (x^{-1})^*.$$

Все условия (i)—(vi), очевидно, выполнены. Таким образом, для этого случая все полученные выше результаты автоматически сохраняются. Заметим, что операторы из группы Π на группах $\operatorname{Hom}(B, C)$ и $C' \otimes B$ определяются формулами

$$(xf)b = x[f(x^{-1}b)], \quad (c' \otimes b)x = c'x \otimes x^{-1}b.$$

В гл. XIII мы увидим, что результаты этого параграфа применимы также и к алгебрам Ли.

9. ТЕОРЕМЫ РЕДУКЦИИ

Продолжая по-прежнему предполагать, что для рассматриваемой дополненной K-алгебры Λ заданы отображения $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ и $\omega : \Lambda \to \Lambda^*$, удовлетворяющие условиям (i)—(vi) из § 8, мы сохраним также сделанное в конце предыдущего параграфа предположение о K-проективности алгебры Λ.

Рассмотрим ситуацию $({}_\Lambda A, {}_\Lambda C, C'_\Lambda)$. Применяя умножения 8, (7) и 8, (7a) к случаю, когда $A = B$, мы получим умножения

$$\smile : H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, C)) \otimes \operatorname{Ext}^q_\Lambda(A, A) \to \operatorname{Ext}^{p+q}_\Lambda(A, C),$$

$$\frown : \operatorname{Tor}^\Lambda_{p+q}(C', A) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, A), H_q(\Lambda, C' \otimes A)).$$

Принимая за один из множителей элемент

$$j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A, A) = \operatorname{Ext}^0_\Lambda(A, A),$$

являющийся тождественным отображением модуля A, мы получим некоторые отображения

$$\smile j : H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, C)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, C), \tag{1}$$

$$\frown j : \operatorname{Tor}^\Lambda_p(C', A) \longrightarrow H_p(\Lambda, C' \otimes A), \tag{1a}$$

которые мы сейчас исследуем более подробно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Для $p = 0$ отображения* (1) и (1a) *совпадают с изоморфизмами*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(K, \operatorname{Hom}(A, C)) \approx \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C),$$

$$C' \otimes_\Lambda A \approx (C' \otimes A) \otimes_\Lambda K,$$

рассмотренными в предложениях 8.1 *и* 8.1a.

Непосредственно вытекает из предложений 1.2.3, 1.2.4 и определения модифицированных умножений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Если Λ-модуль A K-проективен, то отображения $\smile j$ и $\frown j$ являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уже доказано, что на однородной составляющей степени p (где $p \geq 0$) отображения $\smile j$ и $\frown j$ являются изоморфизмами. Рассмотрим составляющую степени $p + 1$.

Пусть $0 \to C \to Q \to N \to 0$ — произвольная точная последовательность с Λ-инъективным модулем Q. Поскольку модуль A K-проективен, имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, Q) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, N) \longrightarrow 0,$$

в которой, согласно предложению 8.2, модуль $\operatorname{Hom}(A, Q)$ Λ-инъективен. Переходя к группам гомологий и вспоминая, что умножение $\smile$ перестановочно со связывающими гомоморфизмами, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, Q)) \arrow[r] \arrow[d, "\smile j"] & H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, N)) \arrow[r] \arrow[d, "\smile j"] & H^{p+1}(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, C)) \arrow[r] \arrow[d, "\smile j"] & 0 \\
\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, Q) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, N) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^{p+1}_\Lambda(A, C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Так как в этой диаграмме два левых вертикальных отображения являются изоморфизмами, то тем же свойством обладает и третье вертикальное отображение.

Для отображения $\frown j$ доказательство аналогично; следует рассмотреть точную последовательность $0 \to M \to P \to C' \to 0$ с Λ-проективным модулем P.

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$\text{(S)} \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow F_{q-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

левых Λ-модулей, где $q>0$. Этой точной последовательности соответствует итерированный связывающий гомоморфизм

$$\delta_S : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^q(F, A).$$

Образ $\delta_S j \in \mathrm{Ext}_\Lambda^q(F, A)$ элемента j при этом гомоморфизме мы будем называть *характеристическим элементом* точной последовательности (S).

Умножения 8, (7) и 8, (7a), в которых модули A и B заменены модулями F и A соответственно, позволяют по формулам[1]

$$\gamma h = (-1)^{pq}\, h \smile \delta_S j, \quad h \in H^p(\Lambda, \mathrm{Hom}(A, C)),$$
$$\vartheta h' = h' \frown \delta_S j, \quad h' \in \mathrm{Tor}_{p+q}^\Lambda(C', F)$$

определить некоторые отображения

$$\gamma : H^p(\Lambda, \mathrm{Hom}(A, C)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{p+q}(F, C), \qquad {}_\Lambda C,$$
$$\vartheta : \mathrm{Tor}_{p+q}^\Lambda(C', F) \longrightarrow H_p(\Lambda, C' \otimes A), \qquad C'_\Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. *Гомоморфизмы γ и ϑ можно представить в виде сквозных отображений*

$$H^p(\Lambda, \mathrm{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\smile j} \mathrm{Ext}_\Lambda^p(A, C) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}_\Lambda^{p+q}(F, C),$$
$$\mathrm{Tor}_{p+q}^\Lambda(C', F) \xrightarrow{\Delta'} \mathrm{Tor}_p^\Lambda(C', A) \xrightarrow{\frown j} H_p(\Lambda, C' \otimes A),$$

где Δ и Δ' — итерированные связывающие гомоморфизмы, соответствующие точной последовательности (S).

Доказательство легко следует из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_\Lambda(K, \mathrm{Hom}(A, C)) \otimes \mathrm{Ext}_\Lambda(A, A) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{Ext}_\Lambda(A, C) \\
\downarrow{\scriptstyle I \otimes \delta_S} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\
\mathrm{Ext}_\Lambda(K, \mathrm{Hom}(A, C)) \otimes \mathrm{Ext}_\Lambda(F, A) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{Ext}_\Lambda(F, C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}^\Lambda(C', F) & \xrightarrow{\frown} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_\Lambda(F, A), \mathrm{Tor}^\Lambda(C' \otimes A, K)) \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta'} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\delta_S, I')} \\
\mathrm{Tor}^\Lambda(C', A) & \xrightarrow{\frown} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_\Lambda(A, A), \mathrm{Tor}^\Lambda(C' \otimes A, K))
\end{array}$$

где I и I' — тождественные отображения соответствующих модулей.

---

[1] Знак $(-1)^{pq}$ в первой формуле введен потому, что аналогичный знак входит в определение отображения $I \otimes \delta_S$ (см. ниже доказательство предложения 9.3). Только при таком выборе знаков будет справедливо предложение 9.3. Во второй формуле никакого дополнительного знака, по аналогичным соображениям, вводить не нужно. — *Прим. ред.*

ТЕОРЕМА 9.4 (Теорема редукции). *Если модули $F_0, \dots, F_{q-1}$ Λ-проективны, а модуль A K-проективен, то при $p > 0$ гомоморфизмы γ и ϑ являются изоморфизмами, а при $p = 0$ имеют место точные последовательности*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(F_{q-1}, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^q_\Lambda(F, C) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}^\Lambda_q(C', F) \longrightarrow C' \otimes_\Lambda A \longrightarrow C' \otimes_\Lambda F_{q-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду K-проективности модуля A отображения $\smile j$ и $\frown j$, согласно предложению 9.2, являются изоморфизмами. Поэтому в силу предложения 9.3 теорема сводится к аналогичному утверждению об итерированных связывающих гомоморфизмах Δ и Δ', являющемуся, очевидно, непосредственным следствием предложения V, 7.2.

СЛЕДСТВИЕ 9.5. *Пусть*

$$\text{(S)} \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow F_{q-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow K \longrightarrow 0, \qquad q > 0,$$

— точная последовательность левых Λ-модулей с Λ-проективными модулями $F_{q-1}, \dots, F_0$. Тогда для любого $p > 0$ соответствия $h \to h \smile \delta_S j$ и $h' \to h' \frown \delta_S j$ определяют изоморфизмы

$$H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, C)) \approx H^{p+q}(\Lambda, C), \qquad {}_\Lambda C,$$
$$H_{p+q}(\Lambda, C') \approx H_p(\Lambda, C' \otimes A), \qquad C'_\Lambda.$$

При $p = 0$ имеют место точные последовательности

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(F_{q-1}, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C) \longrightarrow H^q(\Lambda, C) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H_q(\Lambda, C') \longrightarrow C' \otimes_\Lambda A \longrightarrow C' \otimes_\Lambda F_{q-1}.$$

В силу теоремы 9.4 достаточно доказать, что модуль A K-проективен. Но в этом легко убедиться, разлагая точную последовательность (S) в систему трехчленных точных последовательностей[1)].

В частности, выбрав точную последовательность

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

мы получим изоморфизмы (для $p > 0$)

$$H^p(\Lambda, \operatorname{Hom}(I, C)) \approx H^{p-1}(\Lambda, C), \qquad {}_\Lambda C,$$
$$H_{p+1}(\Lambda, C') \approx H_p(\Lambda, C' \otimes I), \qquad C'_\Lambda.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть среди K-алгебр Λ, Γ, Σ алгебра Σ K-проективна. Определить в ситуации $({}_\Lambda A_\Sigma, {}_\Sigma C_\Lambda, {}_\Sigma A'_\Gamma, {}_\Gamma C'_\Sigma)$ умножение

$$\top : \operatorname{Tor}^{\Lambda \otimes \Sigma^*}(C, A) \otimes \operatorname{Tor}^{\Sigma \otimes \Gamma^*}(C', A') \to \operatorname{Tor}^{\Lambda \otimes \Gamma^*}(C' \otimes_\Sigma C, A \otimes_\Sigma A'),$$

1) То есть в систему точных последовательностей вида $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$; пример такого разложения приведен в § III, 4. — *Прим. перев.*

а в ситуации $({}_{\Lambda}A_{\Sigma}, {}_{\Sigma}C_{\Lambda}, {}_{\Sigma}A'_{\Gamma}, {}_{\Sigma}C'_{\Gamma})$ — умножение

$$\perp : \operatorname{Ext}_{\Lambda\otimes\Gamma^*}(A \otimes_{\Sigma} A', \operatorname{Hom}_{\Sigma}(C, C')) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Sigma^*}(C, A), \operatorname{Ext}_{\Sigma\otimes\Gamma^*}(A', C')).$$

Предполагая далее, что K-проективны алгебры Λ, Γ, Σ и что, кроме того, $\operatorname{Tor}_n^{\Sigma}(A, A') = 0$ для всех $n > 0$, определить в ситуации $({}_{\Lambda}A_{\Sigma}, {}_{\Lambda}C_{\Sigma}, {}_{\Sigma}A'_{\Gamma}, {}_{\Sigma}C'_{\Gamma})$ умножение

$$\vee : \operatorname{Ext}_{\Lambda\otimes\Sigma^*}(A, C) \otimes \operatorname{Ext}_{\Sigma\otimes\Gamma^*}(A', C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\Lambda\otimes\Gamma^*}(A \otimes_{\Sigma} A', C \otimes_{\Sigma} C'),$$

а в ситуации $({}_{\Lambda}A_{\Sigma}, {}_{\Lambda}C_{\Sigma}, {}_{\Sigma}A'_{\Gamma}, {}_{\Gamma}C'_{\Sigma})$ — умножение

$$\wedge : \operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Gamma^*}(\operatorname{Hom}_{\Sigma}(C, C'), A \otimes_{\Sigma} A') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_{\Lambda\otimes\Sigma^*}(A, C), \operatorname{Tor}^{\Sigma\otimes\Gamma^*}(C', A')).$$

В случае когда тройка $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ совпадает с тройкой (Λ, Γ^*, K), получающиеся умножения должны совпадать с умножениями, определенными в § 1. Установить формальные свойства обобщенных умножений.

2. Пусть Λ — произвольная K-проективная K-алгебра. Полагая в упражнении 1 $\Lambda = \Gamma = \Sigma$, определить в группах Хохшильда «умножения второго рода»:

$$\top : H_p(\Lambda, A) \otimes H_q(\Lambda, A') \longrightarrow H_{p+q}(\Lambda, A \otimes_{\Lambda} A'),$$
$$\perp : H^{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}_{\Lambda}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p(\Lambda, A), H^q(\Lambda, A')),$$
$$\vee : H^p(\Lambda, A) \otimes H^q(\Lambda, A') \longrightarrow H^{\ +q}(\Lambda, A \otimes_{\Lambda} A'),$$
$$\wedge : H_{p+q}(\Lambda, \operatorname{Hom}_{\Lambda}(A, A')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^p(\Lambda, A), H_q(\Lambda, A')),$$

где A и A' — любые двусторонние Λ-модули.

Построить отображения

$$f' : N(\Lambda) \otimes_{\Lambda} N(\Lambda) \longrightarrow N(\Lambda),$$
$$g' : N(\Lambda) \longrightarrow N(\Lambda) \otimes_{\Lambda} N(\Lambda),$$

аналогичные отображениям f и g, рассмотренным в § 6, и применить их к вычислению умножений второго рода.

3. Показать, что композиция отображений

$$N(\Lambda) \otimes N(\Gamma) \xrightarrow{f} N(\Lambda \otimes \Gamma) \xrightarrow{g} N(\Lambda) \otimes N(\Gamma)$$

является тождественным отображением. Доказать аналогичное свойство для отображений f' и g' (см. упражнение 2).

4. Показать, что в нормализованном стандартном комплексе $N(\Lambda)$ стягивающая гомология s определяется формулой

$$s(\lambda[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda') = [\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n]\lambda'$$

и что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow N_{-1}(\Lambda) \xrightarrow{s_{-1}} N_0(\Lambda) \xrightarrow{s_0} \ldots \longrightarrow N_n(\Lambda) \xrightarrow{s_n} N_{n+1}(\Lambda) \longrightarrow \ldots .$$

В качестве следствия этого результата показать, что при гомоморфизме d_n ($n \geq 0$) подмодуль $\operatorname{Ker}(s_n)$ изоморфно отображается на подмодуль $\operatorname{Im}(d_n)$[1].

5. Показать, что $sf(\tilde{N}(\Lambda) \otimes \tilde{N}(\Gamma)) = 0$, где $f: N(\Lambda) \otimes N(\Gamma) \to N(\Lambda \otimes \Gamma)$ — построенное в § 6 отображение. Показать, что это свойство однозначно характеризует отображение f. Вывести отсюда свойства коммутативности и ассоциативности отображения f. Доказать аналогичное свойство для отображения $f: N(\Lambda, \varepsilon_\Lambda) \otimes N(\Gamma, \varepsilon_\Gamma) \to N(\Lambda \otimes \Gamma, \varepsilon)$, где Λ и Γ — дополненные алгебры.

6. Показать, что $ng(\tilde{N}(\Lambda \otimes \Gamma)) = 0$, где $g: N(\Lambda \otimes \Gamma) \to N(\Lambda) \otimes N(\Gamma)$ — построенное в § 6 отображение, а n — стягивающая гомотопия комплекса $N(\Lambda) \otimes N(\Gamma)$, построенная по стягивающим гомотопиям s комплексов $N(\Lambda)$ и $N(\Gamma)$ (по правилу, указанному в § 5). Показать, что это свойство однозначно характеризует отображение g. Вывести отсюда свойство ассоциативности отображения g. Доказать аналогичное свойство для отображения $N(\Lambda \otimes \Gamma, \varepsilon) \to N(\Lambda, \varepsilon_\Lambda) \otimes N(\Gamma, \varepsilon_\Gamma)$, где Λ и Γ — дополненные алгебры.

7. Пусть $\varphi: \Lambda \to \Gamma$ — произвольный эпиморфизм коммутативных K-алгебр, X — такая расщепленная ($X = \Lambda \otimes \tilde{X}$) проективная резольвента алгебры Γ, рассматриваемой как Λ-модуль, что $\tilde{X}_0 = K$, и пусть (s_n, σ) — некоторая стягивающая гомотопия комплекса X. Показать, что $\Gamma \otimes_\Lambda \Gamma = \Gamma \otimes_\Gamma \Gamma = \Gamma$ и что тензорное произведение $X \otimes_\Lambda X = \Lambda \otimes \tilde{X} \otimes \tilde{X}$ является расщепленным левым комплексом над Λ-модулем Γ. С помощью индуктивной формулы, указанной в предложении 5.2, определить отображение

$$h: X \otimes_\Lambda X \longrightarrow X$$

над тождественным отображением модуля Γ. Доказать следующие свойства отображения h:

(i) $h(x \otimes y) = (-1)^{pq} h(y \otimes x)$ для любых $x \in X_p$, $y \in X_q$;

(ii) если $s(\tilde{X}) = 0$, то элемент $1 \in \Lambda = X_0$ является единицей умножения h, т. е. $h(1 \otimes x) = x = h(x \otimes 1)$;

(iii) если $h(\tilde{X} \otimes \tilde{X}) \subset \tilde{X}$, то умножение h ассоциативно, т. е. $h(x \otimes h(y \otimes z)) = h(h(x \otimes y) \otimes z)$.

[1] Ср. упражнение IX, 3. — *Прим. перев.*

Таким образом, умножение h определяет комплекс X как градуированную дифференциальную алгебру[1].

Применить этот результат к гомоморфизму $\varrho : \Lambda^e \to \Lambda$, принимая за X комплекс $N(\Lambda)$, где Λ — произвольная коммутативная K-алгебра, и показать, что комплекс $N(\Lambda)$ является градуированной дифференциальной алгеброй относительно умножения h, определенного в § 6.

Применяя этот же результат к гомоморфизму $\varepsilon : \Lambda \to K$, где Λ — произвольная коммутативная дополненная K-алгебра, показать, что комплекс $N(\Lambda, \varepsilon)$ является градуированной дифференциальной алгеброй относительно умножения h, определенного в § 7. В частности, для любой коммутативной полугруппы Π с произвольной пополняющей функцией $\varepsilon : \Pi \to K$ комплекс $N(\Pi, \varepsilon)$ является градуированной дифференциальной алгеброй.

8. Пусть Λ — произвольная K-алгебра, A — некоторый двусторонний Λ-модуль, а M — некоторый K-модуль. С помощью гомоморфизмов, определенных в конце § 3 (или в § VI, 5), определить гомоморфизмы

$$\varrho^n : H^n(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, M)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_n(\Lambda, A), M),$$
$$\sigma_n : H_n(\Lambda, \operatorname{Hom}(A, M)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^n(\Lambda, A), M).$$

Показать, что если модуль M K-инъективен, то гомоморфизм ϱ^n является изоморфизмом. Показать, что то же самое верно и для гомоморфизма σ_n, если только алгебра Λ^e нетерова. В частности, отображения ϱ^n и σ_n являются изоморфизмами, если кольцо K является полем, $M = K$ и алгебра Λ имеет конечное число образующих над полем K.

9. Пусть Π — произвольная полугруппа с некоторой пополняющей функцией $\Pi \to Z$, A — произвольный правый Π-модуль и $T = R/Z$ — аддитивная группа действительных чисел, приведенных по модулю 1. Тогда в определенной в § VII, 6 топологии группа $D(A) = \operatorname{Hom}(A, T)$ является компактной абелевой группой, в которой Π-операторы непрерывны. Определенный в упражнении 8 изоморфизм ϱ^n в рассматриваемом случае принимает вид

$$\varrho^n : H^n(\Pi, D(A)) \approx D(H_n(\Pi, A)).$$

С помощью Π-проективных резольвент модуля Z определить на группе $H^n(\Pi, D(A))$ естественную топологию и показать, что в этой

---

[1] Градуированной дифференциальной алгеброй называется комплекс $X = \sum X^n$, в котором определено ассоциативное умножение, удовлетворяющее соотношениям

$$x \cdot y \in X^{p+q}, \quad d(x \cdot y) = dx \cdot y + (-1)^p x \cdot dy,$$

где $x \in X^p$, $y \in X^q$. — *Прим. ред.*

топологии изоморфизм ϱ^n является гомеоморфизмом. Получить аналогичный результат для изоморфизма

$$\sigma_n : H_n(\Pi, D(C)) \approx D(H^n(\Pi, C)),$$

где C — левый Π-модуль, предполагая, что полугруппа Π конечна.

10. Пусть $\Lambda = (K, d)$ — алгебра двойных чисел над некоторым коммутативным кольцом K (см. § IV, 2). Показать, что для этой алгебры не существует диагонального отображения $D : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$, обладающего свойствами (i)—(vi) из § 8 (отображение ω предполагается тождественным).

ГЛАВА XII

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Введение. Как группы гомологий $H_n(\Pi, A)$, так и группы когомологий $H^n(\Pi, A)$ конечной группы Π целесообразно рассматривать в предположении, что A является левым Π-модулем. Для любого такого Π-модуля A определен так называемый норменный гомоморфизм $N: A \to A$, который индуцирует некоторый гомоморфизм $N^*: H_0(\Pi, A) \to H^0(\Pi, A)$. Это позволяет нам, используя метод, изложенный в § V, 10, включить группы гомологий и когомологий в одну последовательность $\hat{H}^q(\Pi, A)$ $(-\infty < q < \infty)$, которую мы называем *полной производной последовательностью* группы Π. Весьма любопытно, что для полных производных последовательностей можно определить умножение (см. §§ 4—6), обобщающее умножения $\smile$ и $\frown$. В § 8—10 мы изучаем соотношения между группами $\hat{H}(\Pi, A)$ и $\hat{H}(\pi, A)$, где π — произвольная подгруппа группы Π. Последний параграф (§ 11) посвящен группам Π, для которых полные производные последовательности $\hat{H}(\Pi, A)$ периодичны по q.

Излагаемая в этой главе теория была разработана Тэйтом (не опубликовано) для нужд теории полей классов. Результаты § 11 принадлежат Артину и Тэйту (также не опубликовано). Включение в книгу этой главы стало возможным только благодаря существенной помощи, оказанной авторам Г. П. Хохшильдом и Дж. Тэйтом.

. НОРМЫ

На протяжении всей этой главы мы будем иметь дело лишь с конечными группами Π. Основным кольцом алгебры группы $\Lambda = Z(\Pi)$ все время предполагается кольцо Z целых чисел, а пополняющей функцией $\Pi \to Z$ — единичная пополняющая функция. Если не оговорено противное, то под Π-модулями все время подразумеваются *левые* Π-модули.

В групповом кольце $Z(\Pi)$ мы выделим элемент

$$N = \sum x, \qquad x \in \Pi.$$

Мы будем, как правило, иметь дело не с самим элементом N, а с соответствующим ему *норменным гомоморфизмом*

$$N: A \longrightarrow A,$$

определяемым для любого Π-модуля A посредством формулы

$$Na = \sum xa, \qquad x \in \Pi.$$

Так как $N(x-1) = 0$ и $xN = N$, то

$$IA \subset \operatorname{Ker} N, \quad \operatorname{Im} N \subset A^{\Pi}.$$

Поэтому гомоморфизм N индуцирует гомоморфизм

$$N^* : A_{\Pi} \longrightarrow A^{\Pi},$$

где, как обычно, $A_{\Pi} = A/IA$, а A^{Π} — множество инвариантных элементов модуля A.

Образ норменного гомоморфизма $N: A \to A$ мы будем обозначать через $N(A)$; при этом $N(A)$ можно рассматривать как ковариантный функтор Π-модуля A. Имеет место очевидная коммутативная диаграмма

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} & N(A) \arrow[dr, "h"] & \\ A_{\Pi} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "N^*"'] & & A^{\Pi} \end{tikzcd}$$

где g — отображение, определенное гомоморфизмом N и являющееся эпиморфизмом, а h — отображение вложения.

Ядро гомоморфизма $N: A \to N$ мы будем обозначать через ${}_N A$.

Для произвольных Π-модулей A и C группу $\operatorname{Hom}(A, C)$ можно рассматривать как Π-модуль, определяя операторы на нем формулой

$$(xf)a = x(f(x^{-1}a)).$$

В силу этого определен норменный гомоморфизм

$$(2) \qquad N: \operatorname{Hom}(A, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, C).$$

Именно $(Nf)a = \sum xf(x^{-1}a)$, $x \in \Pi$. Образ гомоморфизма (2) содержится в подгруппе $\operatorname{Hom}_{\Pi}(A, C)$. Если гомоморфизм $f: A \to C$ является Π-гомоморфизмом, то $Nf = (\Pi : 1) f$, где $(\Pi : 1)$ — порядок группы Π.

Заметим, наконец, что если в последовательности Z-гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

гомоморфизмы f и h являются Π-гомоморфизмами, то

$$N(hgf) = h(Ng)f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *тождественное отображение Π-модуля A является нормой*[1] *некоторого Z-эндоморфизма $\varrho: A \to A$;*

[1] То есть образом при норменном гомоморфизме N. — *Прим. перев.*

(b) *П-модуль A слабо проективен;*

(c) *П-модуль A слабо инъективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность свойств (b) и (c) установлена в предложении X, 8.6.

(a) $\Rightarrow$ (c). Пусть $\varrho : A \to A$ — такой Z-эндоморфизм, что $N\varrho$ является тождественным отображением. Для любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(Z(\Pi), A)$ мы положим

$$\mu f = \sum x\varrho(x^{-1}(fx)), \qquad x \in \Pi.$$

Тогда для любого элемента $s \in \Pi$

$$\mu(sf) = \sum x\varrho(x^{-1}sf(s^{-1}x)) = s(\mu f).$$

Если гомоморфизм f на всех элементах группы Π принимает одно и то же значение a, то

$$\mu f = \sum x\varrho(x^{-1}a) = (N\varrho)a = a.$$

Таким образом, μ является отображением усреднения в смысле предложения X, 8.4a и, следовательно, модуль A слабо инъективен.

(c) $\Rightarrow$ (a). Предполагая модуль A слабо инъективным, рассмотрим произвольное отображение усреднения $\mu : \mathrm{Hom}(Z(\Pi), A) \to A$ в смысле предложения X, 8.4a. Каждому элементу $a \in A$ мы сопоставим гомоморфизм $f_a \in \mathrm{Hom}(Z(\Pi), A)$, для которого $f_a 1 = a$ и $f_a x = 0$, если $x \neq 1$. Гомоморфизм $\sum x f_{x^{-1}a}$ на всех элементах группы Π принимает одно и то же значение a. Определим теперь гомоморфизм $\varrho : A \to A$, полагая $\varrho a = \mu f_a$. Тогда

$$(N\varrho)a = \sum x\varrho(x^{-1}a) = \sum x\mu(f_{x^{-1}a}) = \mu\left(\sum x f_{x^{-1}a}\right) = a,$$

т. е. $N\varrho$ является тождественным отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_\Pi(A, C)$ тогда и только тогда является нормой некоторого гомоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(A, C)$, когда его можно разложить в композицию следующих П-гомоморфизмов:*

$$A \xrightarrow{g} Z(\Pi) \otimes C \xrightarrow{h} C.$$

Группа $Z(\Pi) \otimes C$ рассматривается здесь как П-модуль, операторы на котором определены формулой $y(x \otimes c) = yx \otimes c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = hg$. Так как Π-модуль $Z(\Pi) \otimes C$ слабо проективен (см. предложение X, 8.1), то существует Z-эндоморфизм ϱ группы $Z(\Pi) \otimes C$, норма $N\varrho$ которого является тождественным отображением. Поэтому $f = hg = h(N\varrho)g = N(h\varrho g)$.

Обратно, пусть $f = Nk$, где $k \in \mathrm{Hom}(A, C)$. Определим гомоморфизмы g и h, полагая $ga = \sum x \otimes k(x^{-1}a)$ и $h(x \otimes c) = xc$. Тогда $hga = \sum xk(x^{-1}a) = (Nk)a = fa$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если модуль A слабо проективен, то указанные в диаграмме* (1) *отображения N^*, g, h являются изоморфизмами, т. е.*

$$\operatorname{Ker} N = IA, \quad \operatorname{Im} N = A^{\Pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.1, существует такой Z-эндоморфизм $\varrho : A \to A$, что $a = \sum_{x \in \Pi} x\varrho(x^{-1}a)$ для любого элемента $a \in A$. Пусть $Na = 0$. Тогда

$$a = \sum x\varrho(x^{-1}a) = \sum x\varrho(x^{-1}a) - \sum \varrho(x^{-1}a) = \sum (x-1)\varrho(x^{-1}a) \in IA.$$

Тем самым показано, что $\operatorname{Ker} g = 0$, так что отображение g изоморфно. Предположим теперь, что $a \in A^{\Pi}$. Тогда $x^{-1}a = a$ для всех $x \in \Pi$ и, следовательно,

$$a = \sum x\varrho(x^{-1}a) = \sum x\varrho(a) = N\varrho a.$$

Таким образом, $\operatorname{Im} N = A^{\Pi}$, так что отображение h изоморфно.

2. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Мы будем рассматривать группы гомологий и когомологий группы Π с коэффициентами в одном и том же левом Π-модуле A. Таким образом, для $n \geq 0$

$$H_n(\Pi, A) = \operatorname{Tor}_n^{\Pi}(Z, A), \quad H^n(\Pi, A) = \operatorname{Ext}_{\Pi}^n(Z, A),$$

где в первой формуле кольцо Z рассматривается как правый, а во второй — как левый Π-модуль.

Кроме этих функторов, мы будем рассматривать также ковариантный функтор N, сопоставляющий каждому Π-модулю A его образ $N(A)$ при норменном гомоморфизме $N : A \to A$.

Диаграмму (1) из предыдущего параграфа можно переписать следующим образом:

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} & N \arrow[dr, "h"] & \\ H_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "N^*"'] & & H^0 \end{tikzcd}$$

где N^*, g, h — естественные отображения функторов.

Каждому из трех функторов и трех отображений диаграммы (1) соответствует (в смысле § V, 10) некоторая производная последовательность. Эти последовательности мы обозначим через DH_0, DH^0, DN, DN^*, Dh, Dg соответственно. Эти шесть производных последовательностей связаны отображениями

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} Dg \arrow[r] & DN \arrow[r] & Dh \arrow[d] \\ DH_0 \arrow[u] \arrow[r] & DN^* \arrow[r] & DH^0 \end{tikzcd}$$

составляющими коммутативную диаграмму.

Например, отображение $DN \to Dh$ определяется из диаграммы

(3)
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "h"'] & H^0 \end{tikzcd}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Все отображения диаграммы* (2) *являются изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, отображение $DN \to Dh$, индуцированное диаграммой (3). Так как, согласно предложению 1.3, отображение $h: N(A) \to H^0(\Pi, A)$ изоморфно всякий раз, когда модуль A проективен, то изоморфность отображения $DN \to Dh$ вытекает из предложения V, 10.3.

В силу предложения 2.1 мы можем все шесть производных последовательностей отождествить в одну последовательность, которую мы будем называть *полной производной последовательностью* группы Π. Эту последовательность мы будем обозначать либо через

$$\ldots, H_n, \ldots, H_1, \widetilde{H}_0, \widetilde{H}^0, H^1, \ldots, H^n, \ldots,$$

либо через

$$\ldots, \hat{H}^{-n}, \ldots, \hat{H}^{-1}, \hat{H}^0, \hat{H}^1, \ldots, \hat{H}^n, \ldots .$$

Таким образом,

$$\hat{H}^n(\Pi, A) = H^n(\Pi, A) = \operatorname{Ext}^n_\Pi(Z, A), \qquad n > 0,$$

$$\hat{H}^0(\Pi, A) = \widetilde{H}^0(\Pi, A) = \operatorname{Coker}(H_0 \longrightarrow H^0) = \\ = \operatorname{Coker}(N \longrightarrow H^0) = A^\Pi/NA,$$

$$\hat{H}^{-1}(\Pi, A) = \widetilde{H}_0(\Pi, A) = \operatorname{Ker}(H_0 \longrightarrow H^0) = \operatorname{Ker}(H_0 \longrightarrow N) = {}_NA/IA,$$

$$\hat{H}^n(\Pi, A) = H_{-n-1}(\Pi, A) = \operatorname{Tor}^\Pi_{-n-1}(Z, A), \qquad n < -1.$$

Благодаря изменению нумерации групп гомологий и введению символа $\hat{H}^n$ мы можем члены полной производной последовательности рассматривать как однородные составляющие некоторого градуированного модуля $\hat{H}(\Pi, A)$. Градуированный функтор $\hat{H}$ представляет собой точную связанную последовательность функторов, т. е. для любой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ Π-модулей имеет место точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow \hat{H}^{n-1}(\Pi, A'') \longrightarrow \hat{H}^n(\Pi, A') \longrightarrow \hat{H}^n(\Pi, A) \longrightarrow \\ \longrightarrow \hat{H}^n(\Pi, A'') \longrightarrow \hat{H}^{n+1}(\Pi, A') \longrightarrow \ldots .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. $\hat{H}(\Pi, A) = 0$ *для любого слабо проективного (или, что равносильно, слабо инъективного) модуля* A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как модуль A слабо проективен, то, согласно предложению X, 8.2, $H_n(\Pi, A) = 0$ для всех $n > 0$. Но модуль A вместе с тем слабо инъективен и потому, согласно предложению X, 8.2а, $H^n(\Pi, A) = 0$ для всех $n > 0$. Наконец, из предложения 1.3 вытекает, что $\widetilde{H}^0(\Pi, A) = 0 = \widetilde{H}_0(\Pi, A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Каждый член полной производной последовательности группы Π является левым сателлитом S_1 последующего члена и правым сателлитом S^1 предыдущего:*

$$\hat{H}^{n-1} = S_1\hat{H}^n, \quad \hat{H}^{n+1} = S^1\hat{H}^n.$$

Непосредственно вытекает из аксиоматического описания сателлитов, приведенного в теореме III, 5.1.

Гомоморфизм $\hat{H}(\Pi, A) \to \hat{H}(\Pi, C)$, индуцированный некоторым Π-гомоморфизмом $f: A \to C$, мы будем обозначать через $\hat{f}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если гомоморфизм $f: A \to C$ является нормой некоторого элемента группы* Hom (A, C), *то* $\hat{f} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.2, гомоморфизм f можно представить в виде сквозного отображения $A \to Z(\Pi) \otimes C \to C$. Так как Π-модуль $Z(\Pi) \otimes C$ слабо проективен (см. предложение X, 8.1), то $\hat{H}(\Pi, Z(\Pi) \otimes C) = 0$ и, следовательно, $\hat{f} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. $r\hat{H}(\Pi, A) = 0$, *где* $r = (\Pi : 1)$ — *порядок группы* Π.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эндоморфизм $f: A \to A$, задаваемый соответствием $a \to ra$, является нормой тождественного отображения Π-модуля A. Следовательно, $\hat{f} = 0$ и потому $r\hat{H}(\Pi, A) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. $\hat{H}(\Pi, A) = 0$, *если группа Π тривиальна* $(\Pi = 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если $nA = 0$ для некоторого целого числа n, взаимно простого с порядком $r = (\Pi : 1)$ группы Π, то* $\hat{H}(\Pi, A) = 0$.

Следует отметить, что в то время как группы $H^n(\Pi, A)$ и $H_n(\Pi, A)$ являются функторами от аргумента Π, полная производная последовательность $\hat{H}(\Pi, A)$ группы Π этим свойством не обладает. До некоторой степени его заменяют те ее свойства, с которыми мы познакомимся в § 8 при изучении соотношений между группой Π и некоторой ее подгруппой π.

Принимая за модуль коэффициентов групп гомологий и когомологий группы Π группу Z с тривиальными Π-операторами, мы получим, что

$$\begin{aligned} &\hat{H}^1(\Pi, Z) = 0, \\ (4) \qquad &\hat{H}^0(\Pi, Z) = Z_r = Z/rZ, \qquad r = (\Pi : 1), \\ &\hat{H}^{-1}(\Pi, Z) = 0, \\ &\hat{H}^{-2}(\Pi, Z) = \Pi/[\Pi, \Pi]. \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений вытекает из того, что каждый скрещенный гомоморфизм $\Pi \to Z$ равен нулю. Второе и третье соотношения вытекают из того, что норменный гомоморфизм $N: Z \to Z$ совпадает с умножением на число r. Последнее соотношение является частным случаем соотношения X, 4, (8).

Представляется также целесообразным дать явное описание связывающего гомоморфизма

$$\delta : \hat{H}^{-1}(\Pi, A'') \longrightarrow \hat{H}^{0}(\Pi, A'), \tag{5}$$

соответствующего произвольной точной последовательности $0 \to A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \to 0$. Подставляя значения функторов $\hat{H}^{-1}$ и $\hat{H}^0$, мы получим, что

$$\delta : {}_N A''/IA'' \longrightarrow A'^{\Pi}/NA'. \tag{5'}$$

Гомоморфизм δ можно описать теперь следующим образом. Для произвольного элемента $a'' \in {}_N A''$ выбирается такой элемент $a \in A$, что $\varphi a = a''$. Так как $\varphi Na = N\varphi a = Na'' = 0$, то существует такой элемент $a' \in A'$, что $\psi a' = Na$. Так как $\psi x a' = xNa = Na = \psi a'$, то элемент a' принадлежит подмодулю A'^{Π}. Гомоморфизм δ сопоставляет элементу a'' образ элемента a' в фактор-модуле A'^{Π}/NA'. Это описание гомоморфизма δ согласуется с его описанием, получающимся из диаграмм, указанных в § V, 10.

3. ПОЛНЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Мы введем здесь новый тип резольвент, позволяющих вычислить полную производную последовательность любой конечной группы как группу гомологий некоторого комплекса.

Начнем с некоторых вспомогательных рассмотрений. Для любого Z-модуля C мы будем через C^0 обозначать Z-модуль $\operatorname{Hom}(C, Z)$. Очевидно, что если модуль C свободен и имеет конечную Z-базу, то таким же будет и модуль C^0. Для любого Z-модуля A гомоморфизм

$$\sigma : C \otimes A \longrightarrow \operatorname{Hom}(C^0, A),$$

определенный формулой

$$[\sigma(c \otimes a)]\, f = (fc)a, \qquad c \in C,\ a \in A,\ f \in C^0$$

[ср. определение гомоморфизма (3) в § VI, 5], является, очевидно, изоморфизмом всякий раз, когда модуль C свободен и имеет конечную Z-базу. Полагая, в частности, $A = Z$, мы получим, что для любого свободного модуля C с конечной Z-базой имеет место изоморфизм $C \approx C^{00}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любой точной последовательности свободных Z-модулей*

$$\ldots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \tag{X}$$

существует «стягивающая гомотопия», т. е. такая система Z-гомоморфизмов $s_n : X_n \to X_{n+1}$, что

(*)[1] $d_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$ *является тождественным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_n = \operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow U_n \xrightarrow{i_n} X_n \xrightarrow{\partial_n} U_{n-1} \longrightarrow 0,$$

где i_n — отображение вложения, а ∂_n — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом d_n. Так как Z-модуль U_{n-1} свободен (теорема I, 5.3) и, следовательно, проективен, то эта последовательность расщепляема. Другими словами, существуют гомоморфизмы

$$U_n \xleftarrow{\varphi_n} X_n \xleftarrow{\psi_n} U_{n-1},$$

которые вместе с гомоморфизмами i_n и ∂_n задают представление модуля X_n в виде прямой суммы. Гомоморфизмы $s_n = \psi_{n+1}\varphi_n$, как легко проверить, удовлетворяют соотношению (*).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любой точной последовательности* (X) *свободных Z-модулей имеет место точная последовательность*

$$(\mathrm{X}^0) \qquad \ldots \longrightarrow X^0_{n-1} \xrightarrow{d^0_{n-1}} X^0_n \xrightarrow{d^0_n} X^0_{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

где $X^0_n = \operatorname{Hom}(X_n, Z)$ и $d^0_n = \operatorname{Hom}(d_{n+1}, Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s^0_n = \operatorname{Hom}(s_{n-1}, Z)$. Тогда для любого n отображение $d^0_{n-1}s^0_n + s^0_{n+1} d^0_n$ тождественно. Поэтому комплекс (X^0) ацикличен.

Заметим, что если свободные Z-модули X_n обладают конечными базами, то модули X^0_n также Z-свободны и имеют конечные базы. Кроме того, в этом случае последовательность (X^{00}) можно отождествить с последовательностью (X).

Перейдем теперь к рассмотрению $Z(\Pi)$-модулей, где Π — некоторая конечная группа. Для любого левого Π-модуля C группу $C^0 = \operatorname{Hom}(C, Z)$ мы можем определить как левый Π-модуль, полагая

$$(1) \qquad (xf)c = f(x^{-1}c).$$

Это определение согласуется с аналогичным определением, данным в § 1, если кольцо Z рассматривать как Π-модуль с тривиальными Π-операторами. Для любого левого Π-модуля A определенный выше гомоморфизм σ является Π-гомоморфизмом. Кроме того, так как каждый $Z(\Pi)$-свободный модуль C с конечной базой является, очевидно, Z-свободным модулем с конечной базой, то для любого такого модуля C гомоморфизм σ является изоморфизмом. Поэтому всякий раз, когда C является $Z(\Pi)$-свободным модулем с конечной

[1] В оригинале это свойство значится под номером (1). — *Прим. перев.*

базой, (левый) Π-модуль $C \otimes A$ можно отождествить с (левым) Π-модулем $\operatorname{Hom}(C^0, A)$. В частности, выбирая в качестве модуля A кольцо Z с тривиальными Π-операторами, мы получим, что любой $Z(\Pi)$-свободный модуль C с конечной базой можно отождествить с $Z(\Pi)$-модулем C^{00}.

Покажем теперь, что если $Z(\Pi)$-модуль C свободен и обладает конечной базой, то тем же свойством обладает и модуль C^0. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $C = Z(\Pi)$. Но в этом случае имеет место естественный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(Z(\Pi), Z) \approx Z(\Pi). \tag{2}$$

Действительно, пусть (e_i) — конечная Z-база модуля $C = Z(\Pi)$, состоящая из всех элементов группы Π, а (e_i^*) — «двойственная база» модуля C^0, определенная формулами

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда легко проверить, что отображение $\varphi : C \to C^0$, для которого $\varphi(e_i) = e_i^*$, является не только Z-изоморфизмом, но и $Z(\Pi)$-изоморфизмом.

Из этого результата, предложения 3.1 и следствия 3.2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любой точной последовательности*

$$\ldots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots, \tag{X}$$

свободных (левых) $Z(\Pi)$-модулей X_n с конечными базами имеет место точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow X^0_{n-1} \xrightarrow{d^0_{n-1}} X^0_n \xrightarrow{d^0_n} X^0_{n+1} \longrightarrow \ldots, \tag{X^0}$$

причем каждый член X^0_n этой последовательности является свободным $Z(\Pi)$-модулем с конечной базой.

Рассмотрим теперь произвольные (левые) Π-модули C и A. Если модули C и A рассматривать как группы (т. е. как Z-модули), то можно построить их тензорное произведение $C \otimes A$. С другой стороны, если группу C рассматривать как правый Π-модуль, Π-операторы в котором действуют по формуле

$$cx = x^{-1}c, \qquad c \in C,\ x \in \Pi,$$

то можно построить тензорное произведение $C \otimes_\Pi A$. Если группу $C \otimes A$ превратить в левый Π-модуль, положив

$$x(c \otimes a) = (xc) \otimes (xa), \qquad c \in C,\ a \in A,\ x \in \Pi,$$

то, как легко видеть, будет иметь место равенство

$$(C \otimes A)_\Pi = C \otimes_\Pi A. \tag{3}$$

Аналогично

$$(\operatorname{Hom}(C, A))^\Pi = \operatorname{Hom}_\Pi(C, A). \tag{3a}$$

Предположим теперь, что модуль C $Z(\Pi)$-свободен и обладает конечной базой. Тогда

$$C \otimes A \approx \operatorname{Hom}(C^0, A)$$

(имеется в виду изоморфизм σ). Заменяя здесь модуль C модулем C^0, мы получим изоморфизм

$$C^0 \otimes A \approx \operatorname{Hom}(C, A). \tag{4}$$

Так как, согласно предложению X, 8.5, модуль $C^0 \otimes A$ слабо проективен (а также слабо инъективен), то, как следует из предложения 3.1, гомоморфизм

$$N^* : (C^0 \otimes A)_\Pi \longrightarrow (C^0 \otimes A)^\Pi$$

является изоморфизмом. Отсюда, используя соотношения (3), (3а) и изоморфизм (4), мы получаем, что для любого (левого) Π-модуля A и любого свободного (левого) Π-модуля C с конечной $Z(\Pi)$-базой имеет место изоморфизм

$$\tau : C^0 \otimes_\Pi A \approx \operatorname{Hom}_\Pi(C, A).$$

Этот изоморфизм задается формулой

$$[\tau(f \otimes a)]c = \sum_{x \in \Pi} f(x^{-1}c)\, xa, \qquad f \in C^0,\ c \in C,\ a \in A. \tag{5}$$

В частности, полагая $A = Z(\Pi)$, мы получим, что для любого $Z(\Pi)$-свободного модуля C с конечной базой имеет место изоморфизм

$$\tau : C^0 \approx \operatorname{Hom}_\Pi(C, Z(\Pi))\,;$$

этот изоморфизм задается формулой

$$(\tau f)c = \sum_{x \in \Pi} f(x^{-1}c)\, x, \qquad f \in C^0,\ c \in C.$$

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к основной теме этого параграфа.

Полной резольвентой X конечной группы Π называется точная последовательность

$$\ldots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \ldots \to X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \to \ldots \to X_{-n} \to \ldots \tag{X}$$

свободных (левых) Π-модулей с конечными базами, в члене X_{-1} которой выбран инвариантный элемент $e \in (X_{-1})^\Pi$, порождающий образ гомоморфизма d_0.

Так как $xe = e$ для любого элемента $x \in \Pi$, то $\operatorname{Im} d_0$ порождается элементом e не только как Π-модуль, но и как Z-модуль. Далее, так как модуль X_{-1} Z-свободен, то $ne \neq 0$ для любого $n \in Z$, $n \neq 0$. Отсюда вытекает, что гомоморфизм d_0 можно представить в виде композиции

$$X_0 \xrightarrow{\epsilon} Z \xrightarrow{\mu} X_{-1} \tag{6}$$

некоторого Π-эпиморфизма ε и такого Π-мономорфизма μ, что $\mu 1 = e$. Рассмотрим точные последовательности

$$(\mathrm{X}_L) \qquad \ldots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0,$$

$$(\mathrm{X}_R) \qquad 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\mu} X_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{-n-1} \longrightarrow X_{-n} \longrightarrow \ldots \; .$$

Последовательность (X_L) является Π-проективной резольвентой модуля Z, состоящей из свободных Π-модулей с конечными базами. Кроме того, согласно предложению 3.3, «двойственная» к последовательности (X_R) последовательность

$$(\mathrm{X}_R^0) \qquad \ldots \longrightarrow X^0_{-n} \longrightarrow X^0_{-n+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X^0_{-1} \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

также является Π-проективной резольвентой модуля Z, состоящей из свободных Π-модулей с конечными базами.

Обратно, из любых двух Π-проективных резольвент (X_L) и (X'_L) модуля Z, состоящих из Π-свободных модулей с конечными базами, можно построить полную резольвенту X группы Π, «сращивая» последовательность (X_L) с соответствующим образом перенумерованной последовательностью (X'^0_L).

Пусть X — произвольная полная резольвента группы Π, а A — произвольный (левый) Π-модуль. Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Pi (X, A).$$

Для $n \geq 0$ мы группу $\mathrm{Hom}_\Pi (X_n, A)$ оставим без изменения, а для $n < 0$ заменим ее изоморфной группой $X^0_n \otimes_\Pi A$ (имеется в виду изоморфизм τ). Исследуем более детально отображение

$$(7) \qquad X^0_{-1} \otimes_\Pi A \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi (X_0, A),$$

индуцированное отображением $d_0 : X_0 \to X_{-1}$. Так как в силу разложения (6) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X^0_{-1} \otimes_\Pi A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Pi(X_{-1}, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Pi(X_0, A) \\
Z \otimes_\Pi A \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_\Pi(Z, A) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

то отображение (7) является композицией отображений

$$X^0_{-1} \otimes_\Pi A \longrightarrow H_0(\Pi, A) \xrightarrow{N^*} H^0(\Pi, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi (X_0, A).$$

Таким образом, в обозначениях § V, 10

$$\mathrm{Hom}_\Pi (X, A) = (X^0_R \otimes_\Pi A, N^*, \mathrm{Hom}_\Pi (X_L, A)).$$

Отсюда в силу предложения V, 10.4 вытекает

ТЕОРЕМА 3.4[1]. *Для любого левого П-модуля A группа $\hat{H}^n(\Pi, A)$ совпадает с группой $H^n(\mathrm{Hom}_\Pi(X, A))$, где X — произвольная полная резольвента группы Π. Для любого гомоморфизма $f: A \to A'$ отображение $\hat{f}$ совпадает с гомоморфизмом, индуцированным соответствующим отображением $\mathrm{Hom}_\Pi(X, A) \to \mathrm{Hom}_\Pi(X, A')$. Связывающие гомоморфизмы $\hat{H}(\Pi, A'') \to \hat{H}(\Pi, A')$ точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ левых П-модулей совпадают со связывающими гомоморфизмами, соответствующими точной последовательности комплексов*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi(X, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi(X, A'') \longrightarrow 0 .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении полной резольвенты можно было бы *свободные* Π-модули с конечными базами заменить *проективными* Π-модулями с конечным числом образующих. Однако нам неизвестно, действительно ли вторая категория модулей строго больше первой[2].

4. УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Тензорное произведение $A \otimes A'$ (над кольцом Z) левых Π-модулей A и A' мы будем рассматривать как левый Π-модуль с диагональными Π-операторами $x(a \otimes a') = xa \otimes xa'$. Если $a \in A^\Pi$ и $a' \in A'^\Pi$, то $x(a \otimes a') = a \otimes a'$ и, следовательно, $a \otimes a' \in (A \otimes A')^\Pi$. Если $a \in A^\Pi$, а $a' = Nb'$, где $b' \in A'$, то $a \otimes a' = a \otimes \sum xb' = \sum x(a \otimes b') = N(a \otimes b')$, т. е. $a \otimes a' \in N(A \otimes A')$. Аналогично $a \otimes a' \in N(A \otimes A')$, если $a \in NA$ и $a' \in A'^\Pi$. Следовательно, тензорное умножение индуцирует некоторый гомоморфизм

$$(1) \qquad \xi : A^\Pi/NA \otimes A'^\Pi/NA' \longrightarrow (A \otimes A')^\Pi/N(A \otimes A'),$$

то есть гомоморфизм

$$\xi : \hat{H}^0(\Pi, A) \otimes \hat{H}^0(\Pi, A') \longrightarrow \hat{H}^0(\Pi, A \otimes A').$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует и притом только одна такая система гомоморфизмов*

$$\xi^{p,q} : \hat{H}^p(\Pi, A) \otimes \hat{H}^q(\Pi, A') \longrightarrow \hat{H}^{p+q}(\Pi, A \otimes A'),$$

определенных для любой пары П-модулей A и A' и для любых целых чисел p, q, что гомоморфизм ξ^{00} совпадает с гомоморфизмом ξ и все

---

[1] В оригинале эта теорема значится под номером 3.2. Она показывает, что для любого n группы $\hat{H}^n(\Pi, A)$ являются (в смысле, объясненном в примечании редактора на стр. 184) группами когомологий. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении групп $\hat{H}^n(\Pi, A)$ авторы используют «когомологическую» терминологию. — *Прим. ред.*

[2] Недавно Е. С. Голод построил пример несвободного проективного Z_p-модуля с двумя образующими, где p — такое простое число, что число классов поля деления круга p-й степени больше единицы (например, $p=23$); см. *УМН*, 14, № 4 (88) (1959), 157. — *Прим. ред.*

гомоморфизмы $\xi^{p,q}$ перестановочны (в смысле предложений XI, 2.5 *и* XI, 2.5′) *со связывающими гомоморфизмами, соответствующими каждому из аргументов A и A'.*

В этом параграфе мы докажем лишь существование умножений $\xi^{p,q}$. Доказательство единственности будет дано в следующем параграфе.

Пусть X — произвольная полная резольвента группы Π с выделенным элементом $e \in X_{-1}$. Рассмотрим двойной комплекс $X \otimes X$ с дифференциалами $d' = d \otimes X$ и $d'' = X \otimes d$ (при определении дифференциала d'', как всегда, принимается во внимание правило знаков). *Отображением*

$$\Phi : X \longrightarrow X \otimes X$$

комплекса X в комплекс $X \otimes X$ мы будем называть такое семейство Π-гомоморфизмов

$$\Phi_{p,q} : X_{p+q} \longrightarrow X_p \otimes X_q,$$

что

(i) $\Phi_{p,q} d = d' \Phi_{p+1,q} + d'' \Phi_{p,q+1}$;

(ii) если $x \in X_0$ и $dx = e$, то $(d \otimes d) \Phi_{0,0} x = e \otimes e$.

Второе свойство равносильно соотношению $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \Phi_{0,0} = \varepsilon$, где $\varepsilon : X_0 \to Z$ — пополняющий эпиморфизм, получающийся из разложения 3, (6) гомоморфизма $d_0 : X_0 \to X_{-1}$.

Для любых коцепей[1] $f \in \mathrm{Hom}_\Pi (X_p, A)$ и $g \in \mathrm{Hom}_\Pi (X_q, A')$ мы определим их произведение $fg \in \mathrm{Hom}_\Pi (X_{p+q}, A \otimes A')$, полагая $fg = (f \otimes g) \Phi_{p,q}$. Ясно, что $d(fg) = (df)g + (-1)^p f(dg)$, и потому, переходя к группам когомологий, мы получим билинейное отображение $\hat{H}(\Pi, A) \otimes \hat{H}(\Pi, A') \to \hat{H}(\Pi, A \otimes A')$. Легко проверить, что это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы.

Таким образом, нам остается доказать существование по крайней мере одного отображения $\Phi : X \to X \otimes X$. Для построения такого отображения мы воспользуемся:

1) некоторой стягивающей гомотопией s комплекса X (существование по крайней мере одной такой гомотопии вытекает из предложения 3.1);

2) некоторым Z-эндоморфизмом $\varrho : X \to X$ (нулевой степени), для которого $N\varrho = I$, где I — тождественное отображение комплекса X. Поскольку однородные составляющие X_n комплекса X проективны, существование по крайней мере одного такого эндоморфизма ϱ вытекает из предложения 1.1.

Пусть теперь

$$s' = s \otimes I, \qquad s'' = I \otimes s,$$
$$\varrho' = \varrho \otimes I, \qquad \varrho'' = I \otimes \varrho.$$

[1] См. примечание на стр. 296. — *Прим. ред.*

Для того чтобы определить гомоморфизм $\Phi_{0,0}$, мы рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & & \downarrow \varepsilon \\ X_0 \otimes X_0 & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

единственная строка которой, очевидно, точна. Так как модуль X_0 проективен, то существует такое отображение $\Phi_{0,0}: X_0 \to X_0 \otimes X_0$, что $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\Phi_{0,0} = \varepsilon$, и, следовательно, $d''d'\Phi_{0,0}d = 0$. Определим теперь гомоморфизмы $\Phi_{p,q}$ для $p + q = 0$ следующими индуктивными формулами:

$$\Phi_{p,-p} = -N(\varrho''s'd''\Phi_{p-1,1-p}), \qquad p > 0,$$
$$\Phi_{-p,p} = -N(\varrho's''d'\Phi_{1-p,p-1}), \qquad p > 0.$$

По индукции легко проверить, что

$$(d'\Phi_{p,-p} + d''\Phi_{p-1,1-p})d = 0 \text{ для всех } p.$$

Пусть гомоморфизмы $\Phi_{p,q}$ уже построены для всех значений p и q, удовлетворяющих неравенству $|p+q| < t$, где t — некоторое положительное целое число. Мы предположим, что эти гомоморфизмы удовлетворяют соотношению (i), когда $-t < p + q < t - 1$, и соотношению

(iii) $(d'\Phi_{p+1,q} + d''\Phi_{p,q+1})d = 0$, когда $p + q = -t$.

В случае, когда $p + q = -t$, мы положим

$$\Psi_{p,q} = d'\Phi_{p+1,q} + d''\Phi_{p,q+1},$$
$$\Phi_{p,q} = N(\varrho'\Psi_{p,q}s).$$

Тогда

$$\Phi_{p,q}d = N(\varrho'\Psi_{p,q}sd) = N(\varrho'\Psi_{p,q}(I - ds)) =$$
$$= N(\varrho'\Psi_{p,q}) = \Psi_{p,q} = d'\Phi_{p+1,q} + d''\Phi_{p,q+1}.$$

Кроме того,

$$(d'\Phi_{p,q} + d''\Phi_{p-1,q+1})d = d'\Psi_{p,q} + d''\Psi_{p-1,q+1} =$$
$$= d'd''\Phi_{p,q+1} + d''d'\Phi_{p,q+1} = 0,$$

т. е. гомоморфизмы $\Phi_{p,q}$ также удовлетворяют соотношению (iii).

Наконец, в случае, когда $p + q = t$, мы положим

$$\Phi_{p,q} = N(s'\Phi_{p-1,q}d\varrho).$$

Тогда

$$d'\Phi_{p,q} = N((I - s'd')\Phi_{p-1,q}d\varrho) = \Phi_{p-1,q}d - N(s'd'\Phi_{p-1,q}d\varrho) =$$
$$= \Phi_{p-1,q}d + N(s'd''\Phi_{p-2,q+1}d\varrho) = \Phi_{p-1,q}d - d''N(s'\Phi_{p-2,q+1}d\varrho) =$$
$$= \Phi_{p-1,q}d - d''\Phi_{p-1,q+1}.$$

Таким образом, гомоморфизмы $\Phi_{p,q}$ удовлетворяют соотношению (i).

Тем самым существование отображения Φ доказано.

5. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Метод, которым мы докажем единственность умножений, понадобится нам в дальнейшем еще несколько раз. Поэтому мы изложим его в общем виде, пригодном для использования и в других аналогичных ситуациях.

Пусть Π — фиксированная конечная группа; символами $A, A_1, \ldots, A_n, B, C$ и т. п. мы будем обозначать левые Π-модули, а символами $U_1, \ldots, U_k, V$ — точные связанные последовательности ковариантных функторов одного аргумента. *Отображением*

$$F : U_1 \otimes \ldots \otimes U_k \longrightarrow V$$

мы будем называть семейство гомоморфизмов

$$F : U_1^{i_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes U_k^{i_k}(A_k) \longrightarrow V^{i_1+\ldots+i_k}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_k),$$

естественных относительно Π-гомоморфизмов модулей $A_1, \ldots, A_k$ и в следующем смысле перестановочных со связывающими гомоморфизмами: для любой точной последовательности $0 \to A'_j \to A_j \to A''_j \to 0$ Π-модулей, расщепляемой над кольцом Z, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
U_1(A_1) \otimes \ldots \otimes U_j(A''_j) \otimes \ldots \otimes U_k(A_k) & \longrightarrow & V(A_1 \otimes \ldots \otimes A''_j \otimes \ldots \otimes A_k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
U_1(A_1) \otimes \ldots \otimes U_j(A'_j) \otimes \ldots \otimes U_k(A_k) & \longrightarrow & V(A_1 \otimes \ldots \otimes A'_j \otimes \ldots \otimes A_k)
\end{array}$$

ТЕОРЕМА 5.1 (Теорема единственности). *Если для любого Π-модуля A*

$$U_i(\mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), A)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k,$$
$$V(Z(\Pi) \otimes A) = 0,$$

то любые два отображения

$$F, G : U_1 \otimes \ldots \otimes U_k \longrightarrow V,$$

совпадающие на группах $U_1^0 \otimes \ldots \otimes U_k^0$, совпадают всюду.

Здесь группы $Z(\Pi) \otimes A$ и $\mathrm{Hom}\,(Z(\Pi), A)$ рассматриваются как Π-модули с операторами

$$y(x \otimes a) = yx \otimes a, \qquad (yf)\,x = f(xy).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку разность $F - G$ также является отображением $U_1 \otimes \ldots \otimes U_k \to V$, мы можем предполагать, что $G = 0$, и доказывать, что $F = 0$. Ради сокращения записи мы ограничимся рассмотрением случая, когда $k = 2$.

Пусть нам уже известно, что отображение $F^{p,q} : U_1^p(A_1) \otimes U_2^q(A_2) \to V^{p+q}(A_1 \otimes A_2)$ равно нулю. Рассмотрим точную последовательность

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow Z(\Pi) \otimes A_1 \xrightarrow{\varphi} A_1 \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(x \otimes a) = a$ и $B = \operatorname{Ker} \varphi$. Рассматривая Z-гомоморфизм $\varphi' : A_1 \to Z(\Pi) \otimes A_1$, определенный формулой $\varphi' a = 1 \otimes a$, мы немедленно получаем, что точная последовательность (1) расщепляема над кольцом Z. Поэтому имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow B \otimes A_2 \longrightarrow Z(\Pi) \otimes A_1 \otimes A_2 \longrightarrow A_1 \otimes A_2 \longrightarrow 0,$$

а следовательно, и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1^{p-1}(A_1) \otimes U_2^q(A_2) \arrow[r, "F^{p-1,q}"] \arrow[d, "\delta \otimes i"] & V^{p+q-1}(A_1 \otimes A_2) \arrow[d, "\Delta"] \\ U_1^p(B) \otimes U_2^q(A_2) \arrow[r, "F^{p,q}"'] & V^{p+q}(B \otimes A_2) \end{tikzcd}$$

Так как $F^{p,q} = 0$, то $\Delta F^{p-1,q} = 0$. Но, по предположению, $V(Z(\Pi) \otimes A_1 \otimes A_2) = 0$ и, следовательно, связывающий гомоморфизм Δ является изоморфизмом. Поэтому $F^{p-1,q} = 0$. Проводя совершенно аналогичные рассуждения для второго аргумента, мы докажем, что и $F^{p,q-1} = 0$.

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\psi} \operatorname{Hom}(Z(\Pi), A_1) \longrightarrow B' \longrightarrow 0,$$

где $(\psi a)x = xa$ и $B' = \operatorname{Coker} \psi$. Для этой последовательности также существует расщепляющий Z-гомоморфизм $\psi' : \operatorname{Hom}(Z(\Pi), A_1) \to A_1$, определяемый формулой $\psi' f = f1$. Таким образом, точная последовательность (2) расщепляема над кольцом Z. Поэтому имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow A_1 \otimes A_2 \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z(\Pi), A_1) \otimes A_2 \longrightarrow B' \otimes A_2 \longrightarrow 0,$$

а следовательно, и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1^p(B') \otimes U_2^q(A_2) \arrow[r, "F^{p,q}"] \arrow[d, "\delta \otimes i"] & V^{p+q}(B' \otimes A_2) \arrow[d, "\Delta"] \\ U_1^{p+1}(A_1) \otimes U_2^q(A_2) \arrow[r, "F^{p+1,q}"'] & V^{p+q+1}(A_1 \otimes A_2) \end{tikzcd}$$

Так как $F^{p,q} = 0$, то $F^{p+1,q}(\delta \otimes i) = 0$. Но, по предположению, $U_1(\operatorname{Hom}(Z(\Pi), A_1)) = 0$ и, следовательно, связывающий гомоморфизм δ является изоморфизмом. Поэтому $F^{p+1,q} = 0$. Совершенно аналогично доказывается, что $F^{p,q+1} = 0$. Тем самым теорема единственности полностью доказана.

Применяя эту теорему к случаю, когда $U_1 = U_2 = V = \hat{H}$, мы немедленно получим утверждение теоремы 4.1 о единственности умножений $\xi^{p,q}$.

Произведение $\xi^{p,q}(a \otimes b) \in \hat{H}^{p+q}(\Pi, A \otimes A')$ элементов $a \in \hat{H}^p(\Pi, A)$ и $b \in \hat{H}^q(\Pi, A')$ мы будем обозначать через ab. Тензорное умножение мы будем рассматривать как операцию коммутативную и ассоциативную, т. е. будем отождествлять тензорные произведения $A \otimes A'$ и $A \otimes (A' \otimes A'')$ с тензорными произведениями $A' \otimes A$ и $(A \otimes A') \otimes A''$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для любых элементов* $a \in \hat{H}^p(\Pi, A)$ *и* $b \in \hat{H}^q(\Pi, A')$ *имеет место соотношение* $ab = (-1)^{pq} ba$. *Точнее: элементы* $ab \in \hat{H}^{p+q}(\Pi, A \otimes A')$ *и* $(-1)^{pq} ba \in H^{p+q}(\Pi, A' \otimes A)$ *соответствуют друг другу при изоморфизме, индуцированном естественным изоморфизмом* $A \otimes A' \approx A' \otimes A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Для любых элементов* $a \in \hat{H}^p(\Pi, A)$, $b \in \hat{H}^q(\Pi, A')$, $c \in \hat{H}^r(\Pi, A'')$ *имеет место соотношение* $a(bc) = (ab)c$.

Для доказательства предложения 5.2 достаточно проверить, что формула $\xi^{p,q}(a \otimes b) = (-1)^{pq} ba$ определяет отображение, обладающее всеми перечисленными в теореме 4.1 свойствами. Предложение 5.3 вытекает из теоремы единственности, примененной к случаю, когда $U_1 = U_2 = U_3 = V = \hat{H}$ и

$$F(a \otimes b \otimes c) = a(bc), \qquad G(a \otimes b \otimes c) = (ab)c.$$

Мы будем обозначать через 1 элемент группы

$$\hat{H}^0(\Pi, Z) = Z_r = Z/rZ, \qquad r = (\Pi : 1),$$

соответствующий смежному классу $1 + rZ$ (т. е. единице кольца Z_r).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Для любого элемента* $a \in \hat{H}^p(\Pi, A)$ *имеет место соотношение* $1a = a = a1$ *(модули* $Z \otimes A$ *и* $A \otimes Z$ *предполагаются отождествленными с модулем* A*).*

Для доказательства достаточно применить теорему единственности к случаю, когда $U = V = \hat{H}$, $Fa = a$, $Ga = 1a$.

Каждый Π-гомоморфизм $A \otimes A' \to B$ позволяет построить умножение

$$\hat{H}(\Pi, A) \otimes \hat{H}(\Pi, A') \longrightarrow \hat{H}(\Pi, B),$$

являющееся композицией отображения $\hat{H}(\Pi, A) \otimes \hat{H}(\Pi, A') \to \hat{H}(\Pi, A \otimes A')$ с отображением $\hat{H}(\Pi, A \otimes A') \to \hat{H}(\Pi, B)$. В частности, если модуль A является кольцом и Π-операторы на модуле A удовлетворяют соотношению $x(a_1a_2) = (xa_1)(xa_2)$, то группу $\hat{H}(\Pi, A)$ также можно превратить в кольцо. Единица 1 кольца A является инвариантным элементом, и ее образ в факторгруппе $A^\Pi/NA = \hat{H}^0(\Pi, A)$ служит единицей кольца $\hat{H}(\Pi, A)$. Если кольцо A коммутативно, то кольцо $\hat{H}(\Pi, A)$ косокоммутативно.

6. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Точно так же, как в § XI, 8, мы с помощью Π-гомоморфизма

$$\varphi : \mathrm{Hom}(A, C) \otimes A \longrightarrow C, \qquad ({}_\Pi A, {}_\Pi C),$$

задаваемого соответствием $f \otimes a \to fa$, можем определить *модифицированное умножение*

$$(1) \qquad \hat{H}(\Pi, \mathrm{Hom}(A, C)) \otimes \hat{H}(\Pi, A) \longrightarrow \hat{H}(\Pi, C).$$

Здесь, как и раньше, группа $\mathrm{Hom}(A, C)$ рассматривается как Π-модуль, на котором Π-операторы действуют по формуле $(xf)a = x(f(x^{-1}a))$. Образ элемента $a \otimes b$ при отображении (1) мы попрежнему будем обозначать через ab (а иногда через $a \cdot b$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Пусть* $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \to 0$ — *такая точная последовательность, что последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'', C) \xrightarrow{j'} \mathrm{Hom}(A, C) \xrightarrow{i'} \mathrm{Hom}(A', C) \longrightarrow 0$$

также точна. Тогда для любых элементов $a \in \hat{H}^p(\Pi, \mathrm{Hom}(A', C))$, $b \in \hat{H}^q(\Pi, A'')$

$$(\delta a) \cdot b + (-1)^p a \cdot \delta b = 0,$$

где δ — *соответствующие связывающие гомоморфизмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — произвольная полная резольвента группы Π и $g'' : X_q \to A''$ — один из коциклов класса когомологий b. Тогда существуют такая коцепь $g : X_q \to A$ и такой коцикл $g' : X_{q+1} \to A'$, что $jg = g''$ и $ig' = dg$. По определению, коцикл g' принадлежит классу когомологий δb. Аналогично, выбрав в классе когомологий a некоторый коцикл $f' : X_p \to \mathrm{Hom}(A', C)$, мы можем найти такую коцепь $f : X_p \to \mathrm{Hom}(A, C)$ и такой коцикл $f'' : X_{p+1} \to \mathrm{Hom}(A'', C)$, что $i'f = f'$ и $j'f'' = df$. Коцикл f'' будет тогда принадлежать классу когомологий δa. С другой стороны (мы используем обозначения, введенные в § 4),

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) = (df) \cdot g + (-1)^p f \cdot dg = j'f'' \cdot g + (-1)^p f \cdot ig' = \\ = f'' \cdot jg + (-1)^p i'f \cdot g' = f'' \cdot g'' + (-1)^p f' \cdot g', \end{aligned}$$

откуда и следует наше утверждение.

Рассмотрим теперь отображения

$$(2) \qquad \gamma_{p,q} : \hat{H}^p(\Pi, \mathrm{Hom}(A, C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\hat{H}^q(\Pi, A), \hat{H}^{p+q}(\Pi, C)),$$

определенные формулой

$$(\gamma_{p,q} a)b = ab.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если для некоторого фиксированного Π-модуля C и данных индексов p, q отображение $\gamma_{p,q}$ является изоморфизмом, каков бы ни был Π-модуль A, то этим же свойством обладают и все отображения $\gamma_{p',q'}$, для которых $p' + q' = p + q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность 5, (1)

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow Z(\Pi) \otimes A \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Так как эта последовательность Z-расщепляема, то имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z(\Pi) \otimes A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, C) \longrightarrow 0.$$

Следовательно, применимо предложение 6.1, согласно которому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\hat{H}^p(\mathrm{Hom}(B,C)) & \xrightarrow{\gamma_{p,q}} & \mathrm{Hom}(\hat{H}^q(B), \hat{H}^{p+q}(C)) \\ \downarrow{\scriptstyle (-1)^{p+1}\delta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\delta, \hat{H}^{p+q}(C))} \\ \hat{H}^{p+1}(\mathrm{Hom}(A,C)) & \xrightarrow[\gamma_{p+1,q-1}]{} & \mathrm{Hom}(\hat{H}^{q-1}(A), \hat{H}^{p+q}(C))\end{array}$$

(символ Π мы всюду опускаем). Поскольку модуль $Z(\Pi) \otimes A$ слабо проективен, из предложения X, 8.5 вытекает, что модуль $\mathrm{Hom}(Z(\Pi) \otimes A, C)$ слабо инъективен. Поэтому оба входящих в диаграмму связывающих гомоморфизма являются изоморфизмами. Так как, по предположению, отображение $\gamma_{p,q}$ изоморфно, то изоморфно и отображение $\gamma_{p+1,\,q-1}$. Совершенно аналогично с помощью точной последовательности 5, (2) можно доказать, что и отображение $\gamma_{p-1,\,q+1}$ изоморфно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Композиция отображения*

$$\gamma_{0q} : \hat{H}^0(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\hat{H}^q(\Pi, A), \hat{H}^q(\Pi, C))$$

с естественным эпиморфизмом

$$(3) \qquad \mathrm{Hom}_\Pi(A,C) \longrightarrow \hat{H}^0(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C))$$

совпадает с гомоморфизмом

$$\mathrm{Hom}_\Pi(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\hat{H}^q(\Pi, A), \hat{H}^q(\Pi, C)),$$

сопоставляющим каждому гомоморфизму $f \in \mathrm{Hom}_\Pi(A,C)$ индуцированное отображение

$$\hat{f} : \hat{H}^q(\Pi, A) \longrightarrow \hat{H}^q(\Pi, C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h : A = Z \otimes A \to \mathrm{Hom}(A,C) \otimes A$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом $g : Z \to \mathrm{Hom}(A,C)$, для которого $g1 = f$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}\hat{H}^0(\Pi, Z) \otimes \hat{H}^q(\Pi, A) & \longrightarrow & \hat{H}^q(\Pi, Z \otimes A) & \longrightarrow & \hat{H}^q(\Pi, A) \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{g} \otimes i} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{h}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}} \\ \hat{H}^0(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C)) \otimes \hat{H}^q(\Pi, A) & \longrightarrow & \hat{H}^q(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C) \otimes A) & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{H}^q(\Pi, C)\end{array}$$

Очевидно, что $\hat{g}1 = a$, где 1 — единица кольца $\hat{H}(\Pi, Z)$, а a — элемент группы $\hat{H}^0(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C))$, соответствующий гомоморфизму f. Следовательно, для любого элемента $b \in \hat{H}^q(\Pi, A)$

$$(\gamma_{0,q}a)b = \hat{\varphi}(a \cdot b) = \hat{\varphi}(\hat{g}1 \cdot b) = \hat{\varphi}\,\hat{h}(1 \cdot b) = \hat{f}(1 \cdot b) = \hat{f}b$$

($1b = b$ в силу предложения 5.3).

ТЕОРЕМА 6.4 (ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ). *Пусть C — произвольный Z-инъективный Π-модуль с тривиальными Π-операторами (другими словами, произвольная полная абелева группа). Тогда для любого Π-модуля A задаваемый формулой $(\gamma_{p-1,-p}a)b = ab$ гомоморфизм*

$$(4) \qquad \gamma_{p-1,-p} : \hat{H}^{p-1}(\Pi, \mathrm{Hom}(A,C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\hat{H}^{-p}(\Pi, A), \hat{H}^{-1}(\Pi, C))$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что группа $\hat{H}^{-1}(\Pi, C) = {}_NC/IC = {}_rC$ является подгруппой группы C, состоящей из всех таких элементов $c \in C$, что $rc = 0$, где $r = (\Pi : 1)$. С другой стороны, так как $r\hat{H}(\Pi, A) = 0$, то любой гомоморфизм $\hat{H}(\Pi, A) \to C$ автоматически является гомоморфизмом $\hat{H}(\Pi, A) \to {}_rC$. Таким образом, можно считать, что

$$(4') \qquad \gamma_{p-1, -p} : \hat{H}^{p-1}(\Pi, \operatorname{Hom}(A, C)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\hat{H}^{-p}(\Pi, A), C).$$

Согласно предложению 6.2, достаточно доказать, что изоморфно отображение $\gamma_{0, -1}$. Так как $[\operatorname{Hom}(A, C)]^\Pi = \operatorname{Hom}_\Pi(A, C)$, то

$$\gamma_{0, -1} : \operatorname{Hom}_\Pi(A, C)/N\operatorname{Hom}(A, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}({}_NA/IA, C).$$

Из предложения 6.3 вытекает, что отображение $\gamma_{0,-1}$ получается при ограничении области определения Π-гомоморфизмов $A \to C$ подгруппой ${}_NA$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $f : {}_NA \to C$, для которого $f(IA) = 0$. Поскольку группа C инъективна, гомоморфизм f можно продолжить до некоторого гомоморфизма $g : A \to C$. Так как $g(IA) = 0$, то $g \in \operatorname{Hom}_\Pi(A, C)$. Тем самым показано, что отображение $\gamma_{0, -1}$ эпиморфно. Рассмотрим теперь произвольный Π-гомоморфизм $g : A \to C$, для которого $g({}_NA) = 0$. Так как последовательность $0 \to {}_NA \to A \xrightarrow{N} A$ точна, а модуль C Z-инъективен, то имеет место точная последовательность

$$\operatorname{Hom}(A, C) \xrightarrow{N} \operatorname{Hom}(A, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}({}_NA, C) \longrightarrow 0.$$

Следовательно, существует такой гомоморфизм $h \in \operatorname{Hom}(A, C)$, что гомоморфизм g является композицией $A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{h} C$. Но в таком случае

$$(Nh)a = \sum xh(x^{-1}a) = \sum h(x^{-1}a) = h(Na) = ga,$$

т. е. $g \in N \operatorname{Hom}(A, C)$. Тем самым показано, что отображение $\gamma_{0, -1}$ мономорфно. Теорема 6.4, таким образом, полностью доказана.

Полагая $C = T = R/Z$, где R — аддитивная группа действительных чисел, и используя введенное в § VII, 6 обозначение $D(A) = \operatorname{Hom}(A, T)$, мы получим

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *Для любого Π-модуля A гомоморфизм*

$$(5) \qquad \gamma_{p-1, -p} : \hat{H}^{p-1}(\Pi, D(A)) \longrightarrow D(\hat{H}^{-p}(\Pi, A))$$

является изоморфизмом.

Если, в частности, $A = Z$, то $D(A) = T$, так что имеет место изоморфизм

$$(6) \qquad \gamma_{p-1, -p} : \hat{H}^{p-1}(\Pi, T) \approx D(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z))$$

В действительности группу $D(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z))$ можно заменить группой $\operatorname{Hom}(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z), \hat{H}^{-1}(\Pi, T))$, где $\hat{H}^{-1}(\Pi, T) = {}_rT$ — циклическая группа порядка $r = (\Pi : 1)$.

ТЕОРЕМА 6.6 (Теорема двойственности над кольцом целых чисел). *Отображение*

$$\gamma_{p,-p} : \hat{H}^p(\Pi, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z), Z_r)$$

является изоморфизмом. Точнее: для каждого гомоморфизма $\varphi : \hat{H}^{-p}(\Pi, Z) \to Z_r = \hat{H}^0(\Pi, Z)$ *в группе*[1] $\hat{H}^p(\Pi, Z)$ *существует такой однозначно определенный элемент* a, *что для любого элемента* $b \in \hat{H}^{-p}(\Pi, Z)$

$$\varphi b = ab.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0,$$

где R — аддитивная группа действительных чисел с тривиальными Π-операторами. Пусть δ — соответствующий связывающий гомоморфизм $\hat{H}^p(\Pi, T) \to \hat{H}^{p+1}(\Pi, Z)$, а $\varrho : R \to R$ — эндоморфизм, определенный формулой $\varrho t = r^{-1}t$, где $t \in R$ и $r = (\Pi : 1)$. Очевидно, что отображение $N\varrho = r\varrho$ тождественное. Следовательно, согласно предложению 1.1, модуль R слабо проективен и, значит, $\hat{H}(\Pi, R) = 0$. Поэтому связывающий гомоморфизм δ является изоморфизмом.

С другой стороны, $(\delta a)b = \delta(ab)$ для любых элементов $a \in \hat{H}^p(\Pi, T)$, $b \in \hat{H}^q(\Pi, Z)$[2]. В силу изоморфизма (6) теорема следует отсюда непосредственно.

---

[1] То есть в группе $\hat{H}^p(\Pi, \mathrm{Hom}\,(Z, Z))$. — *Прим. ред.*

[2] Соотношение

(*) $$(\delta a)b = \delta(ab)$$

для элементов $a \in \hat{H}^{p-1}(\Pi, T)$, $b \in \hat{H}^{-p}(\Pi, Z)$ равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^{p-1}(\Pi, T) & \xrightarrow{\gamma_{p-1,-p}} & \mathrm{Hom}\,(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z), \hat{H}^{-1}(\Pi, T)) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Hom}\,(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z),\, \delta)} \\
\hat{H}^p(\Pi, Z) & \xrightarrow{\gamma_{p,-p}} & \mathrm{Hom}\,(\hat{H}^{-p}(\Pi, Z), \hat{H}^0(\Pi, Z))
\end{array}$$

Для доказательства соотношения (*) рассмотрим произвольную полную резольвенту X группы Π.

Пусть $f : X_{p-1} \to T$ — произвольный коцикл класса когомологий a. Тогда, по определению связывающего гомоморфизма, элемент $\delta a \in \hat{H}^p(\Pi, Z)$ является классом когомологий коцикла $f'' : X_p \to Z$, связанного с коциклом f соотношением

$$if'' = df',$$

где $f' : X_{p-1} \to R$ — такая коцепь, что $jf' = f$ (здесь i и j — естественные отображения $Z \to R$ и $R \to T$ соответственно). Далее, произведение $(\delta a)b$ является, по определению, классом когомологий коцикла $f''g$ (обозначения см. § 4), где $g : X_{-p} \to Z$ — произвольный коцикл класса когомологий b. С другой стороны,

$$i(f''g) = d(f'g)$$

и

$$j(f'g) = fg,$$

т. е. коцикл $f''g$ принадлежит классу когомологий $\delta(ab)$. — *Прим. ред.*

Теорема 6.6. позволяет нам к перечисленным в списке 2, (4) значениям групп $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ добавить группу

$$\hat{H}^2(\Pi, Z) \approx \mathrm{Hom}(\Pi/[\Pi, \Pi], Z_r), \qquad r = (\Pi : 1). \tag{7}$$

7. ПРИМЕРЫ

В качестве первого примера рассмотрим циклическую группу Π порядка h с образующей x. В кольце $Z(\Pi)$, представляющем собой факторкольцо кольца многочленов $Z[x]$ по идеалу, порожденному многочленом $x^h - 1$, мы, кроме элемента $N = \sum_{0 \leq i < h} x^i$, рассмотрим еще элемент $T = x - 1$. Таким образом, для любого Π-модуля A мы будем иметь два эндоморфизма

$$N : A \longrightarrow A, \quad T : A \longrightarrow A.$$

Ядром эндоморфизма T является, очевидно, подмодуль A^Π, а его образом — подмодуль IA. Следовательно, ядро и образ эндоморфизма T не зависят от выбора образующей x.

Полагая

$$X_n = Z(\Pi), \quad d_{2n} = N, \quad d_{2n+1} = T$$

и отмечая в модуле X_{-1} элемент $N = d_0 1$, мы, очевидно, получим полную резольвенту X группы Π. Точность последовательности

$$\ldots \longrightarrow Z(\Pi) \xrightarrow{T} Z(\Pi) \xrightarrow{N} Z(\Pi) \xrightarrow{T} Z(\Pi) \longrightarrow \ldots$$

легко доказать или непосредственно или с помощью стягивающей гомотопии s, определенной формулами:

$$sx^k = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 0, \\ 1 + x + \ldots + x^{k-1}, \text{ если } k \geq 1, \end{cases} \quad \text{на } X_n \text{ с четным } n,$$

$$sx^k = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leq k < h - 1, \\ 1, \text{ если } k = h - 1, \end{cases} \quad \text{на } X_n \text{ с нечетным } n.$$

Для произвольного Π-модуля A комплекс $\mathrm{Hom}_\Pi(X, A)$ имеет вид

$$\ldots \longleftarrow A \xleftarrow{N} A \xleftarrow{T} A \xleftarrow{N} A \xleftarrow{T} A \longleftarrow \ldots,$$

где на нечетных местах стоит гомоморфизм N, а на четных — гомоморфизм T. Поэтому

$$\hat{H}^{2n}(\Pi, A) = A^\Pi/NA, \quad \hat{H}^{2n+1}(\Pi, A) = {}_N A/IA.$$

Если Π-операторы на модуле A тривиальны, то

$$\hat{H}^{2n}(\Pi, A) = A_h, \quad \hat{H}^{2n+1}(\Pi, A) = {}_h A.$$

В частности,

$$\hat{H}^{2n}(\Pi, Z) = Z_h, \quad \hat{H}^{2n+1}(\Pi, Z) = 0.$$

Для вычисления умножения нам необходимо знать отображение $\Phi : X \to X \otimes X$, т. е. систему отображений $\Phi_{p,q} : X_{p+q} \to X_p \otimes X_q$. Мы определим это отображение, полагая

$$\Phi_{p,q} 1 = 1 \otimes 1, \qquad \text{если } p \text{ четное,}$$
$$\Phi_{p,q} 1 = 1 \otimes x, \qquad \text{если } p \text{ нечетное, а } q \text{ четное,}$$
$$\Phi_{p,q} 1 = \sum_{0 \le m < n \le h-1} x^m \otimes x^n, \quad \text{если } p \text{ и } q \text{ нечетные.}$$

В том, что так определенные отображения $\Phi_{p,q}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) из § 4, нетрудно убедиться с помощью тождества

$$(x \otimes x - 1 \otimes 1) \sum_{0 \le m < n \le h-1} x^m \otimes x^n = N \otimes 1 - 1 \otimes N,$$

имеющего место в кольце $\Lambda \otimes \Lambda$.

В явном виде умножение классов когомологий описывается следующим образом: если элемент $a \in A$ является представителем некоторого класса когомологий из группы $\hat{H}^p(\Pi, A)$ (таким образом, $a \in A^\Pi$, если p четное, и $a \in {}_N A$, если p нечетное), а элемент $a' \in A'$ — представителем некоторого класса когомологий из группы $\hat{H}^q(\Pi, A')$, то представителем произведения этих классов [принадлежащего группе $\hat{H}^{p+q}(\Pi, A \otimes A')$], является элемент

$$a \otimes a', \qquad \text{если } p \text{ или } q \text{ четное,}$$
$$\sum_{0 \le m < n \le h} x^m a \otimes x^n a', \quad \text{если } p \text{ и } q \text{ нечетные.}$$

Последнее выражение значительно упрощается, если Π-операторы на модулях A и A' тривиальны. Действительно, в этом случае оно сводится к выражению

$$\frac{h(h-1)}{2} a \otimes a'.$$

При этом $a \in {}_h A$, $a' \in {}_h A'$ (ибо p и q нечетные). Поскольку произведение принадлежит группе $\hat{H}^{p+q}(\Pi, A \otimes A') = (A \otimes A')_h$, коэффициент $\frac{h(h-1)}{2}$ можно привести по модулю h. В результате мы получаем, что (при нечетных p и q)

$$aa' = \frac{h}{2} a \otimes a', \quad \text{если } h \text{ четное}^{1)},$$
$$aa' = 0, \qquad \text{если } h \text{ нечетное.}$$

При желании вести рассмотрение в рамках теории, построенной в гл. X, мы должны полную резольвенту X заменить ее положитель-

[1] Строго говоря, в правой части этой формулы должно стоять не указанное выражение, а его образ в группе $(A \otimes A')_h$. — *Прим. ред.*

ной частью X_L. В результате мы получим следующие группы гомологий и когомологий (группа Π по-прежнему предполагается циклической):

$$H_0(\Pi, A) = A/IA, \quad H_{2p+1}(\Pi, A) = A^{\Pi}/NA, \quad H_{2p+2}(\Pi, A) = {}_NA/IA,$$
$$H^0(\Pi, A) = A^{\Pi}, \quad H^{2p+1}(\Pi, A) = {}_NA/IA, \quad H^{2p+2}(\Pi, A) = A^{\Pi}/NA.$$

Умножения $\smile$ и $\frown$ в этих группах вычисляются с помощью отображения $\Phi_L : X_L \to X_L \otimes X_L$, индуцированного указанным выше отображением Φ. Кроме этих умножений, мы можем также определить и умножения $\pitchfork$ и $\curlyvee$. Отображение $X_L \otimes_{\Pi} X_L \to X_L$, необходимое для вычисления последних умножений, мы определим следующим образом: обозначив через y_p единицу кольца $X_p = Z(\Pi)$, мы превратим комплекс X_L в коммутативную градуированную дифференциальную $Z(\Pi)$-алгебру, положив

$$y_{2p}\, y_{2q} = \binom{p+q}{p} y_{2p+2q},$$
$$y_{2p+1}\, y_{2q} = y_{2q}\, y_{2p+1} = \binom{p+q}{p} y_{2p+2q+1},$$
$$y_{2p+1}\, y_{2q+1} = 0.$$

Заметив, что $y_1 y_{2p} = y_{2p+1}$, мы можем эту алгебру отождествить с тензорным произведением

$$Z(\Pi) \otimes E(y_1) \otimes P(y_2, y_4, \ldots, y_{2p}, \ldots),$$

где $E(y_1)$ — внешняя Z-алгебра от одного неизвестного y_1, а P — градуированная Z-алгебра, порожденная элементами $y_2, y_4, \ldots$ (степени этих элементов считаются равными их индексам), произведения которых определяются формулой

$$y_{2p}\, y_{2q} = \binom{p+q}{p} y_{2p+2q}.$$

Дифференциал в этой алгебре определяется формулами:

$$dx = 0, \text{ если } x \in \Pi, \quad dy_1 = T, \quad dy_2 = Ny_1, \quad dy_{2p+2} = Ny_1y_{2p}.$$

В качестве второго примера мы рассмотрим группу Π с двумя образующими x и y, подчиненными соотношениям

$$x^t = y^2, \quad xyx = y,$$

где t — некоторое неотрицательное целое число. Итерируя второе соотношение, мы получим соотношение $x^tyx^t = y$, из которого вытекает, что $x^{2t} = 1$. Отсюда следует, что произвольный элемент $w \in \Pi$ имеет единственное каноническое представление вида

$$w = x^m y^{\delta}, \quad \text{где } 0 \leq m < 2t, \quad \delta = 0, 1.$$

Следовательно, порядок группы Π равен $4t$. Легко видеть, что соответствия

$$x \longrightarrow e^{\pi i/t}, \quad y \longrightarrow j$$

определяют изоморфное вложение группы Π в группу кватернионов, по модулю равных единице. Такого рода группы обычно рассматриваются лишь для случая, когда число t является некоторой степенью двойки, и называются *обобщенными группами кватернионов*.

Полную резольвенту X группы Π можно построить следующим образом: пусть $a_p, b_p, b'_p, c_p, c'_p, e_p$ — некоторые символы, и пусть

$$\begin{aligned}
X_{4p} &= \Lambda a_p, \text{ где } \Lambda = Z(\Pi),\\
X_{4p+1} &= \Lambda b_p + \Lambda b'_p,\\
X_{4p+2} &= \Lambda c_p + \Lambda c'_p,\\
X_{4p+3} &= \Lambda e_p,\\
da_p &= Ne_{p-1},\\
db_p &= (x-1)a_p,\\
db'_p &= (y-1)a_p,\\
dc_p &= Lb_p - (y+1)b'_p, \text{ где } L = 1 + x + \ldots + x^{t-1},\\
dc'_p &= (xy+1)b_p + (x-1)b'_p,\\
de_p &= (x-1)c_p - (xy-1)c'_p.
\end{aligned}$$

Отмеченным элементом модуля X_{-1} считаем элемент Ne_{-1}. Соотношение $dd = 0$ проверяется прямым подсчетом. Проверка ацикличности также сводится к серии простых вычислений, которые мы здесь опустим.

Если Π-операторы на модуле A тривиальны, то группы $\hat{H}(\Pi, A)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{4p}(\Pi, A) &= A_{4t},\\
\hat{H}^{4p+1}(\Pi, A) &= \begin{cases} {}_2A + {}_2A, & \text{если } t \text{ четно},\\ {}_4A, & \text{если } t \text{ нечетно},\end{cases}\\
\hat{H}^{4p+2}(\Pi, A) &= \begin{cases} A_2 + A_2, & \text{если } t \text{ четно},\\ A_4, & \text{если } t \text{ нечетно},\end{cases}\\
\hat{H}^{4p+3}(\Pi, A) &= {}_{4t}A.
\end{aligned}$$

Как для циклических, так и для обобщенных групп кватернионов комплекс X и группы $\hat{H}(\Pi, A)$ обладают свойством периодической повторяемости. Детальное изучение этого явления периодичности будет проведено в § 11.

8. ПОДГРУППЫ

Пусть π — произвольная подгруппа (конечной) группы Π. Символы A, A' и т. д. мы будем использовать для обозначения Π-модулей, которые, конечно, можно рассматривать также и как π-модули.

Так как кольцо $Z(\Pi)$, рассматриваемое как левый $Z(\pi)$-модуль, является свободным модулем с конечной базой, то каждая полная резольвента X группы Π является также полной резольвентой группы π.

Включение

$$\mathrm{Hom}_\Pi(X, A) \subset \mathrm{Hom}_\pi(X, A)$$

индуцирует некоторый гомоморфизм

$$(1) \qquad i(\pi, \Pi) : \hat{H}(\Pi, A) \longrightarrow \hat{H}(\pi, A),$$

который мы будем называть *отображением ограничения.*

Для любых (левых) Π-модулей C и A определим гомоморфизм

$$t : \mathrm{Hom}_\pi(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Pi(C, A)$$

(называемый *перенесением*), полагая для любого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_\pi(C, A)$

$$(tf)c = \sum_i x_i f(x_i^{-1}c),$$

где $x_1, \ldots, x_r$, $r = (\Pi : \pi)$, — произвольная полная система представителей левостороннего разложения $x_1\pi, \ldots, x_r\pi$ группы Π по подгруппе π. Поскольку $x_iyf((x_iy)^{-1}c) = x_iyf(y^{-1}x_i^{-1}c) = x_if(x_i^{-1}c)$ для любого элемента $y \in \pi$, отображение tf не зависит от выбора представителей $x_1, \ldots, x_r$. Так как для любого элемента $x \in \Pi$ элементы $x^{-1}x_1, \ldots, x^{-1}x_r$ также составляют полную систему представителей левостороннего разложения группы Π по подгруппе π, то

$$(tf)(xc) = \sum x(x^{-1}x_i)f((x^{-1}x_i)^{-1}c) = x[(tf)c].$$

Тем самым показано, что отображение tf является Π-гомоморфизмом.

Подставляя вместо модуля C некоторую полную резольвенту X группы Π и переходя к группам гомологий, мы получим *гомоморфизм перенесения*

$$(2) \qquad t(\Pi, \pi) : \hat{H}(\pi, A) \longrightarrow \hat{H}(\Pi, A).$$

Кроме гомоморфизмов (1) и (2), мы будем также рассматривать изоморфизмы

$$(3) \qquad c_x : \hat{H}(\pi, A) \longrightarrow \hat{H}(x\pi x^{-1}, A),$$

индуцированные изоморфизмами

$$c_x : \mathrm{Hom}_\pi(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{x\pi x^{-1}}(C, A),$$

для которых $(c_xf)c = xf(x^{-1}c)$ (см. § X, 7).

На однородных составляющих нулевой степени гомоморфизмы (1)—(3) определяют отображения

$$(1)_0 \qquad i(\pi, \Pi) : A^\Pi/N_\Pi A \longrightarrow A^\pi/N_\pi A,$$

$$(2)_0 \qquad t(\Pi, \pi) : A^\pi/N_\pi A \longrightarrow A^\Pi/N_\Pi A,$$

$$(3)_0 \qquad c_x : A^\pi/N_\pi A \longrightarrow A^{x\pi x^{-1}}/N_{x\pi x^{-1}}A.$$

Гомоморфизм $(1)_0$ индуцируется включением $A^\Pi \subset A^\pi$; гомоморфизм $(2)_0$ индуцируется гомоморфизмом $A^\pi \to A^\Pi$, задаваемым соответствием $a \to \sum x_i a$[1]; гомоморфизм $(3)_0$ индуцируется гомоморфизмом $A^\pi \to A^{x\pi x^{-1}}$, задаваемым соответствием $a \to xa$.

Действительно, пусть X — произвольная полная резольвента группы Π, а $\varepsilon : X \to Z$ — отображение, определенное пополняющим эпиморфизмом $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z$, входящим в разложение $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \to X_{-1}$ дифференциала d_0. Индуцированный отображением ε гомоморфизм $\operatorname{Hom}_\Pi(Z, A) \to \hat{H}^0(\Pi, A)$, как легко видеть, совпадает с естественным гомоморфизмом $A^\Pi \to \hat{H}^0(\Pi, A) = A^\Pi/NA$. Поэтому гомоморфизмы $(1)_0$—$(3)_0$ индуцируются отображениями, получающимися заменой в указанных выше общих формулах модуля C модулем Z.

Рассмотрим теперь некоторые формальные свойства гомоморфизмов (1)—(3). В первую очередь ясно, что эти гомоморфизмы являются естественными отображениями относительно гомоморфизмов $A \to A'$ и перестановочны со связывающими гомоморфизмами, соответствующими произвольной точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Кроме того,

(4) $$c_x c_y = c_{xy};$$

(5) если $x \in \pi$, то гомоморфизм c_x является тождественным отображением;

(6) $t(\Pi, \pi)\, i(\pi, \Pi)\, a = (\Pi : \pi) a$ для любого элемента $a \in \hat{H}(\Pi, A)$.

Далее, для любой подгруппы π' группы π

(7) $$i(\pi', \pi)\, i(\pi, \Pi) = i(\pi', \Pi),$$

(8) $$t(\Pi, \pi)\, t(\pi, \pi') = t(\Pi, \pi'),$$

(9) $$c_x i(\pi', \pi) = i(x\pi' x^{-1}, x\pi x^{-1})\, c_x,$$

(10) $$c_x t(\pi, \pi') = t(x\pi x^{-1}, x\pi' x^{-1})\, c_x.$$

Все эти свойства являются непосредственными следствиями определений.

Рассмотрим теперь соотношения, имеющие место между гомоморфизмами (1)—(3) и умножениями. Пусть $a \in \hat{H}(\Pi, A)$, $a' \in \hat{H}(\Pi, A')$, $b \in \hat{H}(\pi, A)$, $b' \in \hat{H}(\pi, A')$. Тогда

(11) $$i(\pi, \Pi)(a \cdot a') = [i(\pi, \Pi)\, a] \cdot [i(\pi, \Pi)\, a'],$$

(12) $$t(\Pi, \pi)(b \cdot i(\pi, \Pi) a') = t(\Pi, \pi)\, b \cdot a',$$

(13) $$t(\Pi, \pi)(i(\pi, \Pi)\, a \cdot b') = a \cdot t(\Pi, \pi) b',$$

(14) $$c_x(b \cdot b') = c_x b \cdot c_x b'.$$

[1] Здесь $x_1, \ldots, x_r$ — некоторая полная система представителей левостороннего разложения группы Π по подгруппе π. — *Прим. перев.*

Из указанного выше описания гомоморфизмов $i(\pi, \Pi)$, $t(\Pi, \pi)$ и c_x на однородных составляющих нулевой степени немедленно следует, что соотношения (11)—(14) имеют место, если элементы a, a', b, b' однородны и их степени равны нулю. В общем случае соотношения (11)—(14) доказываются с помощью теоремы единственности 5.1. Мы проведем полное доказательство только для соотношения(12). Остальные соотношения доказываются аналогично.

Рассмотрим функторы

$$U_1(A) = \hat{H}(\pi, A), \quad U_2(A) = \hat{H}(\Pi, A), \quad V(A) = \hat{H}(\Pi, A)$$

и отображения

$$F, G : U_1(A) \otimes U_2(A') \to V(A \otimes A'),$$

где

$$F(b \otimes a') = t(\Pi, \pi)(b \cdot i(\pi, \Pi)a'),$$
$$G(b \otimes a') = t(\Pi, \pi)b \cdot a'.$$

Нам нужно прежде всего убедиться, что отображения F и G перестановочны со связывающими гомоморфизмами ; но это в самом деле справедливо, поскольку каждое из отображений F и G представляет собой композицию отображений, обладающих этим свойством. Далее, нам нужно показать, что функторы U_1, U_2 и V удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Поскольку для функторов U_2 и V это очевидно, остается только показать, что $\hat{H}(\pi, \operatorname{Hom}(Z(\Pi), A)) = 0$. Однако модуль $Z(\Pi)$ π-проективен и, следовательно, согласно предложению X, 8.1, модуль $\operatorname{Hom}(Z(\Pi), A)$ слабо π-инъективен. Поэтому, согласно предложению 2.2, $\hat{H}(\pi, \operatorname{Hom}(Z(\Pi), A)) = 0$. Таким образом, теорема 5.1 применима и, следовательно, $F = G$.

9. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ ПО ДВОЙНОМУ МОДУЛЮ

Пусть π и π' — произвольные подгруппы группы Π. В этом параграфе мы изучим отображение

$$(1) \qquad i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi') : \hat{H}(\pi', A) \longrightarrow \hat{H}(\pi, A),$$

определенное для любого Π-модуля A.

С этой целью мы введем в рассмотрение смежные классы $\pi x \pi'$ по двойному модулю, где $x \in \Pi$. Легко видеть, что любые два таких смежных класса либо совпадают между собой, либо не пересекаются. Таким образом, группа Π разлагается в теоретико-множественное объединение

$$(2) \qquad \Pi = \bigcup \pi x_i \pi'$$

попарно не пересекающихся смежных классов по двойному модулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Для разложения* (2) *группы Π в теоретико-множественное объединение попарно не пересекающихся смеж-*

ных классов по двойному модулю имеют место соотношения

$$(3)\qquad (\Pi : \pi') = \sum (\pi : \pi \cap x_i\pi' x_i^{-1}),$$

$$(4)\quad i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi') = \sum_i t(\pi, \pi \cap x_i\pi' x_i^{-1})\, i(\pi \cap x_i\pi' x_i^{-1}, x_i\pi' x_i^{-1})\, c_{x_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_i = \pi \cap x_i\pi' x_i^{-1}$, и пусть

$$\pi = \bigcup_j y_{ji}\gamma_i$$

— левостороннее разложение группы π по подгруппе γ_i. Тогда

$$\pi x_i = \bigcup_j y_{ji}(\pi x_i \cap x_i\pi').$$

Умножая это соотношение справа на π', мы получим разложение

$$\pi x_i\pi' = \bigcup y_{ji}(\pi x_i\pi' \cap x_i\pi') = \bigcup_j y_{ji}x_i\,\pi'$$

смежного класса $\pi\, x_i\pi'$ по двойному модулю в теоретико-множественное объединение непересекающихся друг с другом множеств. Комбинируя эти разложения с разложением (2), мы получим левостороннее разложение

$$\Pi = \bigcup_{i,j} y_{ji}\, x_i\, \pi'$$

группы Π по подгруппе π'. Соотношение (3) следует отсюда непосредственно.

Пусть теперь $f \in \mathrm{Hom}_{\pi'}(X_n, A)$, где X — произвольная полная резольвента группы Π. Тогда

$$\begin{aligned} i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi')f &= \sum_{j,i} c_{y_{ji}}\, x_i f = \sum_i \Big(\sum_j c_{y_{ji}} c_{x_i} f\Big) = \\ &= \sum_i t(\pi, \gamma_i)\, i(\gamma_i, x_i\pi' x_i^{-1})\, c_{x_i} f. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к группам гомологий, мы получим соотношение (4).

СЛЕДСТВИЕ 9.2. *Для любого элемента $a \in \hat{H}(\pi, A)$, где π — некоторый нормальный делитель группы Π, а A — произвольный Π-модуль, имеет место соотношение*

$$i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi)a = \sum xa, \qquad x \in \Pi/\pi.$$

Элемент a группы $\hat{H}(\pi, A)$ называется *устойчивым*, если для любого элемента $x \in \Pi$ имеет место соотношение

$$(5)\qquad i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi)\, a = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, x\pi x^{-1})c_x a$$

или, что равносильно, соотношение

$$i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi)a = c_x i(x^{-1}\pi x \cap \pi, \pi)a.$$

Для нормального делителя π соотношение (5) сводится к соотношению $a = c_x a$. Таким образом, в этом случае понятие устойчивого элемента совпадает с понятием элемента, инвариантного относительно операторов из факторгруппы Π/π.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. *Образ гомоморфизма $i(\pi, \Pi)$ состоит из устойчивых элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = i(\pi, \Pi)b$, где $b \in \hat{H}(\Pi, A)$. Тогда, поскольку $c_x b = b$,

$$c_x a = c_x i(\pi, \Pi)b = i(x\pi x^{-1}, \Pi)c_x b = i(x\pi x^{-1}, \Pi)b$$

и, следовательно,

$$i(\pi \cap x\pi x^{-1}, x\pi x^{-1})\, c_x a = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \Pi)b =$$
$$= i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi)\, i(\pi, \Pi)b = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi)a.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. *Для любого устойчивого элемента $a \in \hat{H}(\pi, A)$*

$$i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi)a = (\Pi : \pi)a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в соотношении (4) $\pi' = \pi$, мы получим

$$i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi)a = \sum_i t(\pi, \pi \cap x_i\pi x_i^{-1})\, i(\pi \cap x_i\pi x_i^{-1}, x_i\pi x_i^{-1})\, c_{x_i} a =$$
$$= \sum_i t(\pi, \pi \cap x_i\pi x_i^{-1})\, i(\pi \cap x_i\pi x_i^{-1}, \pi)a = \sum_i (\pi : \pi \cap x_i\pi x_i^{-1})a.$$

Остается воспользоваться соотношением (3).

10. p-ГРУППЫ И СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ

Для каждого простого числа p мы будем через $\hat{H}(\Pi, A, p)$ обозначать p-примарную компоненту группы $\hat{H}(\Pi, A)$. Очевидно, что группа $\hat{H}(\Pi, A)$ является прямой суммой подгрупп $\hat{H}(\Pi, A, p)$, соответствующих всевозможным простым числам p. Так как порядок любого элемента группы $\hat{H}(\Pi, A)$ делит порядок $(\Pi : 1)$ группы Π, то $\hat{H}(\Pi, A, p) = 0$ для всех простых чисел p, не являющихся делителями числа $(\Pi : 1)$. Если же простое число p делит число $(\Pi : 1)$, то порядок произвольного элемента подгруппы $\hat{H}(\Pi, A, p)$ является делителем наивысшей входящей в разложение числа $(\Pi : 1)$ степени p^ν числа p. В частности, если группа Π является p-группой (т. е. если $(\Pi : 1) = p^\nu$), то $\hat{H}(\Pi, A, p) = \hat{H}(\Pi, A)$.

Произведение элементов $a \in \hat{H}(\Pi, A, p)$ и $b \in \hat{H}(\Pi, A', q)$ равно нулю, если $p \neq q$, и принадлежит подгруппе $\hat{H}(\Pi, A \otimes A', p)$, если $p = q$.

Полагая $A = Z$, мы, в частности, получаем, что кольцо $\hat{H}(\Pi, Z)$ является прямой суммой колец $\hat{H}(\Pi, Z, p)$, где p пробегает все простые делители числа $(\Pi : 1)$. Единицу кольца $\hat{H}(\Pi, Z, p)$ мы будем обозначать через 1_p.

ТЕОРЕМА 10.1. *Если подгруппа π группы Π является силовской p-подгруппой, то для любого Π-модуля A отображение*

$$t(\Pi, \pi) : \hat{H}(\pi, A) \longrightarrow \hat{H}(\Pi, A, p)$$

является эпиморфизмом, а отображение

$$i(\pi, \Pi) : \hat{H}(\Pi, A, p) \longrightarrow \hat{H}(\pi, A)$$

— мономорфизмом. Образ последнего мономорфизма состоит из всех устойчивых элементов группы $\hat{H}(\pi, A)$. Кроме того, группа $\hat{H}(\pi, A)$ разлагается в прямую сумму

$$\hat{H}(\pi, A) = \operatorname{Im} i(\pi, \Pi) + \operatorname{Ker} t(\Pi, \pi).$$

Если силовская p-подгруппа π является нормальным делителем группы Π, то группа $\hat{H}(\pi, A)$ является Π/π-модулем и

$$N\hat{H}(\pi, A) = [\hat{H}(\pi, A)]^{\Pi/\pi} = \operatorname{Im} i(\pi, \Pi) \approx \hat{H}(\Pi, A, p),$$

$${}_N\hat{H}(\pi, A) = I(\Pi/\pi)\, \hat{H}(\pi, A) = \operatorname{Ker} t(\Pi, \pi),$$

$$[\hat{H}(\pi, A)]_{\Pi/\pi} = \operatorname{Coim} t(\Pi, \pi) \approx \hat{H}(\Pi, A, p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\pi : 1) = p^{\nu}$ и $(\Pi : \pi) = q$. Так как числа p^{ν} и q взаимно просты, то существует такое целое число l, что $ql \equiv 1 \bmod p^{\nu}$.

Согласно предложению 9.3, все элементы подгруппы $\operatorname{Im} i(\pi, \Pi)$ устойчивы. Обратно, пусть a — произвольный устойчивый элемент группы $\hat{H}(\pi, A)$. Тогда, согласно предложению 9.4,

$$l i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi) a = l(\Pi : \pi) a = lqa = a$$

и, следовательно, $a \in \operatorname{Im} i(\pi, \Pi)$. Кроме того, согласно формуле 8, (6), для любого элемента $b \in \hat{H}(\Pi, A, p)$

$$l t(\Pi, \pi)\, i(\pi, \Pi) b = l(\Pi : \pi) b = lqb = b.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Если силовская p-подгруппа π является нормальным делителем группы Π, то факторгруппа Π/π определена как группа операторов группы $\hat{H}(\pi, A)$; при этом устойчивые элементы группы $\hat{H}(\pi, A)$ совпадают с элементами, инвариантными относительно Π/π-операторов. Таким образом, $\operatorname{Im} i(\pi, \Pi) = [\hat{H}(\pi, A)]^{\Pi/\pi}$. Далее, согласно следствию 9.2, для любого элемента $a \in \hat{H}(\pi, A)$

$$i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi) a = Na,$$

и, следовательно, $\operatorname{Ker} t(\Pi, \pi) = {}_N\hat{H}(\pi, A)$.

Так как $p^{\nu}\hat{H}(\pi, A) = 0$ и порядок группы Π/π взаимно прост с числом p^{ν}, то, согласно следствию 2.7, $\hat{H}(\Pi/\pi, \hat{H}(\pi, A)) = 0$. В частности, ${}_N\hat{H}(\pi, A) = I(\Pi/\pi)\hat{H}(\pi, A)$ и $[\hat{H}(\pi, A)]^{\Pi/\pi} = N\hat{H}(\pi, A)$. Тем самым полностью доказано и второе утверждение теоремы.

11. ПЕРИОДИЧНОСТЬ

В этом параграфе мы рассмотрим конечные группы Π, группы когомологий $\hat{H}^n(\Pi, A)$ которых образуют периодические по n последовательности. Изучение таких групп весьма интересно из-за их тесной связи с группами не имеющих неподвижных точек преобразований сфер (см. § XVI, 9). Результаты этого параграфа принадлежат Артину и Тэйту (не опубликовано).

Элемент g группы $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ мы будем называть *максимальной образующей*, если он порождает группу $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ и имеет порядок $(\Pi : 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Для элемента* $g \in \hat{H}^q(\Pi, Z)$ *равносильны следующие свойства:*

(a) *элемент* g *является максимальной образующей;*

(b) *элемент* g *имеет порядок* $(\Pi : 1)$;

(c) *существует такой элемент* $g^{-1} \in \hat{H}^{-q}(\Pi, Z)$, *что* $g^{-1}g = 1$;

(d) *для любого* Π*-модуля* A *и для любого целого числа* n *соответствие* $a \to ag$ *определяет изоморфизм*

$$\hat{H}^n(\Pi, A) \approx \hat{H}^{n+q}(\Pi, A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(a) $\Rightarrow$ (b). Тривиально.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть порядок элемента g равен $(\Pi : 1)$. Так как порядок любого элемента группы $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ делит число $(\Pi : 1)$, то существует такой гомоморфизм $\varphi : \hat{H}^q(\Pi, Z) \to Z_r$, где $r = (\Pi : 1)$, что $\varphi g = 1$. Тогда, согласно теореме 6.6, существует такой элемент $g^{-1} \in \hat{H}^{-q}(\Pi, Z)$, что $g^{-1}g = \varphi g = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Рассмотрим отображения

$$\hat{H}^n(\Pi, A) \xrightarrow{\alpha} \hat{H}^{n+q}(\Pi, A) \xrightarrow{\beta} \hat{H}^n(\Pi, A),$$

задаваемые формулами $\alpha a = ag$, $\beta a = ag^{-1}$. Так как $\alpha\beta a = ag^{-1}g = a$ и $\beta\alpha a = agg^{-1} = (-1)^q ag^{-1}g = (-1)^q a$, то отображения α и β являются изоморфизмами.

(d) $\Rightarrow$ (a). Так как соответствие $a \to ag$ определяет изоморфизм $\hat{H}^0(\Pi, Z) \approx \hat{H}^q(\Pi, Z)$, а группа $\hat{H}^0(\Pi, Z)$ является циклической группой порядка $(\Pi : 1)$ с образующей 1, то группа $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ также является циклической группой порядка $(\Pi : 1)$ и ее образующей служит элемент g.

Единственность элемента g^{-1}, удовлетворяющего соотношению $g^{-1}g = 1$, вытекает из следующих соображений. Так как для любого элемента $a \in \hat{H}^{-q}(\Pi, Z)$

$$a = ag^{-1}g = (-1)^q g^{-1}ag,$$

то из соотношения $ag = 1$ вытекает соотношение $a = (-1)^q g^{-1}$. В частности, $g^{-1} = (-1)^q g^{-1}$ и, следовательно, $a = g^{-1}$. Единственность элемента g^{-1} оправдывает его обозначение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2. *Для любой максимальной образующей* $g \in \hat{H}^q(\Pi, Z)$ *элемент* $g^{-1} \in \hat{H}^{-q}(\Pi, Z)$ *является максимальной образующей. Кроме того, для любой максимальной образующей* $h \in \hat{H}^r(\Pi, Z)$ *элемент* $gh \in \hat{H}^{q+r}(\Pi, Z)$ *также является максимальной образующей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно вытекает из предложения 11.1 ввиду того, что элемент g^{-1} обладает свойством (с). Второе утверждение вытекает из того, что элемент gh обладает свойством (d), ибо отображение $a \to agh$, являясь композицией изоморфизмов, само является изоморфизмом.

Целое число q мы будем называть *периодом* группы Π, если группа $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ обладает по крайней мере одной максимальной образующей, т. е. если группа $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ является циклической группой порядка $(\Pi : 1)$. Из предложения 11.2 вытекает, что периоды группы Π образуют подгруппу аддитивной группы Z целых чисел. Нетрудно убедиться, что если $\Pi \neq 1$, то все периоды группы Π четные. Действительно, если группа $\hat{H}^q(\Pi, Z)$, где q нечетное, обладает максимальной образующей g, то $g = gg^{-1}g = -g^{-1}gg = -g$. Следовательно, $2g = 0$, т. е. $(\Pi : 1) = 2$. Но, как было показано в § 7, все периоды группы $\Pi = Z_2$ четные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. *Любой период q группы Π является также периодом каждой ее подгруппы π. При этом образ $i(\pi, \Pi)g$ любой максимальной образующей g группы $\hat{H}^q(\Pi, Z)$ является максимальной образующей группы $\hat{H}^q(\pi, Z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $t(\Pi, \pi)\, i(\pi, \Pi)g = (\Pi : \pi)g$ и порядок элемента $(\Pi : \pi)g$ равен $(\pi : 1) = (\Pi : 1)/(\Pi : \pi)$, то порядок элемента $i(\pi, \Pi)\, g$ не меньше числа $(\pi : 1)$. Но в группе $\hat{H}^q(\pi, Z)$ нет элементов, порядки которых были бы больше числа $(\pi : 1)$. Таким образом, порядок элемента $i(\pi, \Pi)g$ равен $(\pi : 1)$, и, следовательно, согласно предложению 11.1 [свойство (b)], этот элемент является максимальной образующей группы $\hat{H}^q(\pi, Z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4. *Пусть π — силовская p-подгруппа группы Π и g — максимальная образующая группы $\hat{H}^q(\pi, Z)$. Тогда, если r — такое число, что*

$$k^r \equiv 1 \bmod (\pi : 1)$$

для всех целых чисел k, взаимно простых с числом p, то элемент $g^r \in \hat{H}^{qr}(\pi, Z)$ устойчив и его образ $t(\Pi, \pi)g^r$ имеет порядок $(\pi : 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\pi x^{-1}$ — произвольная подгруппа группы Π, сопряженная с подгруппой π. Так как отображение $a \to c_x a$ является изоморфизмом, то элемент $c_x g$ служит максимальной образующей группы $\hat{H}^q(x\pi x^{-1}, Z)$. Но тогда, согласно предложению 11.3, как элемент $g_1 = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi)g$, так и элемент $g_2 = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, x\pi x^{-1})\, c_x g$ являются максимальными образующими группы $\hat{H}^q(\pi \cap x\pi x^{-1}, Z)$. Следовательно, существует такое целое число k, взаимно простое с числом p, что $g_1 = kg_2$. Поэтому

$$g_1^r = k^r g_2^r = g_2^r.$$

Но

$$g_1^r = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, \pi) g^r,$$
$$g_2^r = i(\pi \cap x\pi x^{-1}, x\pi x^{-1})\, c_x g^r.$$

Тем самым показано, что элемент g^r устойчив. Поскольку элемент g^r устойчив, из предложения 9.4 вытекает, что

$$i(\pi, \Pi)\, t(\Pi, \pi) g^r = (\Pi : \pi) g^r.$$

Так как элемент g^r имеет порядок $(\pi : 1)$ и число $(\Pi : \pi)$ взаимно просто с числом $(\pi : 1)$, то элемент $(\Pi : \pi) g^r$ также имеет порядок $(\pi : 1)$. Следовательно, порядком элемента $t(\Pi, \pi) g^r$ должно быть число, кратное числу $(\pi : 1)$. Но элемент $t(\Pi, \pi) g^r$ принадлежит группе $\hat{H}(\Pi, A, p)$, а каждый элемент этой группы имеет порядок, не превышающий числа $(\pi : 1)$. Таким образом, элемент $t(\Pi, \pi) g^r$ имеет порядок $(\pi : 1)$.

ТЕОРЕМА 11.5[1]. *Следующие свойства равносильны:*

(a) *конечная группа Π обладает отличным от нуля периодом;*

(b) *каждая абелева подгруппа группы Π является циклической группой;*

(c) *каждая p-подгруппа группы Π является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов;*

(d) *каждая силовская подгруппа группы Π является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $\Rightarrow$ (b). Каждая нециклическая конечная абелева группа содержит по крайней мере одну подгруппу вида $Z_p + Z_p$, где p — некоторое простое число. В силу предложения 11.3 нам поэтому достаточно показать, что группа $Z_p + Z_p$ не имеет периодов. В самом деле, пусть $Z_p \to Z_p + Z_p \to Z_p$ — гомоморфизмы, композицией которых является тождественное отображение. Эти гомоморфизмы индуцируют гомоморфизмы

$$H^q(Z_p, Z) \longrightarrow H^q(Z_p + Z_p, Z) \longrightarrow H^q(Z_p, Z),$$

композицией которых также является тождественное отображение. Но для каждого четного положительного q группа $H^q(Z_p, Z)$ является циклической группой порядка p. Следовательно, для каждого четного положительного q группа $H^q(Z_p + Z_p, Z)$ является прямой суммой двух циклических групп порядка p, т. е. нециклической группой порядка p^2. Поэтому группа $Z_p + Z_p$ не может иметь периодов.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть π — произвольная p-подгруппа группы Π. Поскольку каждая p-группа обладает нетривиальным центром (см. Zassenhaus, The theory of groups, New York, 1949, p. 110)[2], в центре подгруппы π содержится некоторая циклическая под-

[1] В оригинале эта теорема значится под номером 11.6. — *Прим. перев.*

[2] См. также Курош А. Г., Теория групп, изд. 2, Гостехиздат, М., стр. 350. — *Прим. перев.*

группа π' порядка p. Покажем, что подгруппа π' является единственной подгруппой порядка p группы π. Действительно, предположим, что группа π содержит еще одну подгруппу π'' порядка p. Тогда, поскольку $\pi' \cap \pi'' = 1$ и подгруппа π' принадлежит центру группы π, группа π содержит прямую сумму $\pi' + \pi''$, являющуюся нециклической абелевой группой, что противоречит свойству (b). Таким образом, группа π содержит лишь одну подгруппу порядка p и, следовательно, является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (d) очевидна.

(d) $\Rightarrow$ (a). В § 7 было показано, что любая циклическая группа имеет период 2, а любая обобщенная группа кватернионов имеет период 4.

Пусть теперь $\pi_1, \ldots, \pi_s$ — силовские подгруппы группы Π, соответствующие всем простым делителям $p_1, \ldots, p_s$ числа $(\Pi : 1)$. Пусть q_i — период группы π_i, и пусть g_i — произвольная максимальная образующая группы $\hat{H}^{q_i}(\pi_i, Z)$. Тогда, как следует из предложения 11.4, можно подобрать такое число u, являющееся общим кратным чисел $q_1, \ldots, q_s$, что каждый из элементов

$$t(\Pi, \pi_i)\, g_i^{u/q_i} \in \hat{H}^u(\Pi, Z, p_i)$$

имеет порядок $(\pi_i : 1)$. Сумма этих элементов, принадлежащая группе $\hat{H}^u(\Pi, Z)$, имеет порядок $(\Pi : 1)$, т. е. является максимальной образующей. Таким образом, группа Π имеет период u.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Π — произвольная группа порядка r. Показать, что каждый Π-модуль A, для которого умножение на число r определяет изоморфизм $r : A \approx A$, слабо проективен.

2. Показать, что если имеет место точная последовательность $0 \to A_n \to \ldots \to A_0 \to A \to 0$ или точная последовательность $0 \to A \to A_0 \to \ldots \to A_n \to 0$ со слабо проективными модулями $A_0, \ldots, A_n$, то $\hat{H}(\Pi, A) = 0$. В частности, $\hat{H}(\Pi, A) = 0$ всякий раз, когда проективная или инъективная размерность модуля A конечна. Вывести отсюда, что для любой группы $\Pi \neq 1$ проективная и инъективная размерности кольца Z, рассматриваемого как Π-модуль, бесконечны. Таким образом, gl. dim $Z(\Pi) = \infty$.

3. Показать, что если модуль A обладает конечным числом образующих, то группы $\hat{H}^q(\Pi, A)$ также обладают конечным числом образующих и, следовательно, конечны.

4. Пусть Π — циклическая группа порядка h с образующей x, а A — циклическая (аддитивно записанная) группа порядка k с образующей y. Пусть, кроме того, l — такое целое число, что

$l^h - 1 \equiv 0 \bmod k$. Определим группу A как Π-модуль, полагая $xy = ly$. Показать, что Π-модуль A тогда и только тогда слабо проективен, когда $(h, k) = 1$. Показать, что если $l^h - 1 = k$, то $\hat{H}(\Pi, A) = 0$. Таким образом, полагая, в частности, $h = 2$, $k = 8$, $l = 3$, мы получим пример не слабо проективного модуля A, для которого $\hat{H}(\Pi, A) = 0$.

5. Показать, что для любой полной резольвенты X группы Π комплекс X^0 (после соответствующего изменения нумерации) также является полной резольвентой группы Π. Используя этот факт, построить изоморфизм

$$\hat{H}^q(\Pi, A) \approx H_{-q-1}(A \otimes_\Pi X)$$

(в правой части этого соотношения модуль A рассматривается как правый Π-модуль с операторами $ax = x^{-1}a$, $x \in \Pi$).

6. Видоизменить определенные в гл. XI умножения

$$\smile : H^p(\Pi, A) \otimes H^q(\Pi, A') \longrightarrow H^{p+q}(\Pi, A \otimes A'),$$
$$\frown : H_{p+q}(\Pi, A \otimes A') \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H^p(\Pi, A), H_q(\Pi, A'))$$

для случая, когда группы H^0 и H_0 заменены группами $\widetilde{H}^0$ и $\widetilde{H}_0$ соответственно (группа Π предполагается конечной). Показать, что видоизмененные умножения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a \smile b = ab, \text{ где } a \in \hat{H}^p(\Pi, A),\ b \in \hat{H}^q(\Pi, A'), \qquad p \geq 0,\ q \geq 0;$$

$$a \frown b = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} ba, \text{ где } a \in \hat{H}^{-q}(\Pi, A),\ b \in \hat{H}^p(\Pi, A'),\ q > p \geq 0.$$

7. Для любой подгруппы π конечной группы Π и любого Π-модуля A построить изоморфизм

$$\hat{H}(\pi, A) \approx \hat{H}(\Pi, \mathrm{Hom}_\pi (Z(\Pi), A)).$$

Показать, что группы $\mathrm{Hom}_\pi (Z(\Pi), A)$ и $Z(\Pi) \otimes_\pi A$ изоморфны. Доказать коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& \hat{H}(\Pi, A) \arrow[dl, "i(\pi, \Pi)"'] \arrow[dr, "\hat{H}(\Pi, i)"] & \\
\hat{H}(\pi, A) \arrow[rr, phantom, "\approx"] \arrow[dr, "t(\Pi, \pi)"'] & & \hat{H}(\Pi, \mathrm{Hom}_\pi(Z(\Pi), A)) \arrow[dl, "\hat{H}(\Pi, t)"] \\
& \hat{H}(\Pi, A) &
\end{tikzcd}$$

в которой

$$i : A = \mathrm{Hom}_{\Pi}(Z(\Pi), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\pi}(Z(\Pi), A)$$

— включение, а

$$t : \mathrm{Hom}_{\pi}(Z(\Pi), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Pi}(Z(\Pi), A) = A$$

— перенесение.

8. Пусть π — произвольная подгруппа конечной группы Π. В ситуации $(A_{\Pi}, {}_{\Pi}C)$ определим гомоморфизм

$$t : A \otimes_{\Pi} C \longrightarrow A \otimes_{\pi} C,$$

положив

$$t(a \otimes_{\Pi} c) = \sum a x_i \otimes_{\pi} x_i^{-1} c,$$

где $x_1, \ldots, x_r$ — полная система представителей левостороннего разложения $x_1\pi, \ldots, x_r\pi$ группы Π по подгруппе π $(r = (\Pi : \pi))$. Найти формальные свойства гомоморфизма t и сравнить его с естественным эпиморфизмом

$$j : A \otimes_{\pi} C \longrightarrow A \otimes_{\Pi} C.$$

Подставляя вместо модуля C произвольную полную резольвенту X группы Π и используя результат упражнения 5, показать, что гомоморфизм t индуцирует гомоморфизм $i(\pi, \Pi) : \hat{H}(\Pi, A) \to \hat{H}(\pi, A)$, а гомоморфизм j индуцирует гомоморфизм $t(\Pi, \pi) : \hat{H}(\pi, A) \to \hat{H}(\Pi, A)$.

9. Для любой группы Π и некоторой ее подгруппы π конечного индекса определить гомоморфизмы перенесения

$$H^n(\pi, A) \longrightarrow H^n(\Pi, A), \qquad H_n(\Pi, A) \longrightarrow H_n(\pi, A).$$

Сравнить эти гомоморфизмы с гомоморфизмами $t(\Pi, \pi)$ и $i(\pi, \Pi)$, определенными для конечных групп. Доказать аналоги предложений упражнения 7.

10. Показать, что отображение

$$i(\pi, \Pi) : \hat{H}^{-2}(\Pi, Z) \longrightarrow \hat{H}^{-2}(\pi, Z),$$

совпадающее с гомоморфизмом перенесения

$$t(\Pi, \pi) : H_1(\Pi, Z) \longrightarrow H_1(\pi, Z)$$

(см. упражнение 9), представляет собой классический гомоморфизм перенесения

$$t : \Pi/[\Pi, \Pi] \longrightarrow \pi/[\pi, \pi]$$

в том виде, как он определен, например, в книге Цассенхауза (Zassenhaus, Theory of groups, New York, 1949, p. 137).

11. Пусть $P = (p_1, \ldots, p_l)$ — некоторое множество простых чисел. Прямую сумму групп $\hat{H}(\Pi, A, p_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ мы обозначим через $\hat{H}(\Pi, A, P)$, а наибольший делитель числа $(\Pi : 1)$, делящийся только на числа $p_1, \ldots, p_l$, — через $(\Pi : 1)_P$. Элемент g группы $\hat{H}^q(\Pi, Z, P)$ мы назовем максимальной P-образующей, если он порождает группу $\hat{H}^q(\Pi, Z, P)$ и имеет порядок $(\Pi : 1)_P$. Если группа $\hat{H}^q(\Pi, Z, P)$ обладает хотя бы одной максимальной P-образующей, то мы будем число q называть P-периодом группы Π. Перенести на этот более общий случай результаты § 11. В частности, обобщая теорему 11.5, показать, что следующие свойства равносильны:

(a) группа Π обладает отличным от нуля P-периодом;

(b) каждая абелева подгруппа группы Π, порядок которой делит число $(\Pi : 1)_P$, является циклической группой;

(c) каждая p-подгруппа группы Π, где $p \in P$, является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов;

(d) каждая силовская p-подгруппа группы Π, где $p \in P$, является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов.

12. Пусть p^ν — порядок силовской p-подгруппы группы Π. Показать, что наименьшее число r, обладающее указанным в предложении 11.4 свойством, определяется формулами:

$$r = \varphi(p^\nu) = p^{\nu-1}(p-1), \quad \text{если } p \neq 2,$$
$$r = \varphi(p^\nu) = 2^{\nu-1}, \quad \text{если } p = 2, \nu = 1 \text{ или } 2,$$
$$r = 1/2\, \varphi(p^\nu) = 2^{\nu-2}, \quad \text{если } p = 2, \nu > 2,$$

где φ — функция Эйлера. Вывести отсюда, что если группа Π обладает p-периодами, то одним из них является число $2\varphi(p^\nu)$. Если $p = 2$ и силовская p-подгруппа π является циклической группой порядка не меньшего 8, то p-периодом группы Π является также число $\varphi(p^\nu)$.

Показать, что если группа Π обладает периодами, то одним из них является число $2\varphi(\Pi : 1)$.

13. Показать, что если для некоторых целых чисел i и q функторы $\hat{H}^i(\Pi, A)$ и $\hat{H}^{i+q}(\Pi, A)$ (от Π-модуля A) естественно изоморфны, то число q является периодом группы Π.

14. Пусть Π — произвольная группа порядка r. Показать, что для любого целого числа q существует по крайней мере один такой Π-модуль C, что группа $\hat{H}^q(\Pi, C)$ является циклической порядка r. [Указание: для $q = 0$ положить $C = Z$; затем использовать последовательности, аналогичные последовательностям 5, (1) и 5, (2).]

ГЛАВА XIII

АЛГЕБРЫ ЛИ

Введение. В этой главе алгебры Ли рассматриваются только с чисто алгебраической точки зрения, без каких-либо ссылок на теорию групп Ли и дифференциальную геометрию. «Тождество Якоби» может быть оправдано с этой точки зрения как соотношение, которому удовлетворяет в произвольной ассоциативной алгебре «скобочная» операция $[x, y] = xy - yx$.

Каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (над произвольным коммутативным кольцом K) мы сопоставляем некоторую (ассоциативную) K-алгебру $\mathfrak{g}^e$ (так называемую «обвертывающую алгебру» алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Обвертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ обладает тем свойством, что каждому «представлению» алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в некотором K-модуле C взаимно однозначно соответствует некоторое задание группы C как $\mathfrak{g}^e$-модуля. Алгебра $\mathfrak{g}^e$ обладает естественным пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon : \mathfrak{g}^e \to K$, т. е. является дополненной K-алгеброй. Ее группы гомологий и когомологий мы и принимаем за группы гомологий и когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В предположении, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ K-свободна, можно с помощью теоремы Пуанкаре—Витта (§ 3), играющей основную роль во всей этой теории, показать, что так определенные группы когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадают с группами когомологий в смысле Шевалле и Эйленберга [Chevalley C., Eilenberg S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124].

В первых двух параграфах содержатся лишь определения и некоторые по существу тривиальные результаты, не опирающиеся на тождество Якоби, которое существенно используется лишь в доказательстве теоремы Пуанкаре—Витта (§ 3). Затем на основе этой последней теоремы теория гомологий алгебр Ли развивается аналогично теории гомологий групп.

Более глубоких результатов гомологической теории алгебр Ли (как, например, лемм Уайтхеда, теоремы Леви, теории полупростых алгебр Ли и т. п.) мы здесь не касаемся.

1. АЛГЕБРЫ ЛИ И ИХ ОБВЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ

Напомним, что алгеброй Ли над коммутативным кольцом K называется K-модуль $\mathfrak{g}$, рассматриваемый вместе с таким K-гомоморфизмом $x \otimes y \to [x, y]$ модуля $\mathfrak{g} \otimes_K \mathfrak{g}$ в модуль $\mathfrak{g}$, что для любых элементов $x, y, z \in \mathfrak{g}$

(1) $$[x, x] = 0,$$

(2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (тождество Якоби).

Из соотношения (1) вытекает соотношение

(1′) $$[x, y] + [y, x] = 0,$$

равносильное соотношению (1) в случае, когда в кольце K существует по крайней мере один элемент k, для которого $2k = 1$.

(Левым) $\mathfrak{g}$-представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется K-модуль A, рассматриваемый вместе с таким K-гомоморфизмом[1] $x \otimes a \to xa$ модуля $\mathfrak{g} \otimes A$ в модуль A, что

$$x(ya) - y(xa) = [x, y]\, a.$$

Мы построим некоторую ассоциативную K-алгебру $\mathfrak{g}^e$, обладающую тем свойством, что каждое (левое) $\mathfrak{g}$-представление можно рассматривать как (левый) $\mathfrak{g}^e$-модуль и обратно. Алгебру $\mathfrak{g}^e$ мы будем называть *обвертывающей алгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть $T(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$, т. е. градуированная (ассоциативная) K-алгебра, однородные составляющие $T_n(\mathfrak{g})$ которой являются тензорными произведениями (над кольцом K) n экземпляров модуля $\mathfrak{g}$ [за $T_0(\mathfrak{g})$ принимается кольцо K]. Произведением элементов $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ и $y_1 \otimes \ldots \otimes y_q$ этой алгебры считается элемент $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_q$. Очевидно, что любой K-гомоморфизм $\mathfrak{g} \otimes_K A \to A$ единственным образом продолжается до некоторого K-гомоморфизма $T(\mathfrak{g}) \otimes_K A \to A$ [задаваемого соответствием $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes a \to (x_1 \ldots (x_n a) \ldots)$]. Тем самым K-модуль A превращается в левый $T(\mathfrak{g})$-модуль. Обратно, произвольный $T(\mathfrak{g})$-модуль A можно построить указанным способом с помощью некоторого, однозначно определенного K-гомоморфизма $\mathfrak{g} \otimes A \to A$. Отображение $\mathfrak{g} \otimes A \to A$ тогда и только тогда является $\mathfrak{g}$-представлением, когда все элементы алгебры $T(\mathfrak{g})$ вида

(3) $$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

аннулируют $T(\mathfrak{g})$-модуль A. В соответствии с этим мы введем в рассмотрение двусторонний идеал $U(\mathfrak{g})$ алгебры $T(\mathfrak{g})$, порожденный всеми элементами вида (3). Соответствующую факторалгебру $T(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})$ мы и примем за обвертывающую алгебру $\mathfrak{g}^e$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Очевидно, что левые $\mathfrak{g}$-представления действительно можно отождествлять с левыми $\mathfrak{g}^e$-модулями; мы будем их называть *левыми* $\mathfrak{g}$-*модулями*.

---

[1] Обычно представлением алгебры Ли называется сам этот гомоморфизм. Если требуется явно указать модуль A, то говорят о представлении в модуле A. Ниже авторы также используют эту терминологию. — *Прим. ред.*

Мы пришли к обертывающей алгебре $\mathfrak{g}^e$, рассматривая *левые* $\mathfrak{g}$-представления. Равным образом можно получить эту алгебру и исходя из *правых* $\mathfrak{g}$-представлений, т. е. K-гомоморфизмов $A \otimes \mathfrak{g} \to A$, удовлетворяющих соотношению

$$(ax)y - (ay)x = a[x, y].$$

Действительно, любой K-гомоморфизм $A \otimes \mathfrak{g} \to A$ единственным образом продолжается до некоторого K-гомоморфизма $A \otimes T(\mathfrak{g}) \to A$ [задаваемого соответствием $a \otimes (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \to (\ldots(ax_1)\ldots x_n)$]. Тем самым K-модуль A превращается в правый $T(\mathfrak{g})$-модуль. Гомоморфизм $A \otimes \mathfrak{g} \to A$ тогда и только тогда является правым $\mathfrak{g}$-представлением, когда все элементы алгебры $T(\mathfrak{g})$, имеющие вид (3), аннулируют правый $T(\mathfrak{g})$-модуль A. Таким образом, и на этом пути мы приходим к той же обертывающей алгебре $\mathfrak{g}^e = T(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})$. В частности, правые $\mathfrak{g}$-представления можно отождествлять с правыми $\mathfrak{g}^e$-модулями; мы будем называть их *правыми $\mathfrak{g}$-модулями*.

Связь между $\mathfrak{g}$-представлениями и $\mathfrak{g}^e$-модулями можно в явном виде описать с помощью K-гомоморфизма

$$i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e,$$

индуцированного отождествлением $\mathfrak{g} = T_1(\mathfrak{g})$. Именно, как легко видеть, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Отображение $f : \mathfrak{g} \otimes A \to A$, определяющее левое $\mathfrak{g}$-представление, единственным образом разлагается в композицию отображения $i \otimes A$ и некоторого отображения $h : \mathfrak{g}^e \otimes A \to A$, определяющего A как левый $\mathfrak{g}^e$-модуль. Аналогичное утверждение справедливо для правых представлений и правых модулей.*

Поскольку тензорная алгебра $T(\mathfrak{g})$ является градуированным кольцом, определен естественный пополняющий гомоморфизм $\varepsilon : T(\mathfrak{g}) \to T_0(\mathfrak{g}) = K$. Так как этот гомоморфизм равен нулю на всех однородных составляющих $T_n(\mathfrak{g})$ степени, большей нуля, то его ядро содержит идеал $U(\mathfrak{g})$ и поэтому гомоморфизм ε индуцирует некоторый гомоморфизм

$$\varepsilon : \mathfrak{g}^e \to K,$$

определяющий алгебру $\mathfrak{g}^e$ как дополненную K-алгебру. Соответствующий пополняющий идеал $I(\mathfrak{g})$, очевидно, порождается образом гомоморфизма $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$.

Рассмотрим, например, случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *коммутативна* (т. е. когда $[x, y] = 0$ для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$). В этом случае обертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ представляет собой фактор-алгебру алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу $U(\mathfrak{g})$, порожденному всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$, т. е. является так называемой «симметрической алгеброй» K-модуля $\mathfrak{g}$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ K-свободна, т. е. обладает K-базой $\{x_\alpha\}$, то алгебру $\mathfrak{g}^e$ можно отождествить с алгеброй $K[x_\alpha]$ многочленов от неизвестных x_α.

Гомоморфным отображением $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ одной K-алгебры Ли в другую называется такой K-гомоморфизм f, что $f([x, y]) = [fx, fy]$. Гомоморфизм f индуцирует, очевидно, гомоморфизм $f^e : \mathfrak{g}^e \to \mathfrak{g}'^e$ дополненных алгебр, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \mathfrak{g}' \arrow[d, "i'"] \\ \mathfrak{g}^e \arrow[r, "f^e"'] & \mathfrak{g}'^e \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — произвольные алгебры Ли над одним и тем же кольцом K. Прямая сумма $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$ этих алгебр Ли (как K-модулей) является, очевидно, алгеброй Ли относительно операции

$$[(x, x'), (y, y')] = ([x, y], [x', y']).$$

(Так определенная прямая сумма алгебр Ли иногда называется их «прямым произведением».) Отождествляя элемент x с элементом $[x, 0]$, а элемент x' с элементом $[0, x']$, мы можем алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ рассматривать как подалгебры алгебры $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$; при этом для любых элементов $x \in \mathfrak{g}$, $x' \in \mathfrak{g}'$ будет иметь место соотношение $[x, x'] = 0$.

Рассмотрим теперь гомоморфизм

$$\varphi : \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e'} \longrightarrow (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}')^e,$$

индуцированный гомоморфизмами

$$\mathfrak{g}^e \longrightarrow (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}')^e, \quad \mathfrak{g}'^e \longrightarrow (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}')^e,$$

соответствующими отображениям вложения $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Гомоморфизм φ является изоморфизмом дополненных алгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $(x, x') \to x \otimes 1 + 1 \otimes x'$ прямой суммы $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$ в тензорное произведение $T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}')$, очевидно, индуцирует гомоморфизм K-алгебр

$$\bar{\psi} : T(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}') \longrightarrow T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}'),$$

композиция которого с естественным гомоморфизмом $T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}') \to \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}'^e$ переводит идеал $U(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}')$ в нуль и поэтому индуцирует некоторый гомоморфизм

$$\psi : (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}')^e \longrightarrow \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}'^e.$$

Легко проверяется, что композиции $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ являются тождественными отображениями. Следовательно, гомоморфизм φ действительно является изоморфизмом.

Такие понятия, как подалгебра, идеал, факторалгебра и т. п., определяются для алгебр Ли точно так же, как для ассоциативных алгебр. Например, идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется такой ее подмодуль $\mathfrak{h}$, что $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для любых элементов $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$. Поскольку операция в алгебре Ли антикоммутативна, нет необходимости различать левые и правые идеалы. Для любого идеала $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ фактормодуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли относительно операции, индуцированной операцией, определенной в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим сквозное отображение

$$(4) \qquad \mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{g} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^e,$$

где f — отображение вложения. Пусть L — правый идеал алгебры $\mathfrak{g}^e$, порожденный образом гомоморфизма if. Так как в алгебре $\mathfrak{g}^e$ для любых элементов $x' \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$

$$if(x')\, i(x) = i(x)\, if(x') + if([x', x]),$$

то правый идеал L совпадает с левым идеалом, порожденным образом гомоморфизма if.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Для любого идеала $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ индуцирует естественный эпиморфизм $\varphi^e : \mathfrak{g}^e \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e$, ядром которого служит идеал L, порожденный образом сквозного отображения* (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что гомоморфизм φ^e является эпиморфизмом, ядро которого содержит образ гомоморфизма if. Поэтому этот гомоморфизм индуцирует некоторый эпиморфизм $\bar{\varphi} : \mathfrak{g}^e/L \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e$. Рассмотрим теперь отображение $u : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ (вообще говоря, не являющееся гомоморфизмом), композиция которого с гомоморфизмом φ является тождественным отображением. Легко видеть, что сквозное отображение

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \xrightarrow{u} \mathfrak{g} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^e \longrightarrow \mathfrak{g}^e/L$$

не зависит от выбора отображения u и является K-гомоморфизмом. Этот гомоморфизм определяет гомоморфизм K-алгебр $T(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}^e/L$, переводящий двусторонний идеал $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ в нуль и потому индуцирующий некоторый гомоморфизм $\psi : (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}^e/L$. Очевидно, что композиции $\bar{\varphi}\psi$ и $\psi\bar{\varphi}$ являются тождественными отображениями, так что гомоморфизм $\bar{\varphi}$ является изоморфизмом.

Аналогично случаю групп, для алгебр Ли имеет место некоторый антиподизм

$$\omega : \mathfrak{g}^e \approx (\mathfrak{g}^e)^*,$$

индуцированный отображением $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \to (-1)^p x_p^* \otimes \ldots \otimes x_1^*$ алгебры $T(\mathfrak{g})$ в алгебру $T(\mathfrak{g})^*$. Так же как и в случае групп, этот антиподизм позволяет любой правый $\mathfrak{g}$-модуль A рассматривать как левый $\mathfrak{g}$-модуль с операторами

$$xa = -ax.$$

2. ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ АЛГЕБР ЛИ

Так как для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K (ассоциативная) K-алгебра $\mathfrak{g}^e$ является дополненной K-алгеброй, то, согласно § X, 1, определены группы гомологий и когомологий алгебры $\mathfrak{g}^e$. Эти группы мы будем называть соответственно группами гомологий и когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, для любого правого $\mathfrak{g}$-модуля A и любого левого $\mathfrak{g}$-модуля C

$$H_n(\mathfrak{g}, A) = \operatorname{Tor}_n^{\mathfrak{g}^e}(A, K), \quad H^n(\mathfrak{g}, C) = \operatorname{Ext}_{\mathfrak{g}^e}^n(K, C).$$

Произвольный гомоморфизм $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Ли индуцирует некоторый гомоморфизм $f^e: \mathfrak{g}^e \to \mathfrak{h}^e$ соответствующих дополненных алгебр, который в свою очередь индуцирует гомоморфизмы

$$F_n^f: H_n(\mathfrak{g}, A) \longrightarrow H_n(\mathfrak{h}, A), \qquad A_{\mathfrak{h}},$$
$$F_f^n: H^n(\mathfrak{h}, C) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}, C), \qquad {}_{\mathfrak{h}}C.$$

Группой гомологий $H_0(\mathfrak{g}, A)$ является K-модуль $A \otimes_{\mathfrak{g}^e} K \approx A/AI$, где $I = I(\mathfrak{g})$ — пополняющий идеал алгебры $\mathfrak{g}^e$. Легко видеть, что $AI = A\mathfrak{g}$ и, следовательно,

$$(1) \qquad H_0(\mathfrak{g}, A) = A/A\mathfrak{g}.$$

Этот K-модуль мы будем обозначать через $A_{\mathfrak{g}}$.

Группу когомологий $H^0(\mathfrak{g}, C)$, т. е. группу $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(K, C)$, можно отождествить с K-модулем всех *инвариантных* элементов $\mathfrak{g}$-модуля C, т. е. с K-модулем всех таких элементов $c \in C$, что $xc = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Обозначая этот K-модуль через $C^{\mathfrak{g}}$, мы, таким образом, имеем

$$H^0(\mathfrak{g}, C) = C^{\mathfrak{g}}.$$

Как было отмечено в § X, 1, группа $H^1(\mathfrak{g}, C)$ представляет собой факторгруппу группы всех скрещенных гомоморфизмов $f: \mathfrak{g}^e \to C$ по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов. Композиция скрещенного гомоморфизма f с гомоморфизмом $i: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$ представляет собой такой K-гомоморфизм $g: \mathfrak{g} \to C$, что

$$x(gy) - y(gx) = g([x, y]), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Такого рода гомоморфизмы g мы будем называть *скрещенными гомоморфизмами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$-модуль C. Очевидно, что формула $g = fi$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между скрещенными гомоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и скрещенными гомоморфизмами обвертывающей алгебры $\mathfrak{g}^e$. Главные скрещенные гомоморфизмы $g: \mathfrak{g} \to A$ имеют, очевидно, вид $gx = xc$, где c — некоторый фиксированный элемент модуля C. Таким образом, группа когомологий $H^1(\mathfrak{g}, C)$ отождествляется с факторгруппой группы всех скрещенных гомоморфизмов $\mathfrak{g} \to C$ по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов.

В случае, когда $\mathfrak{g}$-операторы на модуле A тривиальны (т. е. когда $xa = 0$ для любых элементов $a \in A$, $x \in \mathfrak{g}$),

$$(2) \qquad H_0(\mathfrak{g}, A) = A = H^0(\mathfrak{g}, A),$$

$$(3) \qquad H^1(\mathfrak{g}, A) = \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], A),$$

где $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — образ гомоморфизма $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, задаваемого соответствием $x \otimes y \to [x, y]$. Аналогичную интерпретацию можно указать и для группы $H_1(\mathfrak{g}, A)$ (в предположении, что $\mathfrak{g}$-операторы на модуле A тривиальны). Действительно, согласно формуле X, 1, (4), $H_1(\mathfrak{g}, A) \approx \approx A \otimes_K I/I^2$, где $I = I(\mathfrak{g})$ — пополняющий идеал алгебры $\mathfrak{g}^e$. Так как при гомоморфизме i модуль $\mathfrak{g}$ отображается в идеал I, а подмодуль $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — в идеал I^2, то этот гомоморфизм индуцирует некоторый гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to I/I^2$. С другой стороны, гомоморфизм $T(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$, тождественный на однородной составляющей $T_1(\mathfrak{g})$ и равный нулю на всех остальных однородных составляющих $T_n(\mathfrak{g})$, $n \neq 1$, переводит двусторонний идеал $U(\mathfrak{g})$ в подмодуль $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и, следовательно, определяет некоторый гомоморфизм $I \to \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Этот гомоморфизм отображает идеал I^2 в нуль и потому индуцирует некоторый гомоморфизм $\psi : I/I^2 \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Так как композиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ являются, очевидно, тождественными отображениями, то

$$(4) \qquad I/I^2 \approx \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Таким образом, для любого $\mathfrak{g}$-модуля A с тривиальными операторами

$$(5) \qquad H_1(\mathfrak{g}, A) \approx A \otimes_K \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

3. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ—ВИТТА

В этом параграфе мы будем рассматривать K-свободную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K. Через $\{x_\alpha\}$ мы будем обозначать некоторый фиксированный K-базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом мы будем предполагать, что этот базис (или, точнее, множество его индексов) определенным образом упорядочен.

Образ элемента x_α при гомоморфизме $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$ мы будем обозначать через y_α. Для любой конечной последовательности I индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ мы будем через y_I обозначать произведение $y_{\alpha_1} \ldots y_{\alpha_p}$. Число p мы будем называть *длиной* последовательности I. Если $p = 0$, т. е. если последовательность I пуста, то мы по определению полагаем $y_I = 1$. Последовательность I мы будем называть *возрастающей*, если $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_p$. Пустую последовательность мы по определению будем считать возрастающей последовательностью.

ТЕОРЕМА 3.1. *Элементы y_I, соответствующие всем конечным возрастающим последовательностям I, образуют K-базу обертывающей алгебры $\mathfrak{g}^e$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Обертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ K-свободна.*

В частности, из теоремы 3.1 вытекает, что элементы y_α алгебры $\mathfrak{g}^e$ образуют линейно независимую систему. Другими словами, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Отображение* $i: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$ *является* K-*мономорфизмом*[1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Покажем прежде всего, что элементы y_I, соответствующие конечным возрастающим последовательностям I, порождают алгебру $\mathfrak{g}^e$ как K-модуль. Пусть $F_p(\mathfrak{g}^e)$ — образ подмодуля $\sum_{i \le p} T_i(\mathfrak{g})$ алгебры $T(\mathfrak{g})$ при естественном гомоморфизме $T(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}^e$. Достаточно показать, что элементы y_I, соответствующие возрастающим последовательностям I длины не превосходящей p, порождают подмодуль $F_p(\mathfrak{g}^e)$. Мы докажем это утверждение индукцией по числу p. Так как подмодуль $F_p(\mathfrak{g}^e)$ порождается, очевидно, элементами y_I, соответствующими *всем* последовательностям I длины не превосходящей p, то достаточно доказать следующую лемму (справедливую для любых, а не только K-свободных алгебр Ли).

ЛЕММА 3.4. *Для любой последовательности элементов* $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{g}$ *и любой подстановки* π *последовательности индексов* $(1, \ldots, p)$ *имеет место включение*

$$i(a_1) \ldots i(a_p) - i(a_{\pi(1)}) \ldots i(a_{\pi(p)}) \in F_{p-1}(\mathfrak{g}^e).$$

Здесь, как и выше, через i обозначено естественное отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$. Лемму, очевидно, достаточно доказать для случая, когда π является транспозицией двух соседних индексов $j, j+1$. Но в этом случае она очевидна, поскольку

$$i(a_j)\, i(a_{j+1}) - i(a_{j+1})\, i(a_j) = i([a_j, a_{j+1}]).$$

Доказательство K-линейной независимости элементов y_I, соответствующих конечным возрастающим последовательностям I, значительно более сложно. Пусть P — алгебра $K[z_\alpha]$ многочленов от неизвестных z_α, находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами $\{x_\alpha\}$ рассматриваемой базы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для любой конечной последовательности I индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ элемент $z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_p}$ алгебры P мы будем обозначать через z_I.

ЛЕММА 3.5. *Существует такое левое представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в* K-*модуле* P, *что*

$$x_\alpha z_I = z_\alpha z_I \tag{1}$$

всякий раз, когда $\alpha \le I$ (*т. е. когда* $\alpha \le \beta$ *для всех* $\beta \in I$).

---

[1] Отображение i является гомоморфизмом алгебр Ли, если обвертывающую алгебру $\mathfrak{g}^e$ рассматривать как алгебру Ли с операцией

$$[x, y] = xy - yx$$

(см. упражнение 1).

Таким образом, следствие 3.3 означает, что любую K-свободную алгебру Ли можно изоморфно вложить в алгебру Ли, получающуюся указанным выше способом из некоторой ассоциативной алгебры. — *Прим. ред.*

Предполагая лемму 3.5 уже доказанной, закончим доказательство теоремы. Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в K-модуле P, о котором идет речь в лемме 3.5, определяет K-модуль P как левый $\mathfrak{g}^e$-модуль. Для любой возрастающей последовательности I длины n индукцией по n легко доказывается, что $y_I \cdot 1 = z_I$. Следовательно, поскольку элементы z_I линейно независимы в алгебре P, элементы y_I должны быть линейно независимы в алгебре $\mathfrak{g}^e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Обозначая, как обычно, через P_p K-подмодуль алгебры P, состоящий из однородных многочленов степени p, положим $Q_p = \sum_{i \leq p} P_i$. Очевидно, что лемма 3.5 непосредственно вытекает из следующего предложения:

(A_p) *Для любого целого неотрицательного числа p существует и притом только один такой гомоморфизм*

$$f : \mathfrak{g} \otimes Q_p \longrightarrow P,$$

что

$$(1') \qquad f(x_\alpha \otimes z_I) = z_\alpha z_I, \qquad \alpha \leq I, \ z_I \in Q_p,$$

$$(2) \qquad f(x_\alpha \otimes z_I) \in Q_{q+1}, \qquad z_I \in Q_q, \ q < p,$$

$$(3) \qquad f(x_\alpha \otimes f(x_\beta \otimes z_J)) = f(x_\beta \otimes f(x_\alpha \otimes z_J)) + f([x_\alpha, x_\beta] \otimes z_J), \quad z_J \in Q_{p-1},$$

$$(4) \qquad f(x_\alpha \otimes z_I) - z_\alpha z_I \in Q_q, \qquad z_I \in Q_q, \ q \leq p.$$

Легко видеть, что свойство (2) вытекает из свойства (4). Мы сформулировали его отдельно для того, чтобы сделать ясным тот факт, что все члены соотношения (3) имеют смысл.

Предложение (A_p) будем доказывать индукцией по p.

Для $p = 0$ мы гомоморфизм f определим формулой (1), т. е. положим $f(x_\alpha \otimes 1) = z_\alpha$. Свойства (2)—(4) в этом случае выполняются автоматически.

Пусть предложение (A_{p-1}) уже доказано для некоторого $p > 0$. Докажем, что гомоморфизм f, удовлетворяющий всем условиям предложения (A_{p-1}), можно единственным образом продолжить до некоторого гомоморфизма (который мы также будем обозначать через f), удовлетворяющего всем условиям предложения (A_p). Для этого мы должны определить значение $f(x_\alpha \otimes z_I)$ в случае, когда последовательность I имеет длину p. Если $\alpha \leq I$, то значение $f(x_\alpha \otimes z_I)$ определим формулой (1'). Если же соотношение $\alpha \leq I$ не имеет места, то последовательность I можно единственным образом представить в виде $I = (\beta, J)$, где $\alpha > \beta \leq J$. Тогда $z_I = z_\beta z_J = f(x_\beta \otimes z_J)$, так что $f(x_\alpha \otimes z_I)$ совпадает с левой частью соотношения (3). Поэтому значение $f(x_\alpha \otimes z_I)$ естественно определить с помощью этого соотношения. Для того чтобы убедиться в корректности этого определения, нужно проверить, что в рассматриваемом случае правая часть соотношения (3) имеет смысл. Но, по свойству (4),

$$f(x_\alpha \otimes z_J) = z_\alpha z_J + w, \qquad w \in Q_{p-1},$$

и, следовательно, правая часть соотношения (3) имеет вид

$$z_\beta z_\alpha z_J + f(x_\beta \otimes w) + f([x_\alpha, x_\beta] \otimes z_J).$$

Таким образом, гомоморфизм f полностью определен. Очевидно, что он обладает свойствами (1′), (2) и (4). Кроме того, он по построению обладает свойством (3) в случае, когда $\alpha > \beta \leq J$, а следовательно, в силу антикоммутативности операции $[x_\alpha, x_\beta]$, и в случае, когда $\beta > \alpha \leq J$. Так как случай, когда $\alpha = \beta$, тривиален, то тем самым доказано, что гомоморфизм f обладает свойством (3) всякий раз, когда либо $\alpha \leq J$, либо $\beta \leq J$.

Пусть теперь не выполняется ни соотношение $\alpha \leq J$, ни соотношение $\beta \leq J$. Тогда последовательность J имеет положительную длину и ее можно представить в виде $J = (\gamma, L)$, где $\gamma \leq L$, $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$. Используя сокращенное обозначение $f(x_\alpha \otimes z_I) = x_\alpha z_I$ и учитывая предположение индукции, мы получим, что

$$x_\beta(z_J) = x_\beta(x_\gamma z_L) = x_\gamma(x_\beta z_L) + [x_\beta, x_\gamma] z_L = x_\gamma(z_\beta z_L) + x_\gamma w + [x_\beta, x_\gamma] z_L,$$

где $w = x_\beta z_L - z_\beta z_L \in Q_{p-2}$. Применяя к крайним частям полученного равенства оператор x_α, мы получим, что

$$x_\alpha(x_\beta z_J) = x_\alpha(x_\gamma(z_\beta z_L)) + x_\alpha(x_\gamma w) + x_\alpha([x_\beta, x_\alpha] z_L).$$

Так как $\gamma \leq (\beta, L)$, то к слагаемому $x_\alpha(x_\gamma(z_\beta z_L))$ мы можем применить формулу (3); к остальным двум слагаемым формулу (3) мы можем применить по предположению индукции. В результате мы после очевидных упрощений получим, что

$$(5)\quad x_\alpha(x_\beta z_J) = x_\gamma(x_\alpha(x_\beta z_L)) + [x_\alpha, x_\gamma](x_\beta z_L) + \\ + [x_\beta, x_\gamma](x_\alpha z_L) + [x_\alpha, [x_\beta, x_\gamma]] z_L.$$

Так как наши предположения симметричны относительно индексов α и β, то, переставив в формуле (5) индексы, мы также получим верное равенство. Вычитая это равенство из равенства (5), мы получим соотношение

$$(6)\quad x_\alpha(x_\beta z_J) - x_\beta(x_\alpha z_J) = x_\gamma\{x_\alpha(x_\beta z_L) - x_\beta(x_\alpha z_L)\} + \\ + [x_\alpha, [x_\beta, x_\gamma]] z_L - [x_\beta, [x_\alpha, x_\gamma]] z_L.$$

С другой стороны, из формулы (3) следует, что

$$x_\gamma\{x_\alpha(x_\beta z_L) - x_\beta(x_\alpha z_L)\} = x_\gamma([x_\alpha, x_\beta] z_L) = \\ = [x_\alpha, x_\beta](x_\gamma z_L) + [x_\gamma, [x_\alpha, x_\beta]] z_L = [x_\alpha, x_\beta] z_J + [x_\gamma, [x_\alpha, x_\beta]] z_L.$$

Подставляя это соотношение в формулу (6), мы получим, что в силу тождества Якоби три члена, содержащие двойные скобки, взаимно сокращаются. Следовательно,

$$x_\alpha(x_\beta z_J) - x_\beta(x_\alpha z_J) = [x_\alpha, x_\beta] z_J.$$

Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

Теорема 3.1 впервые была доказана Пуанкаре [Poincaré H., *Cambridge Phil. Trans.*, **18** (1899), 220—225, § III]; более полное доказательство, опирающееся, однако, на те же самые соображения, было дано позднее Виттом (Witt E., *J. reine angew. Math.*, **177** (1937), 152—166; Hilfsatz, 153). Приведенное здесь доказательство по существу принадлежит Ивасава.

4. ПОДАЛГЕБРЫ И ИДЕАЛЫ

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K отображение вложения $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ индуцирует, очевидно, некоторый гомоморфизм K-алгебр

$$(1) \qquad \varphi : \mathfrak{h}^e \to \mathfrak{g}^e,$$

позволяющий рассматривать алгебру $\mathfrak{g}^e$ как левый или правый $\mathfrak{h}^e$-модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если K-модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, то гомоморфизм φ является мономорфизмом и алгебра $\mathfrak{g}^e$, рассматриваемая как левый или правый $\mathfrak{h}^e$-модуль, $\mathfrak{h}^e$-свободна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в точной последовательности K-модулей $0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to 0$ модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, то эта точная последовательность расщепляема и потому модуль $\mathfrak{g}$ также K-свободен. Более того, в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует K-базис, представляющий собой объединение двух таких непересекающихся множеств $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, что множество $\{x_\alpha\}$ является K-базисом алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Объединение $A \cup B$ непересекающихся множеств A и B мы упорядочим так, чтобы любой элемент $\alpha \in A$ предшествовал любому элементу $\beta \in B$. Каждый элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы отождествим с его образом в обертывающей алгебре $\mathfrak{g}^e$ при мономорфизме $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$. Применяя теорему 3.1, мы получим, что элементы

$$x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_p} y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_q}, \qquad \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_p \in A, \ \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_q \in B,$$

составляют K-базу алгебры $\mathfrak{g}^e$, а элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}$, где $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_p$, — K-базу алгебры $\mathfrak{h}^e$. Следовательно, гомоморфизм (1) является мономорфизмом, а элементы $y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_q}$, где $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_q$, составляют левую $\mathfrak{h}^e$-базу алгебры $\mathfrak{g}^e$. Аналогично доказывается, что эти же элементы составляют и правую $\mathfrak{h}^e$-базу алгебры $\mathfrak{g}^e$.

Применяя теперь предложения X, 7.2 и X, 7.3, мы получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если K-модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, то для любого правого $\mathfrak{h}$-модуля A и любого левого $\mathfrak{h}$-модуля C*

$$(2) \qquad H_n(\mathfrak{h}, A) \approx H_n(\mathfrak{g}, A \otimes_{\mathfrak{h}^e} \mathfrak{g}^e),$$

$$(2a) \qquad H^n(\mathfrak{h}, C) \approx H^n(\mathfrak{g}, \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h}^e}(\mathfrak{g}^e, C)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Если K-модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, то для любого правого $\mathfrak{g}$-модуля A и любого левого $\mathfrak{g}$-модуля C*

$$(3) \qquad H_n(\mathfrak{h}, A) \approx \operatorname{Tor}_n^{\mathfrak{g}^e}(A, \mathfrak{g}^e \otimes_{\mathfrak{h}^e} K),$$

$$(3a) \qquad H^n(\mathfrak{h}, C) \approx \operatorname{Ext}_{\mathfrak{g}^e}^n(\mathfrak{g}^e \otimes_{\mathfrak{h}^e} K, C).$$

Появляющийся в соотношениях (3) и (3a) модуль $\mathfrak{g}^e \otimes_{\mathfrak{h}^e} K$ представляет собой группу гомологий $H_0(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^e)$, которую, как доказано в § 2, можно отождествить с фактормодулем $\mathfrak{g}^e/\mathfrak{g}^e\mathfrak{h}$. Если подалгебра $\mathfrak{h}$ является *идеалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то подмодуль $\mathfrak{g}^e\mathfrak{h}$ совпадает с двусторонним идеалом L, рассмотренным в предложении 1.3. Таким образом, если подалгебра $\mathfrak{h}$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то

$$\mathfrak{g}^e \otimes_{\mathfrak{h}^e} K \approx (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является идеалом и K-модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, то для любого правого $\mathfrak{g}$-модуля A и любого левого $\mathfrak{g}$-модуля C*

$$H_n(\mathfrak{h}, A) \approx \operatorname{Tor}_n^{\mathfrak{g}^e}(A, (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e), \tag{4}$$

$$H^n(\mathfrak{h}, C) \approx \operatorname{Ext}_{\mathfrak{g}^e}^n((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e, C). \tag{4a}$$

Эти изоморфизмы позволяют группу $H_n(\mathfrak{h}, A)$ определить как правый, а группу $H^n(\mathfrak{h}, C)$ — как левый $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-модули.

В § XVI, 6 мы получим другие, более глубокие соотношения между группами гомологий (и когомологий) алгебр Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

5. ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K мы определим диагональное отображение

$$D : \mathfrak{g}^e \to \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e,$$

положив

$$Dx = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Если алгебру $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e$ мы отождествим с алгеброй $(\mathfrak{g} + \mathfrak{g})^e$ с помощью изоморфизма, рассмотренного в предложении 1.2, то диагональное отображение D совпадет с отображением l^e, индуцированным гомоморфизмом $l : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} + \mathfrak{g}$, определенным формулой $lx = (x, x) = (x, 0) + (0, x)$. Отсюда вытекает, что диагональное отображение D согласовано с пополняющим гомоморфизмом (в смысле § XI, 8), а также обладает свойствами коммутативности и ассоциативности (в смысле § XI, 4).

Пусть

$$E : \mathfrak{g}^e \longrightarrow \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*} = (\mathfrak{g}^e)^e$$

— сквозное отображение

$$\mathfrak{g}^e \xrightarrow{D} \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e \xrightarrow{\mathfrak{g}^e \otimes \omega} \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*},$$

где $\omega : \mathfrak{g}^e \approx \mathfrak{g}^{e*}$ — определенный в § 1 антиподизм.
Легко видеть, что

$$Ex = x \otimes 1 - 1 \otimes x^*, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

причем E является единственным отображением, обладающим этим свойством.

Покажем, что отображение E обладает свойством (Е. 1) из § X, 6. С этой целью обозначим через I и J ядра пополняющих эпиморфизмов

$$\varepsilon : \mathfrak{g}^e \longrightarrow K \text{ и } \rho : \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*} \longrightarrow \mathfrak{g}^e$$

соответственно. Согласно предложению IX, 3.1, J является левым идеалом алгебры $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*}$, порожденным элементами вида $u \otimes 1 - 1 \otimes u^*$, $u \in \mathfrak{g}^e$. Ввиду соотношения

$$(uv) \otimes 1 - 1 \otimes (uv)^* =$$
$$= (u \otimes 1)(v \otimes 1 - 1 \otimes v^*) + (1 \otimes v^*)(u \otimes 1 - 1 \otimes u^*),$$

справедливого для любых элементов $u, v \in \mathfrak{g}^e$, левый идеал J порождается элементами вида

$$x \otimes 1 - 1 \otimes x^* = Ex, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Так как элементы $x \in \mathfrak{g}$ порождают идеал I алгебры $\mathfrak{g}^e$, то тем самым показано, что левый идеал J порождается образом EI идеала I в алгебре $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*}$. Но это как раз и означает, что выполняется свойство (Е. 1) из § X, 6.

Предположим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ K-свободна. Тогда, согласно следствию 3.2, обвертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ также K-свободна. Следовательно, мы можем в группах гомологий и когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определить с помощью диагонального отображения D умножения $\smile$ и $\frown$ (см. § XI, 7). При этом, ввиду того, что отображения D и ω, очевидно, обладают свойствами (i)—(vi) из § XI, 8, все результаты § XI, 8 и XI, 9 (в частности, теоремы редукции) полностью применимы к группам гомологий и когомологий любой K-свободной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Покажем теперь (по-прежнему предполагая, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ K-свободна), что отображение E обладает свойством (Е. 2) из § X, 6, т. е. что алгебра $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^{e*}$, определенная с помощью отображения E как правый $\mathfrak{g}^e$-модуль, $\mathfrak{g}^e$-проективна. Поскольку отображение $\mathfrak{g}^e \otimes \omega$ изоморфно, достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e$, определенная как правый $\mathfrak{g}^e$-модуль с помощью отображения D, $\mathfrak{g}^e$-свободна. Если алгебру $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e$ мы отождествим с алгеброй $(\mathfrak{g}+\mathfrak{g})^e$, то отображение D перейдет в отображение l^e, где $l : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} + \mathfrak{g}$ — гомоморфизм алгебр Ли, определенный формулой $lx = (x, x)$. Так как гомоморфизм l является мономорфизмом, а K-модуль Coker l изоморфен K-свободному K-модулю $\mathfrak{g}$, то из предложения 4.1 непосредственно вытекает, что алгебра $(\mathfrak{g} + \mathfrak{g})^e$ $\mathfrak{g}^e$-свободна.

Таким образом, отображение E удовлетворяет условиям (Е. 1) и (Е. 2), так что применима теорема X, 6.1. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная K-свободная алгебра Ли над кольцом K, A — произвольный двусторонний $\mathfrak{g}^e$-модуль,* *а A_E и $_EA$ — правый и левый $\mathfrak{g}$-модули, совпадающие как группы с модулем A, операторы на которых определены формулами:*

$$(a, x) \longrightarrow ax - xa, \qquad a \in A, \ x \in \mathfrak{g},$$

и

$$(x, a) \longrightarrow xa - ax, \qquad a \in A, \ x \in \mathfrak{g}.$$

Тогда имеют место следующие изоморфизмы:

$$F_n^E : H_n(\mathfrak{g}^e, A) \approx H_n(\mathfrak{g}, A_E),$$
$$F_E^n : H^n(\mathfrak{g}, {_EA}) \approx H^n(\mathfrak{g}^e, A).$$

Кроме того, для любой Λ-проективной (где $\Lambda = \mathfrak{g}^e$) резольвенты X кольца K (как левого Λ-модуля) комплекс $\Lambda^e \otimes_\Lambda X$ является Λ^e-проективной резольвентой алгебры Λ, рассматриваемой как левый Λ^e-модуль.

Пусть, в частности, $\mathfrak{g}$ является K-свободной коммутативной алгеброй Ли с конечной K-базой $x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$\mathfrak{g}^e = K [x_1, \ldots, x_n] = \Lambda$$

и, как мы знаем из § VIII, 4, градуированный модуль $\Lambda \otimes E(x_1, \ldots, x_n)$, снабженный соответствующим дифференциальным оператором, является $\mathfrak{g}^e$-проективной резольвентой модуля K. Поэтому, согласно теореме 5.1, градуированный модуль $\Lambda^e \otimes E(x_1, \ldots, x_n)$, снабженный соответствующим дифференциальным оператором, является Λ^e-проективной резольвентой модуля Λ.

Теорема X, 6.2 для случая алгебр Ли принимает следующий вид:

ТЕОРЕМА 5.2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K K-свободна, то*

$$\dim \mathfrak{g}^e = \dim_{\mathfrak{g}^e} K.$$

Если, кроме того, коммутативное кольцо K полупросто, то

$$\dim \mathfrak{g}^e = \mathrm{gl.} \dim \mathfrak{g}^e.$$

Вследствие существования антиподизма ω здесь нет необходимости различать размерности $\mathrm{l.} \dim_{\mathfrak{g}^e} K$ и $\mathrm{r.} \dim_{\mathfrak{g}^e} K$, а также размерности $\mathrm{l. gl.} \dim \mathfrak{g}^e$ и $\mathrm{r. gl.} \dim \mathfrak{g}^e$.

6. ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ В СТАНДАРТНЫХ КОМПЛЕКСАХ

Здесь мы установим одно соотношение, имеющее место в нормализованном стандартном комплексе $N(\Lambda)$ произвольной (ассоциативной) K-алгебры Λ; это соотношение нам понадобится в следующем параграфе.

Во избежание путаницы с обозначением операции в алгебрах Ли мы заменим здесь введенное в § IX, 6 обозначение $[x_1, \ldots, x_n]$ элементов комплекса $N(\Lambda)$ обозначением $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Каждому элементу y алгебры Λ мы сопоставим Λ^e-эндоморфизмы $\sigma(y)$ и $\vartheta(y)$ комплекса $N(\Lambda)$, определив их формулами:

$$(1) \qquad \sigma(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \{x_1, \ldots, x_i, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\},$$

$$(2)\quad \vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = y\{x_1, \ldots, x_n\} - \{x_1, \ldots, x_n\}y - \\ - \sum_{1\le i\le n}\{x_1, \ldots, x_{i-1}, [y, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n\},$$

где $[y, x] = yx - xy$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любого элемента $y \in \Lambda$ имеет место тождество*

$$(3)\qquad d\sigma(y) + \sigma(y)d - \vartheta(y) = 0,$$

где d — дифференциальный оператор комплекса $N(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(y)$ — левая часть тождества (3). Мы должны доказать, что для любого $n \geq 0$

$$(4)\qquad A(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = 0.$$

Для $n = 0$ это очевидно. Пусть соотношение (4) уже доказано для некоторого $n-1$, где $n > 0$. Рассмотрим построенную в § IX, 6 стягивающую гомотопию s комплекса $N(\Lambda)$. Так как на всех элементах положительной степени эндоморфизм $ds + sd$ является тождественным отображением, то для любого $n > 0$ соотношение (4) равносильно соотношениям

$$(5)\qquad sA(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = 0,$$

$$(6)\qquad sdA(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = 0.$$

Вспоминая, что в нормализованном стандартном комплексе имеет место соотношение $s(y\{x_1, \ldots, x_n\}y') = \{y, x_1, \ldots, x_n\}y'$, причем правая часть этой формулы равна нулю, если $y = 1$, мы немедленно получаем, что

$$sd\sigma(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = s(y\{x_1, \ldots, x_n\} - x_1\sigma(y)\{x_2, \ldots, x_n\}),$$
$$s\sigma(y)d\{x_1, \ldots, x_n\} = s(x_1\sigma(y)\{x_2, \ldots, x_n\}),$$
$$-s\vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = -s(y\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Складывая эти соотношения, мы получим соотношение (5).

Для доказательства соотношения (6) вычислим сначала элемент

$$z = dA(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = d\sigma(y)d\{x_1, \ldots, x_n\} - d\vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Из предположения индукции вытекает, что

$$z = \vartheta(y)d\{x_1, \ldots, x_n\} - d\vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Нам нужно показать, что элемент z принадлежит ядру эндоморфизма s. Но с точностью до слагаемого из этого ядра элемент $d\vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\}$ совпадает, очевидно, с выражением

$$yd\{x_1, \ldots, x_n\} - x_1\{x_2, \ldots, x_n\}y - [y, x_1]\{x_2, \ldots, x_n\} - \\ - \sum_{2\le i\le n} x_1\{x_2, \ldots, x_{i-1}, [y, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n\},$$

а элемент $\vartheta(y)d\{x_1, \ldots, x_n\}$ — с выражением

$$x_1y\{x_2, \ldots, x_n\} + y(d\{x_1, \ldots, x_n\} - x_1\{x_2, \ldots, x_n\}) -$$
$$- x_1\{x_2, \ldots, x_n\}y - \sum_{2\le i\le n} x_1\{x_2, \ldots, x_{i-1}, [y, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n\}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что эти выражения одинаковы.

Предположим теперь, что Λ является дополненной K-алгеброй с пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon: \Lambda \to K$. В соответствующем нормализованном стандартном комплексе $N(\Lambda, \varepsilon) = N(\Lambda) \otimes_\Lambda K$ эндоморфизмы $\sigma(y)$ и $\vartheta(y)$ комплекса $N(\Lambda)$ индуцируют некоторые отображения, которые мы также будем обозначать через $\sigma(y)$ и $\vartheta(y)$. Эти отображения являются Λ-эндоморфизмами левого Λ-модуля $N(\Lambda, \varepsilon)$ и также удовлетворяют соотношению (3). В явном виде эндоморфизм $\sigma(y)$ комплекса $N(\Lambda, \varepsilon)$ определяется той же формулой (1), а эндоморфизм $\vartheta(y)$ — формулой

$$(2') \quad \vartheta(y)\{x_1, \ldots, x_n\} = y\{x_1, \ldots, x_n\} - \{x_1, \ldots, x_n\}(\varepsilon y) -$$
$$- \sum_{1\le i\le n} \{x_1, \ldots, x_{i-1}, [y, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n\}.$$

7. КОМПЛЕКС $V(\mathfrak{g})$

На протяжении всего этого параграфа мы будем через $\mathfrak{g}$ обозначать произвольную K-свободную алгебру Ли над кольцом K.

Внешнюю алгебру[1] K-модуля $\mathfrak{g}$ мы обозначим через $E(\mathfrak{g})$. Рассмотрим тензорное произведение (над кольцом K)

$$V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g}),$$

являющееся левым $\mathfrak{g}^e$-модулем. Так как алгебра $E(\mathfrak{g})$ K-свободна, этот модуль $\mathfrak{g}^e$-свободен. Градуировка алгебры $E(\mathfrak{g})$ естественным образом определяет в $V(\mathfrak{g})$ градуировку

$$V_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^e \otimes E_n(\mathfrak{g}).$$

Так как $E_0(\mathfrak{g}) = K$, то $V_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^e$ и, следовательно, пополняющий гомоморфизм $\varepsilon: \mathfrak{g}^e \to K$ определяет пополняющее отображение $\varepsilon: V(\mathfrak{g}) \to K$, равное нулю на всех однородных составляющих $V_n(\mathfrak{g})$ степени $n > 0$.

Элемент $u \otimes (x_1 \ldots x_n) \in \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g}) = V(\mathfrak{g})$, где $u \in \mathfrak{g}^e$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, мы будем обозначать через $u\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Если $u = 1$, то мы будем пользоваться упрощенным обозначением $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. В частности, через $\langle\,\rangle$ мы будем обозначать элемент $1 \otimes 1$ модуля $\mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g})$.

[1] Внешней алгеброй модуля $\mathfrak{g}$ называется внешняя алгебра над кольцом K, образующими которой являются элементы модуля $\mathfrak{g}$. Системой образующих этой алгебры является, в частности, любая K-база модуля $\mathfrak{g}$. — *Прим. перев.*

Рассмотрим $\mathfrak{g}^e$-гомоморфизм

$$f: V(\mathfrak{g}) \longrightarrow N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$$

модуля $V(\mathfrak{g})$ в нормализованный стандартный комплекс $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$ дополненной алгебры $\mathfrak{g}^e$, определенный формулой

$$f\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \sum_{\pi} (-1)^{\tau(\pi)} \{x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}\},$$

где суммирование распространено на всевозможные подстановки π индексов $1, \ldots, n$, а $\tau(\pi)$ — знак подстановки π. Для проверки корректности этого определения достаточно заметить, что $f\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = 0$ всякий раз, когда $x_i = x_j$, где $0 \leq i < j \leq n$. Согласно этому определению, $f\langle\ \rangle = \{\ \}$.

Выбрав упорядоченную K-базу алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы обычным способом можем построить некоторую K-базу внешней алгебры $E(\mathfrak{g})$ и тем самым некоторую $\mathfrak{g}^e$-базу модуля $V(\mathfrak{g})$[1]. Легко видеть, что при гомоморфизме f так построенная $\mathfrak{g}^e$-база модуля $V(\mathfrak{g})$ переходит в некоторую $\mathfrak{g}^e$-линейно независимую систему элементов комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$. Другими словами, отображение f является мономорфизмом. В дальнейшем мы модуль $V(\mathfrak{g})$ будем рассматривать как $\mathfrak{g}^e$-подмодуль комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$, считая, таким образом, мономорфизм f отображением вложения.

ТЕОРЕМА 7.1. *Подмодуль* $V(\mathfrak{g})$ *комплекса* $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$ *является подкомплексом. Дифференциальный оператор в комплексе* $V(\mathfrak{g})$ *задается формулой*

$$\begin{aligned} d\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = &\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i+1} x_i \langle x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\rangle + \\ (1) \qquad &+ \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j} \langle [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\rangle. \end{aligned}$$

Комплекс $V(\mathfrak{g})$, *рассматриваемый вместе с пополняющим отображением* $\varepsilon: V(\mathfrak{g}) \to K$, *является* $\mathfrak{g}^e$-*свободной резольвентой кольца* K *как левого* $\mathfrak{g}^e$-*модуля*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы убедиться, что подмодуль $V(\mathfrak{g})$ является подкомплексом комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$, достаточно проверить, что дифференциальный оператор комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$ на подмодуле $V(\mathfrak{g})$ определяется формулой (1). Для $n = 0$ это очевидно, так как в этом случае формула (1) имеет вид $d\langle\ \rangle = 0$.

Предположим, что для некоторого n формула (1) уже доказана. Рассмотрим эндоморфизмы $\sigma(x)$ и $\vartheta(x)$ комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$, определенные формулами 6, (1) и 6, (2'). Очевидно, что для любых элементов $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$

$$(2) \qquad \sigma(y)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle,$$

$$(3) \qquad \vartheta(y)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = y\langle x_1, \ldots, x_n\rangle - \sum_{1\leq i\leq n} \langle x_1, \ldots, [y, x_i], \ldots, x_n\rangle.$$

[1] См. ниже формулу (4). — *Прим. ред.*

Из соотношения $d\sigma(y)+\sigma(y)d=\vartheta(y)$ (см. теорему 6.1) и формулы (2) вытекает, что

$$d\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle = d\sigma(y)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \vartheta(y)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle - \sigma(y)d\langle x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

Используя формулы (2) и (3), а также предположение индукции, мы получим отсюда соотношение

$$\begin{aligned} d\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle = y\langle x_1, \ldots, x_n\rangle + \sum_{1\le i\le n} (-1)^i \langle [y, x_i], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\rangle + \\ + \sum_{1\le i\le n} (-1)^i x_i \langle y, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\rangle - \\ - \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j} \langle y, [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\rangle, \end{aligned}$$

т. е. формулу (1) для элемента $d\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle$. Таким образом, формула (1) полностью доказана.

Мы уже отмечали, что комплекс $V(\mathfrak{g})$ обладает $\mathfrak{g}^e$-базой и, следовательно, является $\mathfrak{g}^e$-свободным комплексом.

Ядром пополняющего отображения $V_0(\mathfrak{g}) \to K$ является K-модуль, порожденный элементами вида $x_1 \ldots x_p\langle\,\rangle$, где $x_i \in \mathfrak{g}$ и $p>0$. Так как $x_1 \ldots x_p\langle\,\rangle = d(x_1 \ldots x_{p-1}\langle x_p\rangle)$, то отсюда следует, что последовательность $V_1(\mathfrak{g}) \to V_0(\mathfrak{g}) \to K \to 0$ точна. Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, что $H_q(V(\mathfrak{g}))=0$ для всех $q>0$. Излагаемое ниже доказательство этого утверждения принадлежит Косулу.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — упорядоченная K-база алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда элементы вида $\langle x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}\rangle$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, $n \ge 0$ образуют K-базу алгебры $E(\mathfrak{g})$, а элементы вида $x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_m}$, $\beta_1 \le \ldots \le \beta_m$, где $m \ge 0$, — K-базу алгебры $\mathfrak{g}^e$ (см. теорему 3.1). Поэтому элементы вида

$$(4)\qquad x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_m}\langle x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}\rangle \qquad \begin{matrix} \alpha_1 < \ldots < \alpha_n, & n \ge 0, \\ \beta_1 \le \ldots \le \beta_m, & m \ge 0, \end{matrix}$$

образуют K-базу комплекса $V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g})$. Пусть $F_pV(\mathfrak{g})$ — подмодуль комплекса $V(\mathfrak{g})$, порожденный всеми элементами (4), для которых $m+n \le p$. В фактормодуле $W_p = F_pV(\mathfrak{g})/F_{p-1}V(\mathfrak{g})$ образы элементов (4) с $m+n=p$ составляют, очевидно, некоторую K-базу. При этом в силу леммы 3.4 образ в фактормодуле W_p некоторого элемента (4) не зависит от порядка, в котором записаны множители $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_m}$. Из формулы (1) для дифференциала d комплекса $V(\mathfrak{g})$ непосредственно вытекает, что с точностью до элементов подмодуля $F_{m+n-1}V(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} (5)\quad d\,(x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_m}\langle x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}\rangle) = \\ = \sum_{1\le i\le n} (-1)^{i+1} x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_m} x_{\alpha_i}\langle x_{\alpha_1}, \ldots, \hat{x}_{\alpha_i}, \ldots, x_{\alpha_n}\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, подмодуль $F_pV(\mathfrak{g})$ комплекса $V(\mathfrak{g})$ является подкомплексом, причем индуцированный дифференциальный оператор фактормодуля W_p определяется формулой (5).

Таким образом, комплекс $W = \sum_p W_p$ можно отождествить с комплексом

$$K\,[x_a] \otimes E(x_a),$$

дифференциальный оператор которого определяется формулой (5). Но, как легко видеть, последний комплекс изоморфен построенной в § VIII, 4 проективной резольвенте кольца K, рассматриваемого как левый $K\,[x_a]$-модуль. Таким образом, $H_q(W) = 0$ для всех $q > 0$ и, следовательно, $H_q(W_p) = 0$ для всех $q > 0$.

Отсюда, ввиду точности последовательности

$$H_q(F_{p-1}V(\mathfrak{g})) \longrightarrow H_q(F_pV(\mathfrak{g})) \longrightarrow H_q(W_p), \qquad q > 0,$$

вытекает, что отображение $H_q(F_{p-1}V(\mathfrak{g})) \to H_q(F_pV(\mathfrak{g}))$ является эпиморфизмом. Но $F_{-1}V(\mathfrak{g}) = 0$ и, следовательно, $H_q(F_pV(\mathfrak{g})) = 0$ для любого $q>0$ и любого p. Поэтому $H_q(V(\mathfrak{g})) = 0$ для любого $q > 0$, ибо $V(\mathfrak{g}) = \bigcup_p F_pV(\mathfrak{g})$. Тем самым теорема полностью доказана.

8. ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЛЕКСА $V(\mathfrak{g})$

Покажем прежде всего, как с помощью комплекса $V(\mathfrak{g})$ вычисляются группы гомологий и когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для любого правого $\mathfrak{g}$-модуля A группами гомологий $H_q(\mathfrak{g}, A)$ являются группы гомологий комплекса

$$A \otimes_{\mathfrak{g}^e} V(\mathfrak{g}) = A \otimes_{\mathfrak{g}^e} \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g}) = A \otimes E(\mathfrak{g}),$$

дифференциальный оператор которого определяется формулой

$$d(a \otimes \langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i+1} (ax_i) \otimes \langle x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\rangle + \\ + \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j}\, a \otimes \langle [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\rangle.$$

Аналогично для любого левого $\mathfrak{g}$-модуля C группами когомологий $H^q(\mathfrak{g}, C)$ являются группы гомологий комплекса

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(V(\mathfrak{g}), C) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(\mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g}), C) = \mathrm{Hom}\,(E(\mathfrak{g}), C).$$

q-мерные коцепи $f: E_q(\mathfrak{g}) \to C$ последнего комплекса можно рассматривать как кососимметрические K-линейные функции $f(x_1, \ldots, x_q)$ от q аргументов, пробегающих алгебру Ли $\mathfrak{g}$, со значениями в $\mathfrak{g}$-модуле C. Кограницей δf коцепи f является $(q+1)$-мерная коцепь, определенная формулой

$$(\delta f)(x_1, \ldots, x_{q+1}) = \sum_{1 \le i \le q+1} (-1)^{+1} x_i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}) + \\ + \sum_{1 \le i < j \le q+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{q+1}).$$

Это описание групп когомологий $H^q(\mathfrak{g}, C)$ показывает, что они совпадают с группами когомологий алгебр Ли в смысле Шевалле и Эйленберга [Chevalley C., Eilenberg S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124].

Напомним, что комплекс $V(\mathfrak{g})$ является подкомплексом нормализованного стандартного комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$. В связи с этим полезно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Любую коцепь $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(V(\mathfrak{g}), C)$ можно продолжить до некоторой коцепи $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon), C)$. Если коцепь f является коциклом, то ее продолжение f' также может быть выбрано коциклом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из того, что комплекс $V(\mathfrak{g})$ как $\mathfrak{g}^e$-модуль является (см. описанное в § 7 построение базы этого комплекса) прямым слагаемым $\mathfrak{g}^e$-модуля $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$. Предположим теперь, что $\delta f = 0$. Так как группы когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построенные с помощью комплексов $V(\mathfrak{g})$ и $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$, изоморфны и этот изоморфизм индуцируется отображением вложения $V(\mathfrak{g}) \to N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$, то в группе $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon), C)$ существует коцикл g', являющийся продолжением некоторого коцикла $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(V(\mathfrak{g}), C)$, когомологичного коциклу f. Таким образом, $f - g = \delta h$. Пусть h' — произвольное продолжение коцепи h. Тогда коцепь $f' = g' + \delta h'$ является продолжением коцикла f, причем $\delta f' = 0$.

Применим теперь комплекс $V(\mathfrak{g})$ к вычислению размерности.

ТЕОРЕМА 8.2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет K-базу, состоящую из n элементов, то*

$$\dim \mathfrak{g}^e = \dim_{\mathfrak{g}^e} K = n.$$

Если, кроме того, коммутативное кольцо K полупросто, то

$$\mathrm{gl.}\ \dim \mathfrak{g}^e = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 5.2 достаточно доказать что $\dim_{\mathfrak{g}^e} K = n$. Так как $E_q(\mathfrak{g}) = 0$ для любого $q > n$, то комплекс $V(\mathfrak{g})$ имеет размерность n и потому $\dim_{\mathfrak{g}^e} K \leq n$. Примем теперь за модуль коэффициентов группу $E_n(\mathfrak{g})$, определив на ней левые $\mathfrak{g}$-операторы формулой

$$y\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x_1, \ldots, [y, x_i], \ldots, x_n\rangle.$$

Легко видеть, что $\delta f = 0$ для любой $(n-1)$-мерной коцепи $f: V(\mathfrak{g}) \to E_n(\mathfrak{g})$ (см. упражнение 15). Поэтому группа $H^n(\mathfrak{g}, E_n(\mathfrak{g}))$ изоморфна K-модулю n-мерных коцепей $E_n(\mathfrak{g}) \to E_n(\mathfrak{g})$, т. е. изоморфна модулю K. Следовательно, $\dim_{\mathfrak{g}^e} K \geq n$.

Перейдем теперь к вычислению умножений с помощью комплекса $V(\mathfrak{g})$. В первую очередь рассмотрим внешние умножения в группах гомологий и когомологий двух K-свободных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ над одним и тем же кольцом K. В соответствии с результатами

§ 1 мы будем алгебру $\mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{h}^e$ систематически отождествлять с алгеброй $(\mathfrak{g} + \mathfrak{h})^e$. Как мы знаем из § XI, 5, для вычисления умножений $\perp$ и $\top$ необходимо иметь некоторое отображение

$$f : V(\mathfrak{g}) \otimes V(\mathfrak{h}) \longrightarrow V(\mathfrak{g} + \mathfrak{h}),$$

а для вычисления умножений $\vee$ и $\wedge$ — некоторое отображение

$$g : V(\mathfrak{g} + \mathfrak{h}) \longrightarrow V(\mathfrak{g}) \otimes V(\mathfrak{h}).$$

За отображение g мы примем естественный изоморфизм

$$(1) \qquad V(\mathfrak{g} + \mathfrak{h}) \approx V(\mathfrak{g}) \otimes V(\mathfrak{h}),$$

индуцированный в силу отождествления $(\mathfrak{g} + \mathfrak{h})^e = \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{h}^e$ естественным изоморфизмом $E(\mathfrak{g} + \mathfrak{h}) \approx E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{h})$. Обратный же изоморфизм мы примем за отображение f. Как легко видеть, оба эти отображения являются $(\mathfrak{g} + \mathfrak{h})^e$-гомоморфизмами и перестановочны с дифференциальными операторами.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна, то обертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ также коммутативна, так что определены внутренние умножения $\smile$ и $\frown$. Как мы знаем из § XI, 5, для вычисления умножений $\smile$ и $\frown$ необходимо иметь некоторое отображение

$$V(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} V(\mathfrak{g}) \longrightarrow V(\mathfrak{g}).$$

Чтобы получить такое отображение, достаточно определить модуль $V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g})$ как дифференциальную $\mathfrak{g}^e$-алгебру (см. упражнение 15).

Рассмотрим, наконец, умножения $\smile$ и $\frown$, определенные с помощью диагонального отображения $D : \mathfrak{g}^e \to \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e = (\mathfrak{g} + \mathfrak{g})^e$ (см. § 5). Как мы знаем из § XI, 5, для вычисления этих умножений необходимо иметь некоторое отображение

$$V(\mathfrak{g}) \longrightarrow V(\mathfrak{g}) \otimes V(\mathfrak{g}).$$

Такое отображение может быть построено с помощью отображений $\mathfrak{g}^e \to \mathfrak{g}^e \otimes \mathfrak{g}^e$ и $E(\mathfrak{g}) \to E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})$, каждое из которых задается соответствием $x \to x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $x \in \mathfrak{g}$. Если, используя это отображение, вычислить в явном виде $\smile$-произведение двух произвольных коцепей, то получится классическая формула умножения полилинейных кососимметрических форм. Именно, пусть $f \in \mathrm{Hom}(E_p(\mathfrak{g}), C)$ и $f' \in \mathrm{Hom}(E_q(\mathfrak{g}), C')$, где C и C' — некоторые левые $\mathfrak{g}$-модули. Тогда $f \smile f' \in \mathrm{Hom}(E_{p+q}(\mathfrak{g}), C \otimes C')$ (где группа $C \otimes C'$ определяется как левый $\mathfrak{g}$-модуль с помощью диагонального отображения D) и

$$(f \smile f')(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum \pm f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \otimes f'(x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}),$$

где суммирование распространено на все разбиения последовательности $(1, \ldots, p+q)$ на две возрастающие подпоследовательности $(i_1, \ldots, i_p)$ и $(j_1, \ldots, j_q)$. Знак плюс или минус выбирается в зависимости от четности или нечетности подстановки $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Полагая в произвольной ассоциативной K-алгебре A

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in A,$$

показать, что относительно этой операции K-модуль A является алгеброй Ли. Обозначим эту алгебру Ли через $\mathfrak{l}(A)$. Показать, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (над кольцом K) отображение i является гомоморфизмом алгебр Ли

$$i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{l}(\mathfrak{g}^e).$$

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а A — ассоциативная алгебра (над одним и тем же кольцом K). Показать, что любой гомоморфизм алгебр Ли $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}(A)$ можно, и притом единственным способом, представить в виде сквозного отображения

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^e \xrightarrow{h} A,$$

где h — некоторый гомоморфизм K-алгебр. Показать, что это свойство однозначно с точностью до изоморфизма характеризует пару $(\mathfrak{g}^e, i)$.

Показать, что для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда существует мономорфное отображение $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}(A)$, где A — некоторая ассоциативная K-алгебра, когда гомоморфизм $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$ является мономорфизмом.

3. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — образ гомоморфизма $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$, где $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли. Рассматривая $\bar{\mathfrak{g}}$ как алгебру Ли, показать, что отображение вложения $\bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}^e$ обладает характеристическим свойством, указанным в упражнении 2, так что алгебру $\mathfrak{g}^e$ можно отождествить с алгеброй $(\bar{\mathfrak{g}})^e$.

4. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K рассмотрим ассоциативную K-алгебру $A = \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ и отображение

$$\varrho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{l}(A),$$

определенное формулой

$$(\varrho x) y = [x, y].$$

Показать, что отображение ϱ является гомоморфизмом алгебр Ли и что $\varrho = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна (т. е. когда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$). Вывести отсюда, что для любой отличной от нуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ естественное отображение $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^e$ не равно нулю.

5. Пусть M — произвольный K-модуль. Рассмотрим градуированный K-модуль $A(M) = \sum_{k \geq 1} A^k(M)$, где

$$A^1(M) = M, \qquad A^k(M) = \sum_{0<i<k} A^i(M) \otimes_K A^{k-i}(M), \text{ если } k > 1.$$

Отображения вложения $A^k(M) \otimes_K A^h(M) \to A^{k+h}(M)$ определяют в модуле $A(M)$ некоторое отображение $A(M) \otimes_K A(M) \to A(M)$. Получающуюся алгебру $A(M)$ мы будем называть *свободной неассоциативной K-алгеброй* (без единицы) *над модулем* M. В алгебре $A(M)$ рассмотрим двусторонний идеал $J(M)$, порожденный элементами

$$xx \text{ и } x(yz) + y(zx) + z(xy), \qquad x, y, z \in A(M).$$

Показать, что факторалгебра $L(M) = A(M)/J(M)$ является (градуированной) алгеброй Ли; эту алгебру Ли мы будем называть *свободной алгеброй Ли над модулем* M. Показать, что гомоморфизм $j: M \to L(M)$, представляющий собой композицию гомоморфизмов $M = A^1(M) \to A(M) \to L(M)$, является мономорфизмом. Показать, что произвольный K-гомоморфизм $f: M \to \mathfrak{g}$ модуля M в некоторую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K можно, и притом единственным способом, представить в виде сквозного отображения $M \xrightarrow{j} L(M) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g}$, где φ — некоторый гомоморфизм алгебр Ли над кольцом K.

6. [Аксиоматическое описание пары $(L(M), j)$.] Пусть M — произвольный K-модуль, а k — некоторый K-гомоморфизм модуля M в K-алгебру Ли $\mathfrak{l}$. Показать, что если любой K-гомоморфизм $f: M \to \mathfrak{g}$ модуля M в произвольную K-алгебру Ли $\mathfrak{g}$ можно единственным образом представить в виде сквозного отображения

$$M \xrightarrow{k} \mathfrak{l} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{g},$$

где ψ — некоторый гомоморфизм алгебр Ли, то существует, и притом только один, такой изоморфизм $\alpha: \mathfrak{l} \approx L(M)$, что $\alpha k = j$.

7. Пусть $T(M)$ — тензорная алгебра некоторого K-модуля M. Показать, что естественное вложение $M \to T(M)$ можно единственным образом разложить в сквозное отображение $M \xrightarrow{j} L(M) \xrightarrow{i} T(M)$, где i — некоторый гомоморфизм алгебры Ли $L(M)$ в алгебру Ли $\mathfrak{l}(T(M))$. Показать, что гомоморфизм i согласован с градуировками алгебр $L(M)$ и $T(M)$. Показать, что алгебру $T(M)$ можно отождествить с обертывающей алгеброй $L(M)^e$ алгебры Ли $L(M)$. Показать, что образ $\bar{L}(M)$ гомоморфизма i является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{l}(T(M))$, порожденной однородными элементами степени 1 алгебры $T(M)$, т. е. элементами модуля M.

8. Доказать следующую теорему: если модуль M K-свободен, то алгебра Ли $L(M)$ также K-свободна и гомоморфизм $i: L(M) \to T(M)$ является мономорфизмом. Таким образом, в этом случае подалгебра $\bar{L}(M)$ алгебры Ли $\mathfrak{l}(T(M))$, порожденная элементами модуля M, K-свободна и изоморфна алгебре Ли $L(M)$.

[Указание: если алгебра Ли $L(M)$ K-свободна, то из следствия 3.3 и результатов упражнения 7 вытекает, что отображение i мономорфно. Тем самым в случае, когда основное кольцо K является полем, теорема полностью доказана. В случае произвольного коммутативного кольца K для любого K-свободного модуля M существует по крайней мере одна такая свободная абелева группа A, что $M = A \otimes K$. Показать, что $L(M) = L(A) \otimes K$. Тем самым доказательство теоремы сводится к доказательству того, что свободная алгебра Ли $L(A)$ над свободной абелевой группой A Z-свободна. Для этого, очевидно, достаточно показать, что отображение $i : L(A) \to T(A)$ мономорфно. Пусть A_J — подгруппа группы A, порожденная некоторым конечным подмножеством J базы группы A. Так как гомоморфизм $T(A_J) \to T(A)$ является, очевидно, мономорфизмом, то общий случай сводится к случаю, когда свободная абелева группа A имеет конечную базу. В этом последнем случае отображение $L(A) \otimes Z_p \to T(A) \otimes Z_p$, где p — произвольное простое число, является мономорфизмом нулевой степени (ибо для случая, когда K является полем, теорема доказана). Поэтому для доказательства того, что отображение $i : L(A) \to T(A)$ мономорфно, остается только ко всем компонентам $L_k(A) \otimes Z_p \to T_k(A) \otimes Z_p$ этих мономорфизмов применить результат упражнения VII, 12.]

9. Показать, что любое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющее условию леммы 3.5, автоматически обладает свойством (4) из § 3 и, следовательно, определено однозначно.

10. Показать, что если для K-свободной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обертывающая алгебра $\mathfrak{g}^e$ коммутативна, то и сама алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна.

11. Исследовать поведение групп гомологий и когомологий алгебр Ли при замене основного кольца с помощью некоторого гомоморфизма колец $K \to L$ (где кольцо L также коммутативно).

12. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, обладающая конечной K-базой $x_1, \ldots, x_n$. Определим ее *структурные константы* c_{ijk} соотношениями

$$[x_i, x_j] = \sum_k c_{ijk} x_k.$$

Выразить аксиомы алгебр Ли в терминах структурных констант c_{ijk}. Доказать, что в комплексе $K \otimes_{\mathfrak{g}^e} V(\mathfrak{g})$

$$d\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} (-1)^i c_{ijj} \langle x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\rangle.$$

13. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с конечной K-базой $x_1, \ldots, x_n$ называется *унимодулярной*, если для любого элемента $y \in \mathfrak{g}$ в алгебре $E(\mathfrak{g})$ выполняется соотношение

$$\sum_{1 \le j \le n} x_1 \ldots x_{j-1} [y, x_j] x_{j+1} \ldots x_n = 0.$$

Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда унимодулярна, когда в комплексе $K \otimes_{\mathfrak{g}^e} V(\mathfrak{g})$ имеет место соотношение

$$d \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = 0.$$

14. [Другое описание комплекса $V(\mathfrak{g})$.] Пусть $\Lambda = (K, d)$ — кольцо двойных чисел над коммутативным кольцом K и $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$ — тензорная алгебра K-модуля $\Lambda \otimes_K \mathfrak{g}$. Отображение $i : x \to 1 \otimes x$ вкладывает модуль $\mathfrak{g}$ в модуль $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$, а значит, и в алгебру $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$. Определим в алгебре $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$ градуировку (обозначаемую нижними индексами), считая элементы $x \in \mathfrak{g}$ однородными элементами степени 1, а элементы dx, $x \in \mathfrak{g}$, — однородными элементами степени 0. Очевидно, что определенный в модуле $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$ дифференциал d единственным образом можно продолжить до некоторого антидифференцирования d градуированной алгебры $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$, т. е. до такого K-эндоморфизма, что

$$d(uv) = (du)v + (-1)^p u(dv)$$

для любого однородного элемента u степени p из алгебры $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$. Оператор d удовлетворяет соотношению $dd = 0$ и является эндоморфизмом степени -1 (относительно нижних индексов).

Пусть L — двусторонний идеал алгебры $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$, порожденный элементами вида

$$\begin{aligned} &(1) && xx, \\ &(2) && (dx)y - y(dx) - [x, y], \\ &(3) && (dx)(dy) - (dy)(dx) - d[x, y], \end{aligned} \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Доказать, что идеал L однороден и допустим относительно оператора d. Рассмотреть K-алгебру

$$W(\mathfrak{g}) = T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})/L,$$

являющуюся левым $\mathfrak{g}^e$-комплексом над модулем K.

Исходя из гомоморфизмов

$$i : \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda \otimes \mathfrak{g}, \quad j = di : \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda \otimes \mathfrak{g},$$

построить отображения

$$\begin{aligned} &i' : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow T(\Lambda \otimes \mathfrak{g}), && j' : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow T(\Lambda \otimes \mathfrak{g}), \\ &i^* : E(\mathfrak{g}) \longrightarrow W(\mathfrak{g}), && j^* : \mathfrak{g}^e \longrightarrow W(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$
$$\varphi = j^* \otimes i^* : \mathfrak{g}^e \otimes E(\mathfrak{g}) \longrightarrow W(\mathfrak{g}).$$

Доказать, что отображение φ является изоморфизмом комплексов $V(\mathfrak{g})$ и $W(\mathfrak{g})$.

(Указание к доказательству последнего утверждения: обозначая через M двусторонний идеал алгебры $T(\Lambda \otimes \mathfrak{g})$, порожденный всеми элементами вида (2), доказать, что отображение

$j' \otimes i' : T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}) \to T(A \otimes \mathfrak{g})$ индуцирует изоморфизм $T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g}) \approx \approx T(A \otimes \mathfrak{g})/M$.)

15. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ K-свободна, то факторалгебра $W(\mathfrak{g})$ (см. упражнение 14) является градуированной дифференциальной алгеброй, для которой однородная составляющая нулевой степени совпадает с обвертывающей алгеброй $\mathfrak{g}^e$. Следовательно, алгебра $W(\mathfrak{g})$ естественным образом определяется как двусторонний $\mathfrak{g}^e$-модуль, причем определенное в алгебре $W(\mathfrak{g})$ умножение

$$W(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} W(\mathfrak{g}) \longrightarrow W(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

является, очевидно, $\mathfrak{g}^e$-гомоморфизмом. Для любого левого $\mathfrak{g}^e$-модуля A умножение (1) задает гомоморфизм

$$W(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(W(\mathfrak{g}), W(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} A), \tag{2}$$

где под $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}$ подразумевается модуль левых $\mathfrak{g}^e$-гомоморфизмов. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает K-базой, состоящей из n элементов, то для любого k отображение (2) индуцирует некоторые гомоморфизмы

$$\varphi_k : W_{n-k}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} A \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^e}(W_k(\mathfrak{g}), W_n(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} A) \tag{3}$$

[гомоморфизм φ_k представляет собой отображение модуля $(n-k)$-мерных цепей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (с коэффициентами в модуле A) в модуль k-мерных коцепей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (с коэффициентами в модуле $W_n(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}^e} A \approx E_n(\mathfrak{g}) \otimes_K A$)]. Показать, что гомоморфизмы φ_k являются изоморфизмами и перестановочны (с точностью до знака) с граничными и кограничными операторами. Вычислив в явном виде левые $\mathfrak{g}$-операторы на модуле $E_n(\mathfrak{g}) \otimes_K A$, построить естественный изоморфизм

$$H_{n-k}(\mathfrak{g}, A) \approx H^k(\mathfrak{g}, E_n(\mathfrak{g}) \otimes_K A).$$

Полагая, в частности, $k = n$ и $A = K$ (с тривиальными $\mathfrak{g}$-операторами), мы получим, что $H^n(\mathfrak{g}, E_n(\mathfrak{g})) = K$ (см. доказательство теоремы 8.2).

ГЛАВА XIV

РАСШИРЕНИЯ

Введение. Произвольное расширение некоторого алгебраического объекта A определяется, вообще говоря, заданием соответствующего эпиморфизма $f: X \to A$. Это общее понятие мы будем рассматривать в следующих четырех случаях:

(1) для Λ-модулей X и A и эпиморфизма Λ-модулей $f: X \to A$;

(2) для K-алгебр Γ и Λ и эпиморфизма K-алгебр $f: \Gamma \to \Lambda$;

(3) для групп W и Π и эпиморфизма групп $f: W \to \Pi$;

(4) для алгебр Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ и эпиморфизма алгебр Ли $f: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$.

В случае (1) ядро C эпиморфизма f является Λ-модулем. Определить по модулям A и C расширение даже с точностью до «эквивалентности», вообще говоря, нельзя. Как мы покажем, множество классов эквивалентных расширений находится во взаимно однозначном соответствии с группой $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C)$ (этим и объясняется обозначение «Ext»[1]).

В случаях (2), (3) и (4) возникают некоторые осложнения, и поэтому мы будем их здесь рассматривать лишь при определенных ограничениях, налагаемых на ядро C эпиморфизма f. В случае (2) мы будем предполагать, что двусторонний идеал C алгебры Γ является двусторонним Λ-модулем; в случае (3) — что нормальный делитель C группы W является Π-модулем (и, следовательно, абелевой подгруппой); в случае (4) — что идеал C алгебры Ли $\mathfrak{h}$ является $\mathfrak{g}$-модулем (и, следовательно, коммутативен). При этих предположениях в каждом из трех случаев множество всех классов эквивалентных расширений находится во взаимно однозначном соответствии с двумерной группой когомологий с коэффициентами в модуле C, т. е. в случае (2) — с хохшильдовой группой когомологий $H^2(\Lambda, C)$, в случае (3) — с группой когомологий $H^2(\Pi, C)$ и в случае (4) — с группой когомологий $H^2(\mathfrak{g}, C)$.

Все четыре типа расширений тесно связаны друг с другом, и мы подробно изучим их взаимоотношения.

---

[1] От английского «extension» — расширение. — *Прим. перев.*

1. РАСШИРЕНИЯ МОДУЛЕЙ

Пусть A и C — произвольные (левые) Λ-модули. *Расширением модуля A с ядром C* называется точная последовательность

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0,$$

где X — некоторый Λ-модуль, а φ и ψ — Λ-гомоморфизмы. Говорят, что расширение (E) эквивалентно расширению

$$(E') \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X' \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

если существует такой Λ-гомоморфизм $k : X \to X'$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "k"] & \\ C \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & & A \\ & X' \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что любой такой гомоморфизм k является изоморфизмом. Множество всех классов эквивалентных расширений модуля A с ядром C мы будем обозначать через $E(A, C)$. Все расщепленные точные последовательности составляют, очевидно, один класс. Мы будем называть его «расщепленным классом».

Следуя Бэру [Baer, *Math. Zeitschrift*, **38** (1934), 375—416], мы в множестве $E(A, C)$ введем некоторое умножение. Пусть (E) и (E') — произвольные расширения модуля A с ядром C. Произведением этих расширений называется расширение $0 \to C \xrightarrow{\Psi} Y \xrightarrow{\Phi} A \to 0$, строящееся следующим образом. В прямой сумме $X + X'$ выбираются подмодуль B, состоящий из всех таких пар (x, x'), что $\varphi x = \varphi' x'$, и подмодуль D, состоящий из всех пар вида $(-\psi c, \psi' c)$, $c \in C$. Очевидно, что $D \subset B$, так что определен фактормодуль $Y = B/D$. Отображения Ψ и Φ мы определим формулами

$$\Psi c = [\psi c, 0] = [0, \psi' c],$$
$$\Phi([x, x']) = \varphi x = \varphi' x',$$

где через $[x, x']$ обозначается смежный класс элемента $(x, x') \in B$ по подмодулю D.

Очевидно, что построенная последовательность $0 \to C \xrightarrow{\Psi} Y \xrightarrow{\Phi} A \to 0$ точна, т. е. является расширением. Очевидно также, что так определенное умножение расширений задает некоторое умножение в множестве $E(A, C)$.

Каждому расширению

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

соответствует связывающий гомоморфизм $\Theta_E : \mathrm{Hom}\,(C, C) \to \mathrm{Ext}^1\,(A, C)$, при котором тождественное отображение $j \in \mathrm{Hom}\,(C, C)$ переходит в «характеристический элемент» расширения (E) (см. § XI, 9). Эквивалентные расширения имеют, очевидно, один и тот же характеристический элемент.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любых Λ-модулей A и C соответствие $(E) \to \Theta_E j$ определяет взаимно однозначное отображение Θ множества $E(A, C)$ на группу $\mathrm{Ext}^1_\Lambda\,(A, C)$. Отображение Θ переводит бэровское умножение в сложение, определенное в группе $\mathrm{Ext}^1_\Lambda\,(A, C)$. Расщепленный класс переходит при отображении Θ в нулевой элемент группы $\mathrm{Ext}^1_\Lambda\,(A, C)$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Множество $E(A, C)$ является абелевой группой относительно бэровского умножения. Нулем этой группы служит расщепленный класс.*

Это следствие можно доказать и непосредственно, однако прямое доказательство весьма громоздко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Зафиксируем некоторую точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0$$

с проективным модулем P. Очевидно, что для любого расширения (E) существуют такие гомоморфизмы γ и τ, что имеет место коммутативная диаграмма

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\beta} & P & \xrightarrow{\alpha} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\nu} & X & \xrightarrow{\varphi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(где i — тождественное отображение модуля A).

Диаграмма (1) порождает коммутативную диаграмму

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} & & \mathrm{Hom}_\Lambda\,(C, C) \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(\gamma, C)"'] \arrow[dr, "\Theta_E"] & & \\ & \mathrm{Hom}_\Lambda\,(P, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda\,(M, C) \arrow[r, "\vartheta"'] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda\,(A, C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной строкой, где ϑ — связывающий гомоморфизм, соответствующий верхней строке диаграммы (1). Так как отображение $\mathrm{Hom}\,(\gamma, C)$ переводит гомоморфизм j в гомоморфизм γ, то из коммутативности диаграммы (2) следует, что $\vartheta\gamma = \Theta_E j$, т. е. элемент $\vartheta\gamma$ является характеристическим элементом расширения (E).

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$(3)\qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu} C + P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0,$$

где $C+P$ — прямая сумма модулей C и P, а отображения μ и π определены формулами

$$\mu m = (-\gamma m, \beta m), \quad \pi(c, p) = \psi c + \tau p. \tag{4}$$

В силу точности последовательности (3) мы можем модуль X отождествить с модулем $\operatorname{Coker} \mu$. После этого отождествления отображения ψ, τ и φ будут определяться следующими формулами:

$$\begin{aligned} \psi c &= [c, 0], \\ \tau p &= [0, p], \\ \varphi([c, p]) &= \sigma p, \end{aligned} \tag{5}$$

где через $[c, p]$ обозначается смежный класс элемента $(c, p) \in C+P$ по образу гомоморфизма μ.

Пусть теперь нам дан произвольный гомоморфизм $\gamma \in \operatorname{Hom}(M, C)$. Тогда по формуле (4) мы можем определить гомоморфизм μ. Полагая затем $X = \operatorname{Coker} \mu$, мы можем по формуле (5) определить гомоморфизмы ψ, τ и φ. В результате мы получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0, \tag{E_γ}$$

для которой гомоморфизм γ диаграммы (1) совпадает с данным гомоморфизмом γ. Следовательно, характеристическим элементом расширения (E_γ) является элемент $\vartheta\gamma$. Поскольку отображение $\vartheta : \operatorname{Hom}_\Lambda(M, C) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, C)$ эпиморфно, отсюда следует, что Θ является отображением множества $E(A, C)$ *на* всю группу $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, C)$.

Для того чтобы показать, что отображение Θ взаимно однозначно, остается убедиться, что из соотношения $\vartheta\gamma_1 = \vartheta\gamma_2$ вытекает эквивалентность расширений (E_{γ_1}) и (E_{γ_2}). С этой целью заметим, что в силу точности строки диаграммы (2) соотношение $\vartheta(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой гомоморфизм $\omega \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P, C)$, что $\gamma_1 - \gamma_2 = \omega\beta$. Гомоморфизм ω позволяет нам посредством формулы

$$\Omega(c, p) = (c + \omega p, p)$$

определить некоторый автоморфизм $\Omega : C+P \to C+P$. Легко видеть, что $\mu_2 = \Omega\mu_1$. Следовательно, автоморфизм Ω индуцирует такой изоморфизм $\Omega' : X_1 \to X_2$ (где $X_i = \operatorname{Coker} \mu_i$, $i = 1, 2$), что $\Omega'\psi_1 = \psi_2$ и $\varphi_2\Omega' = \varphi_1$. Таким образом, расширения (E_{γ_1}) и (E_{γ_2}) эквивалентны.

Если расширение (E) расщепляемо, то, согласно предложению V, 4.5, связывающий гомоморфизм Θ_E равен нулю, так что $\Theta_E j = 0$. Этот же результат можно получить, построив для гомоморфизма $\gamma = 0$ расширение (E_γ). В этом случае $\mu m = (0, \beta m)$ и, следовательно, $\operatorname{Coker} \mu = C + A$.

Нам остается показать, что отображение Θ переводит бэровское умножение, определенное на множестве $E(A, C)$, в сложение, определенное на группе $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C)$. Пусть расширение (E) является бэровским произведением расширений (E_{γ_1}) и (E_{γ_2}). Определим отображения $\gamma: M \to C$ и $\tau: P \to X$, полагая

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \tau p = [\tau_1 p, \tau_2 p].$$

Легко видеть, что $\varphi\tau = \alpha$ и

$$\psi\gamma m = \psi\gamma_1 m + \psi\gamma_2 m = [\psi_1\gamma_1 m, 0] + [0, \psi_2\gamma_2 m] = \\ = [\tau_1\beta m, \tau_2\beta m] = \tau\beta m.$$

Таким образом, отображения γ и τ определяют для расширения (E) коммутативную диаграмму вида (1). Следовательно, расширение (E) задается гомоморфизмом $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Тем самым теорема 1.1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо связывающего гомоморфизма

$$\Theta_E: \mathrm{Hom}_\Lambda(C, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C)$$

можно было воспользоваться связывающим гомоморфизмом

$$\Theta'_E: \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C),$$

соответствующим тому же расширению (E). Обозначая через $i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$ тождественное отображение модуля A, можно показать (см. упражнение 1), что $\Theta'_E i + \Theta_E j = 0$. Доказательство теоремы 1.1, использующее связывающий гомоморфизм Θ'_E, двойственно изложенному выше и начинается с фиксирования произвольной точной последовательности

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\delta} Q \xrightarrow{\eta} N \longrightarrow 0$$

с инъективным модулем Q. Диаграмма (1) заменяется при этом диаграммой

(1′)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\zeta"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta"] & Q \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма по существу полностью определяется отображением $\varepsilon: A \to N$ (аналогично тому как диаграмма (1) определяется отображением γ). Действительно, если определить отображение $\nu: A + Q \to N$, полагая $\nu(a, q) = -\varepsilon a + \eta q$, а модуль X отождествить с модулем $\mathrm{Ker}\,\nu$, то отображения ψ, ζ, φ будут определяться формулами

(5′)
$$\psi c = (0, \delta c),$$
$$\zeta(a, q) = q,$$
$$\varphi(a, q) = a.$$

2. РАСШИРЕНИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Пусть K — произвольное коммутативное кольцо. Эпиморфное отображение K-алгебр

$$f : \Gamma \to \Lambda$$

мы будем называть *расширением* K-алгебры Λ. Расширение называется *несущественным*, если существует такой гомоморфизм K-алгебр $u : \Lambda \to \Gamma$, что композиция fu является тождественным отображением.

Ядро C эпиморфизма f представляет собой двусторонний идеал алгебры Γ и, следовательно, двусторонний Γ-модуль. В частности, определенное в алгебре Γ умножение индуцирует в C некоторое умножение. Если это умножение нулевое, т. е. если $c_1c_2 = 0$ для любых элементов $c_1, c_2 \in C$, то двусторонний Γ-модуль C можно превратить в двусторонний Λ-модуль, положив

$$(1) \qquad \lambda c = \gamma c, \quad c\lambda = c\gamma, \qquad c \in C, \gamma \in \Gamma, \quad \lambda = f\gamma \in \Lambda.$$

Обратно, если на двустороннем идеале C алгебры Γ можно определить двусторонние Λ-операторы, удовлетворяющие соотношениям (1), то умножение в идеале C, индуцированное умножением, определенным в алгебре Γ, является нулевым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Λ — произвольная K-алгебра, а C — произвольный двусторонний Λ-модуль. *Расширением алгебры Λ с ядром C* мы будем называть точную последовательность

$$(F) \qquad C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda,$$

где Γ — некоторая K-алгебра, f — эпиморфизм K-алгебр, а g — такой мономорфизм K-модулей, что

$$(2) \qquad g(\lambda c) = \gamma(gc), \quad g(c\lambda) = (gc)\,\gamma, \qquad c \in C, \ \gamma \in \Gamma, \ \lambda = f\gamma \in \Lambda.$$

Последнее условие представляет собой не что иное, как простую перефразировку соотношений (1).

Расширения (F) и (F') алгебры Λ с ядром C называются *эквивалентными*, если существует такой гомоморфизм K-алгебр $k : \Gamma \to \Gamma'$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "k"] & \\ C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \Lambda \\ & \Gamma' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что любой такой гомоморфизм k является изоморфизмом.

Множество всех классов эквивалентных расширений алгебры Λ с ядром C мы будем обозначать через $F(\Lambda, C)$.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что алгебра Λ K-проективна. При этом предположении точная последовательность $0 \to C \to \Gamma \to \Lambda \to 0$, рассматриваемая как последовательность K-модулей, расщепляема. Поэтому без какого-либо ограничения общности мы можем считать, что алгебра Γ как K-модуль разлагается в прямую сумму

$$\Gamma = C + \Lambda,$$

причем

$$gc = (c, 0), \quad f(c, \lambda) = \lambda.$$

Умножение в алгебре Γ должно, очевидно, удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&(c_1, 0)(c_2, 0) = 0,\\
&(c_1, 0)(0, \lambda_2) = (c_1\lambda_2, 0),\\
&(0, \lambda_1)(c_2, 0) = (\lambda_1 c_2, 0),\\
&(0, \lambda_1)(0, \lambda_2) = (a(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2), \qquad a(\lambda_1, \lambda_2) \in C.
\end{aligned}$$

Первое из этих соотношений выражает тот факт, что $(gc_1)(gc_2) = 0$; второе и третье соотношения представляют собой перефразировку соотношений (2); последнее соотношение выражает тот факт, что отображение f сохраняет умножение. Функция a определяет некоторый K-гомоморфизм $a : \Lambda \otimes \Lambda \to C$, т. е. двумерную коцепь стандартного комплекса $S(\Lambda)$ с коэффициентами в двустороннем Λ-модуле C. Приведенную выше таблицу умножения можно объединить в одну формулу

$$(4) \qquad (c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2) = (c_1\lambda_2 + \lambda_1 c_2 + a(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2).$$

Обратно, выбрав произвольную двумерную коцепь a, мы можем по формуле (4) определить на K-модуле $\Gamma = C + \Lambda$ некоторое умножение. Проверяя ассоциативность этого умножения, мы получим, что

$$\begin{aligned}
(5) \quad &(c_1, \lambda_1)((c_2, \lambda_2)(c_3, \lambda_3)) - ((c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2))(c_3, \lambda_3) =\\
&= (\lambda_1 a(\lambda_2, \lambda_3) + a(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) - a(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) - a(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3, 0) =\\
&\qquad\qquad = (\delta a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), 0).
\end{aligned}$$

Следовательно, умножение (4) тогда и только тогда ассоциативно, когда коцепь a является коциклом. В этом случае

$$\lambda a(1, 1) = a(\lambda, 1), \quad a(1, 1)\lambda = a(1, \lambda),$$

а потому

$$(-a(1, 1), 1)(c, \lambda) = (c, \lambda) = (c, \lambda)(-a(1, 1), 1).$$

Таким образом, элемент $(-a(1, 1), 1)$ является единицей алгебры Γ. Мы определим отображения $g : C \to \Gamma$ и $f : \Gamma \to \Lambda$, положив

$gc = (c, 0)$, $f(c, \lambda) = \lambda$. Без труда проверяется, что условие (2) выполнено.

Таким образом, соотношение (4) позволяет нам определить некоторое отображение группы $Z^2(S(\Lambda), C)$ на множество $F(\Lambda, C)$. Остается, следовательно, выяснить, при каких условиях два коцикла a и a' определяют эквивалентные расширения (F) и (F'). Очевидно, что коммутативность диаграммы (3) равносильна соотношению

$$k(c, \lambda) = (c + b(\lambda), \lambda), \qquad b(\lambda) \in C.$$

Так как

$$[k(c_1, \lambda_1)][k(c_2, \lambda_2)] = (c_1\lambda_2 + \lambda_1 c_2 + \lambda_1 b(\lambda_2) + b(\lambda_1)\lambda_2 + a'(-\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2),$$
$$k[(c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2)] = (c_1\lambda_2 + \lambda_1 c_2 + a(\lambda_1, \lambda_2) + b(\lambda_1\lambda_2), \lambda_1\lambda_2),$$

то отображение k тогда и только тогда сохраняет умножение, когда

$$\lambda_1 b(\lambda_2) + b(\lambda_1)\lambda_2 + a'(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1, \lambda_2) + b(\lambda_1\lambda_2),$$

т. е. когда

$$a - a' = \delta b.$$

Отсюда, в частности, вытекает соотношение $a(1, 1) - a'(1, 1) = b(1)$, показывающее, что при отображении k единица алгебры Γ переходит в единицу алгебры Γ'.

Найдем, наконец, при каких условиях расширение, задаваемое коциклом a, несущественно. Если для K-гомоморфизма $u : \Lambda \to \Gamma$ композиция fu является тождественным отображением, то

$$u\lambda = (b(\lambda), \lambda), \qquad b(\lambda) \in C.$$

Поэтому

$$(u\lambda_1)(u\lambda_2) - u(\lambda_1\lambda_2) = (b(\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1 b(\lambda_2) + a(\lambda_1, \lambda_2) - b(\lambda_1\lambda_2), \lambda_1\lambda_2)$$

и, следовательно, отображение u тогда и только тогда сохраняет умножение, когда $a = -\delta b$. В этом случае $a(1, 1) = -b(1)$, т. е. $u(1) = 1$.

Суммируя все сказанное, получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.1. *Множество $F(\Lambda, C)$ классов эквивалентных расширений алгебры Λ с ядром C находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H^2(\Lambda, C)$. Это соответствие $\omega : H^2(\Lambda, C) \to F(\Lambda, C)$ возникает при сопоставлении произвольному коциклу $a \in Z^2(S(\Lambda), C)$ расширения $C \to \Gamma \to \Lambda$, где Γ — прямая сумма K-модулей C и Λ с умножением* (4). *Все несущественные расширения образуют один класс, которому соответствует нулевой элемент группы $H^2(\Lambda, C)$.*

Это описание расширений ассоциативной алгебры принадлежит Хохшильду (Hochschild G., *Ann. of Math.*, **46** (1945), 58—67].

3. РАСШИРЕНИЯ ДОПОЛНЕННЫХ АЛГЕБР

Пусть Λ — произвольная дополненная K-алгебра с пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to K$. Мы будем предполагать, что алгебра Λ K-проективна. Для любого расширения $f : \Gamma \to \Lambda$ алгебры Λ алгебру Γ также можно рассматривать как дополненную K-алгебру с отображением $\varepsilon f : \Gamma \to K$ в качестве пополняющего гомоморфизма.

Любой левый Λ-модуль C мы можем превратить в двусторонний Λ-модуль C_ε, определив на нем правые Λ-операторы формулой

$$(1) \qquad c\lambda = c(\varepsilon\lambda) = (\varepsilon\lambda)c, \qquad c \in C, \ \lambda \in \Lambda.$$

Рассмотрим соответствующее множество $F(\Lambda, C_\varepsilon)$ классов эквивалентных расширений (см. § 2). Эти расширения представляют собой точные последовательности вида

$$(F) \qquad C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda,$$

где Γ — некоторая K-алгебра, f — эпиморфизм K-алгебр, а g — такой мономорфизм K-модулей, что

$$(2) \qquad g(\lambda c) = \gamma(gc), \ (gc)\gamma = g(c(\varepsilon\lambda)), \qquad c \in C, \ \gamma \in \Gamma, \ \lambda = f\gamma \in \Lambda.$$

Мы будем называть такие точные последовательности *расширениями дополненной алгебры Λ с ядром C*. Соответствующее множество $F(\Lambda, C_\varepsilon)$ классов эквивалентных расширений мы будем обозначать просто через $F(\Lambda, C)$. Все сказанное в § 2, очевидно, применимо (с тривиальными изменениями) и к рассматриваемому здесь случаю. В частности, основная формула 2, (4) принимает теперь следующий вид:

$$(3) \qquad (c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2) = (c_1(\varepsilon\lambda_2) + \lambda_1 c_2 + a(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2),$$

а слагаемое $a(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3$ в формуле 2, (5) — вид $a(\lambda_1, \lambda_2)(\varepsilon\lambda_3)$. В соответствии с этим функция a оказывается теперь коциклом комплекса $S(\Lambda, \varepsilon) = S(\Lambda) \otimes_\Lambda K$.

Последний результат допускает некоторое уточнение. Так как алгебра Λ, рассматриваемая как K-модуль, разлагается в прямую сумму $K + I(\Lambda)$, то пополняющий идеал $I(\Lambda)$ K-проективен. Ввиду этого для каждого расширения $C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda$ среди K-гомоморфизмов $u : \Lambda \to \Gamma$ расщепляющих (над кольцом K) точную последовательность $0 \to C \to \Gamma \to \Lambda \to 0$ существует по крайней мере один гомоморфизм u, для которого $u(1) = 1$[1]. Поэтому отождествление алгебры

---

[1] Действительно, так как идеал $I(\Lambda)$ проективен, то существует такой K-гомоморфизм $u' : I(\Lambda) \to \Gamma$, что $fu' = i$, где $i : I(\Lambda) \to \Lambda$ — отображение вложения. Очевидно, что отображение $u : \Lambda \to \Gamma$, определенное формулой

$$u(k, \lambda) = k + u'(\lambda), \qquad k \in K, \ \lambda \in I(\Lambda),$$

обладает всеми требуемыми свойствами. — *Прим. ред.*

Γ с прямой суммой $C + \Lambda$ можно выбрать так, чтобы единицей алгебры Γ служил элемент $(0, 1)$. Но в таком случае коцикл a должен удовлетворять соотношению $a(\lambda, 1) = 0 = a(1, \lambda)$, т. е. должен быть коциклом нормализованного стандартного комплекса $N(\Lambda, \varepsilon)$.

Сравним теперь расширения дополненных алгебр с расширениями Λ-модулей, рассмотренными в § 1. Пусть

$$(F) \qquad C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda$$

— произвольное расширение дополненной алгебры Λ с ядром C, и пусть X — множество всех элементов $x \in \Gamma$, для которых $fx \in I(\Lambda)$. Тогда $g(C) \subset X$ и, следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k"] & I(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "g"'] & \Gamma \arrow[r, "f"'] & \Lambda \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

где k и i — отображения вложения, j — тождественное отображение, а ψ и φ — гомоморфизмы, индуцированные гомоморфизмами g и f соответственно. Очевидно, что верхняя строка этой диаграммы точна. Поскольку X представляет собой двусторонний идеал алгебры Γ, мы можем его рассматривать как левый Γ-модуль. Так как для любого элемента $c \in C$

$$(gc)x = g(c(fx)) = g(c(\varepsilon fx)) = 0,$$

то идеал X можно рассматривать как левый Λ-модуль, причем отображения ψ и φ будут Λ-гомоморфизмами. Отсюда вытекает, что верхняя строка диаграммы представляет собой некоторое расширение левого Λ-модуля $I(\Lambda)$ с ядром C. Таким образом, каждому расширению алгебр соответствует некоторое расширение модулей. Ясно, что это соответствие индуцирует некоторое отображение

$$(5) \qquad \eta : F(\Lambda, C) \to E(I(\Lambda), C).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Если дополненная K-алгебра Λ K-проективна, то для любого левого Λ-модуля C имеет место антикоммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} F(\Lambda, C) \arrow[r, "\omega^{-1}"] \arrow[d, "\eta"'] & H^2(\Lambda, C) = \mathrm{Ext}^2_\Lambda(K, C) \\ E(I(\Lambda), C) \arrow[r, "\Theta"'] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(I(\Lambda), C) \arrow[u, "\vartheta"'] \end{tikzcd}$$

где Θ и ω — взаимно однозначные отображения, рассмотренные в теоремах 1.1 *и* 2.1, *а ϑ — связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности*

$$0 \longrightarrow I(\Lambda) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Так как связывающий гомоморфизм ϑ является изоморфизмом а отображения Θ и ω взаимно однозначны, то отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Отображение* (5) *взаимно однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Для упрощения записи будем комплекс $N(\Lambda, \varepsilon)$ обозначать через N. Без ограничения общности можно предполагать, что в расширении (F) алгебра Γ имеет вид $\Gamma = C + \Lambda$. Тогда идеал X состоит из всех элементов вида $(c, \lambda - \varepsilon\lambda)$. Представив гомоморфизмы $d_2 : N_2 \to N_1$ и $d_1 : N_1 \to N_0 = \Lambda$ в виде сквозных отображений

$$N_2 \xrightarrow{d_2'} M \xrightarrow{i_2} N_1, \quad N_1 \xrightarrow{d_1'} I(\Lambda) \xrightarrow{i} \Lambda,$$

где M — образ гомоморфизма $d_2 : N_2 \to N_1$, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_2} & N_1 & \xrightarrow{d_1'} & I(\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle w} & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \big\updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow[\psi]{} & X & \xrightarrow[\varphi]{} & I(\Lambda) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6}$$

где

$$v[\lambda] = (0, \lambda - \varepsilon\lambda),$$

а w — отображение, определенное отображением v. Нижняя строка этой диаграммы представляет собой точную последовательность $(E) = \eta(F)$. Соответствующий этой последовательности элемент $\Theta(E) \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(I(\Lambda), C)$, по определению (см. § 1), является образом тождественного отображения $j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(C, C)$ при связывающем гомоморфизме, соответствующем нижней строке диаграммы (6). Ввиду коммутативности диаграммы (6) отсюда вытекает, что элемент $\Theta(E)$ является образом элемента $w \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, C)$ при связывающем гомоморфизме, соответствующем верхней строке диаграммы (6). Поэтому элемент $\vartheta\Theta(E)$ является образом элемента w при итерированном связывающем гомоморфизме

$$\delta : \operatorname{Hom}_\Lambda(M, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_\Lambda(K, C),$$

соответствующем точной последовательности

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N_1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Применяя теперь предложение V, 7.1, мы получим, что класс когомологий $\delta w = \vartheta\Theta(E)$ противоположен по знаку классу когомологий двумерного коцикла

$$N_2 \xrightarrow{d_2'} M \xrightarrow{w} C.$$

Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что $wd_2' = a$, где $a \in \operatorname{Hom}_\Lambda(N_2, C)$ — коцикл, описывающий умножение в алгебре Γ. Так как отображение ψ мономорфно, то достаточно лишь показать, что $\psi w d_2' = \psi a$. Но $\psi w d_2' = v i_2 d_2' = vd$, и, значит, нужно только показать, что $vd = \psi a$. Однако

$$vd\{\lambda_1, \lambda_2\} = v[\lambda_1\{\lambda_2\} - \{\lambda_1\lambda_2\} + \{\lambda_1\}\varepsilon\lambda_2\} =$$
$$= (0, \lambda_1)(0, \lambda_2 - \varepsilon\lambda_2) - (0, \lambda_1\lambda_2 - \varepsilon\lambda_1\varepsilon\lambda_2) + (0, \lambda_1 - \varepsilon\lambda_1)(0, \varepsilon\lambda_2) =$$
$$= (a(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\varepsilon\lambda_2) - (0, \lambda_1\lambda_2 - \varepsilon\lambda_1\varepsilon\lambda_2) + (0, \lambda_1\varepsilon\lambda_2 - \varepsilon\lambda_1\varepsilon\lambda_2) =$$
$$= (a(\lambda_1, \lambda_2), 0) = \psi a(\lambda_1, \lambda_2).$$

Тем самым теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Элемент* $\vartheta\Theta(E)$, *соответствующий расширению*

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow I(\Lambda) \longrightarrow 0$$

при сквозном отображении

$$E(I(\Lambda), C) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(I(\Lambda), C) \xrightarrow{\vartheta} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(K, C) = H^2(\Lambda, C),$$

представляет собой характеристический элемент $\delta_S j$ (см. § XI, 9) *точной последовательности*

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

получающейся сращиванием точной последовательности (E) *с точной последовательностью*

$$(L) \qquad 0 \longrightarrow I(\Lambda) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $j \in \mathrm{Hom}_\Lambda(C, C)$ является тождественным отображением модуля C, а δ_S — итерированным связывающим гомоморфизмом, то, согласно определению отображения Θ (см. § 1),

$$\delta_S j = \delta_L \delta_E j = \delta_L \Theta(E) = \vartheta\Theta(E).$$

4. РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Пусть W и Π — (вообще говоря некоммутативные) группы (в мультипликативной записи), для которых существует эпиморфное отображение

$$f: W \to \Pi.$$

Мы будем называть это отображение *расширением* группы Π. Расширение мы будем называть *несущественным*, если существует такой гомоморфизм $u: \Pi \to W$, что композиция fu является тождественным отображением.

Ядро C эпиморфизма f (т. е. множество всех таких элементов $w \in W$, что $fw = 1$) является нормальным делителем группы W. Отображение $(w, c) \to wcw^{-1}$ множества $W \times C$ в нормальный делитель C определяет, очевидно, группу W как группу операторов группы C. В случае, когда нормальный делитель C абелев, эти операторы определяют аддитивно записанную группу C как левый W-модуль. Поскольку элементы группы $C \subset W$ действуют на этом модуле тривиально, он является также левым Π-модулем с Π-операторами

$$(1) \qquad xc = wcw^{-1}, \qquad c \in C, \ w \in W, \ x = fw \in \Pi.$$

Обратно, если на нормальном делителе C группы W можно определить Π-операторы, удовлетворяющие соотношению (1), то нормальный делитель C абелев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Π — произвольная (мультипликативная) группа, а C — некоторый левый Π-модуль. *Расширением группы Π с ядром C* мы будем называть последовательность вида

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} \Pi,$$

где W — некоторая (мультипликативная) группа, f — эпиморфизм групп и g — такой мономорфизм аддитивной группы C в мультипликативную группу W, имеющий образом ядро эпиморфизма f, для которого

$$(2) \qquad g(xc) = w(gc)\,w^{-1}, \quad c \in C, \ w \in W, \ x = fw \in \Pi.$$

Два расширения (Σ) и (Σ') группы Π с ядром C называются *эквивалентными*, если существует такой гомоморфизм $k : W \to W'$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "k"] & \\ C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \Pi \\ & W' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Любой такой гомоморфизм k является, очевидно, изоморфизмом.

Множество классов эквивалентных расширений группы Π с ядром C мы будем обозначать через $\Sigma(\Pi, C)$.

Рассмотрим теперь дополненную алгебру $Z(\Pi)$ (с единичной пополняющей функцией) и множество $F(Z(\Pi), C)$ классов эквивалентных расширений дополненной алгебры $Z(\Pi)$ с ядром C. Каждое такое расширение представляет собой точную последовательность

$$(F) \qquad C \xrightarrow{\bar{g}} \Gamma \xrightarrow{\bar{f}} Z(\Pi),$$

где Γ — некоторая Z-алгебра, $\bar{f}$ — эпиморфизм алгебр, а $\bar{g}$ — такой мономорфизм абелевых групп, что

$$(3) \qquad \gamma(\bar{g}c) = \bar{g}(\lambda c), \quad (\bar{g}c)\gamma = \bar{g}(c(\varepsilon\lambda)), \quad c \in C, \ \gamma \in \Gamma, \ \lambda = \bar{f}\gamma \in Z(\Pi).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любого расширения* (F) *множество* W *всех элементов* $w \in \Gamma$, *для которых* $\bar{f}w \in \Pi$, *является группой относительно умножения, определенного в кольце* Γ, *и последовательность*

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} \Pi,$$

где f — *отображение, индуцированное эпиморфизмом* $\bar{f}$, *а* g — *отображение, определенное формулой* $gc = \bar{g}c + 1$, *является расширением группы* Π *с ядром* C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что множество W мультипликативно замкнуто и содержит единицу $1 \in \Gamma$. Таким образом, умножение кольца Γ индуцирует на W ассоциативное умножение, обладающее единичным элементом. Заметим теперь, что для любого элемента $w \in W$ существует такой элемент $v \in W$, что $\bar{f}(w)\bar{f}(v) = 1 = \bar{f}(v)\bar{f}(w)$. Так как при эпиморфизме $\bar{f}$ элементы $1 - wv$ и $1 - vw$ переходят в нуль кольца $Z(\Pi)$, то существуют такие элементы $c_1, c_2 \in C$, что $\bar{g}c_1 = 1 - wv$ и $\bar{g}c_2 = 1 - vw$. Отсюда в силу второго соотношения (3) вытекает, что $(1 - wv)w = 1 - wv$, $(1 - vw)w = 1 - vw$, и, следовательно,

$$w(1 - v(w - 1)) = (1 - wv)w + wv = 1 - wv + wv = 1,$$
$$(1 - v(w - 1))w = (1 - vw)w + vw = 1 - vw + vw = 1,$$

т. е. элемент w обладает обратным. Тем самым показано, что множество W является группой.

Очевидно, что отображение $f: W \to \Pi$ является эпиморфизмом групп, ядро которого совпадает с образом отображения g. Далее,

$$(gc_1)(gc_2) = (\bar{g}c_1 + 1)(\bar{g}c_2 + 1) = \bar{g}c_1 + \bar{g}c_2 + 1 = \\ = \bar{g}(c_1 + c_2) + 1 = g(c_1 + c_2),$$

т. е. отображение g является гомоморфизмом аддитивной группы C в мультипликативную группу W. Наконец, для любых элементов $c \in C$, $w \in W$ в силу соотношения (3) имеет место равенство

$$w(gc)w^{-1} = w(\bar{g}c)w^{-1} + 1 = \bar{g}(xc)w^{-1} + 1 = \bar{g}(xc) + 1 = g(xc),$$

где $x = fw$, т. е. гомоморфизм g удовлетворяет условию (2). Тем самым предложение 4.1 полностью доказано.

Согласно предложению 4.1, каждому расширению (F) дополненной алгебры $Z(\Pi)$ с ядром C однозначно соответствует некоторое расширение (Σ) группы Π с ядром C. Очевидно, что эквивалентным расширениям (F) и (F') соответствуют эквивалентные расширения (Σ) и (Σ'). Таким образом, мы получаем отображение

$$\varphi: F(Z(\Pi), C) \longrightarrow \Sigma(\Pi, C).$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Отображение* φ *является взаимно однозначным отображением множества* $F(Z(\Pi), C)$ *на множество* $\Sigma(\Pi, C)$. *Все несущественные расширения* (Σ) *образуют один класс эквивалент-*

ности, которому в множестве $F(Z(\Pi), C)$ *соответствует класс несущественных расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что если расширениям (F) и (F') соответствуют эквивалентные расширения $\varphi(F)$ и $\varphi(F')$, то расширения (F) и (F') также эквивалентны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что любое расширение (F) может быть полностью (с точностью до эквивалентности) описано, если известно расширение $(\Sigma) = \varphi(F)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, <->] & W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & \Pi \arrow[d, "i_\Pi"] \\
C \arrow[r, "\bar g"'] & \Gamma \arrow[r, "\bar f"'] & Z(\Pi)
\end{tikzcd}$$

где $jw = w - 1$ и $i_\Pi x = x - 1$. Представив отображение j в виде сквозного отображения

$$W \xrightarrow{i_W} Z(W) \xrightarrow{k} \Gamma,$$

где $i_W(w) = w - 1$, а k — такой гомоморфизм Z-алгебр, что $k(w) = w$, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, dash, "g"] \arrow[d, <->] & W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_W"] & \Pi \arrow[d, "i_\Pi"] \\
C \arrow[r, dash, "i_W g"] \arrow[d, <->] & Z(W) \arrow[r, dash, "f^*"] \arrow[d, "k"] & Z(\Pi) \arrow[d, <->] \\
C \arrow[r, dash, "\bar g"] & \Gamma \arrow[r, dash, "\bar f"] & Z(\Pi)
\end{tikzcd}$$

Пусть $\bar C = i_W g C$, и пусть $\bar C \cdot Z(W)$ [соответственно $\bar C \cdot I(W)$] — множество всех линейных комбинаций элементов вида $\bar c w$ [соответственно вида $\bar c(w - 1)$], где $\bar c \in \bar C$, $w \in W$. Множество $\bar C \cdot Z(W)$ совпадает с ядром отображения f^*[1)], а множество $\bar C \cdot I(W)$ в силу

[1)] Включение $\bar C \cdot Z(W) \subset \operatorname{Ker} f^*$ очевидно. С другой стороны, каждый элемент $x \in \operatorname{Ker} f^*$ имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_{ij} \Big),$$

где $z_{ij} \in Z$, $w_{ij} \in W$, причем $\sum_{j=1}^{m} z_{ij} = 0$ и $f(w_{i1}) = \ldots = f(w_{im})$. Поэтому для доказательства включения $\operatorname{Ker} f^* \subset \bar C \cdot Z(W)$ достаточно показать, что множеству $\bar C \cdot Z(W)$ принадлежит произвольный элемент вида $x = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i$, где $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$ и $f(w_1) = \ldots = f(w_n) = a$. Умножая элемент x справа на некоторый второго соотношения (3) содержится в ядре гомоморфизма k. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$
(4)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{l} & Z(W)/\bar{C}\cdot I(W) & \xrightarrow{f'} & Z(\Pi) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \updownarrow & & \downarrow{k'} & & \updownarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\bar{g}} & \Gamma & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(\Pi) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Оказывается, что отображение l аддитивно. Действительно, так как

$$
i_W g(c_1+c_2) = (gc_1)(gc_2) - 1 = (gc_1 - 1) + (gc_2 - 1) + (gc_1 - 1)(gc_2 - 1) = \\
= i_W gc_1 + i_W gc_2 + (i_W gc_1)(gc_2 - 1),
$$

а последнее слагаемое принадлежит подгруппе $\bar{C}\cdot I(W)$, то $l(c_1 + c_2) = lc_1 + lc_2$. Ядром отображения f' служит факторгруппа $\bar{C}\cdot Z(W)/\bar{C}\cdot I(W)$, совпадающая, очевидно, с образом отображения l. Наконец, отображение l мономорфно, поскольку мономорфно отображение $\bar{g} = k'l$. Таким образом, верхняя строка диаграммы (4) является точной последовательностью Z-модулей. Так как нижняя строка диаграммы (4) также является точной последовательностью, то в силу коммутативности этой диаграммы гомоморфизм k' является изоморфизмом Z-модулей.

Отсюда вытекает, что множество $\bar{C}\cdot I(W)$ совпадает с ядром отображения k, и, таким образом, поскольку это отображение представляет собой гомоморфизм Z-алгебр, является двусторонним идеалом алгебры $Z(W)$ (впрочем, в этом можно убедиться и непосредственно). Но в таком случае отображение k' является изоморфизмом Z-алгебр.

Таким образом, верхняя строка диаграммы (4) представляет собой некоторое расширение (F_0), эквивалентное расширению (F). Поскольку расширение (F_0) однозначно определяется расширением (Σ), то сформулированное выше утверждение тем самым полностью доказано.

Докажем теперь, что расширение (F) тогда и только тогда несущественно, когда несущественно расширение $(\Sigma) = \varphi(F)$. Пусть расширение (F) несущественно, и пусть $\bar{u}: Z(\Pi) \to \Gamma$ — такой гомоморфизм Z-алгебр, что композиция $\bar{f}\bar{u}$ является тождественным

элемент w^{-1}, для которого $f(w) = a$, мы получим, что

$$
xw^{-1} = \sum_{i=1}^{n} z_i(w_i w^{-1}),
$$

причем $f(w_i w^{-1}) = 1$ и, следовательно, $w_i w^{-1} = gc_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $xw^{-1} = \sum_{i=1}^{n} z_i gc_i$, а так как $\sum_{i=}^{n} z_i = 0$, то $xw^{-1} = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{c}_i$, где $\bar{c}_i = i_W gc_i$, т. е. $x \in \bar{C}\cdot Z(W)$. — *Прим. перев.*

отображением. Гомоморфизм $\bar{u}$ индуцирует, очевидно, такой гомоморфизм групп $u : \Pi \to W$, что композиция fu является тождественным отображением. Обратно, если $u : \Pi \to W$ — такой гомоморфизм групп, что композиция fu является тождественным отображением, то отображение $ku^* : Z(\Pi) \to \Gamma$ является гомоморфизмом Z-алгебр, композиция которого с гомоморфизмом $\bar{f}$ является тождественным отображением.

Остается доказать, что при отображении φ множество $F(Z(\Pi), C)$ отображается на все множество $\Sigma(\Pi, C)$. Пусть (Σ) — произвольное расширение группы Π с ядром C. Выбрав такую функцию $u : \Pi \to W$, что $u(1) = 1$ и композиция fu является тождественным отображением, мы можем произвольный элемент группы W однозначно представить в виде произведения $(gc)(ux)$, где $c \in C$, $x \in \Pi$. Этот элемент мы будем обозначать через (c, x). Очевидно, что единица группы W имеет вид $(0, 1)$ и

$$gc = (c, 1), \quad f(c, x) = x.$$

Для произведения двух любых элементов (c_1, x_1) и (c_2, x_2) мы получим, используя соотношение (2),

$$\begin{aligned}(c_1, x_1)(c_2, x_2) &= (gc_1)(ux_1)(gc_2)(ux_2) = \\ &= (gc_1)(ux_1)(gc_2)(ux_1)^{-1}(ux_1)(ux_2) = \\ &= (gc_1)\,g(x_1c_2)(ux_1)(ux_2).\end{aligned}$$

Заметим теперь, что элемент $(ux_1)(ux_2)$ имеет тот же образ в группе Π, что и элемент $u(x_1x_2)$. Следовательно, существует такой однозначно определенный элемент $a(x_1, x_2) \in C$, что

$$(ux_1)(ux_2) = ga(x_1, x_2)\,u(x_1x_2).$$

Принимая во внимание, что отображение g сумму переводит в произведение, мы получим отсюда следующую формулу умножения:

$$(c_1, x_1)(c_2, x_2) = (c_1 + x_1c_2 + a(x_1, x_2), x_1x_2). \tag{5}$$

Так как по условию $u(1) = 1$, то билинейная функция a удовлетворяет соотношению $a(x_1, 1) = 0 = a(1, x_2)$, т. е. является двумерной коцепью нормализованного стандартного комплекса $N(\Pi)$ с коэффициентами в Π-модуле C.

Проверяя ассоциативность умножения, задаваемого формулой (5), мы получим, что

$$\begin{aligned}&(c_1, x_1)((c_2, x_2)(c_3, x_3)) = \\ &\qquad = (c_1 + x_1c_2 + x_1x_2c_3 + x_1a(x_2, x_3) + a(x_1, x_2x_3), x_1x_2x_3), \\ &((c_1, x_1)(c_2, x_2))(c_3, x_3) = \\ &\qquad = (c_1 + x_1c_2 + x_1x_2c_3 + a(x_1, x_2) + a(x_1x_2, x_3), x_1x_2x_3).\end{aligned}$$

Правые части этих двух соотношений совпадают тогда и только тогда, когда

$$x_1a(x_2, x_3) - a(x_1x_2, x_3) + a(x_1, x_2x_3) - a(x_1, x_2) = 0,$$

т. е. когда $\delta a(x_1, x_2, x_3) = 0$. Таким образом, коцепь a является двумерным коциклом комплекса $N(\Pi) = N(Z(\Pi), \varepsilon)$.

Построим теперь по этому коциклу a расширение

$$(F) \qquad C \xrightarrow{\bar{g}} \Gamma \xrightarrow{\bar{f}} Z(\Pi).$$

Здесь $\Gamma = C + Z(\Pi)$, $\bar{g}c = (c, 0)$, $\bar{f}(c, \lambda) = \lambda$, а умножение в алгебре Γ задается формулой 3, (3), т. е. формулой

$$(c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2) = (c_1(\varepsilon\lambda_2) + \lambda_1c_2 + a(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (5), мы сразу же замечаем, что образ расширения (F) при отображении φ совпадает с исходным расширением (Σ). Тем самым теорема 4.2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные нами результаты можно суммировать в виде следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & H^2(\Pi, C) \arrow[dl, "\omega"'] & \\
\Sigma(\Pi, C) & F(Z(\Pi), C) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[dr, "\eta"'] & & \operatorname{Ext}^1_{Z(\Pi)}(I(\Pi), C) \arrow[ul, "\vartheta"'] \\
 & & E(I(\Pi), C) \arrow[ur, "\Theta"'] &
\end{tikzcd}$$

все отображения которой взаимно однозначны. Четырехугольник этой диаграммы коммутативен (в том смысле, что композиция любых четырех последовательных отображений является тождественным отображением). Как было показано в конце доказательства теоремы 4.2, отображение $\varphi\omega : H^2(\Pi, C) \to \Sigma(\Pi, C)$ индуцируется отображением, сопоставляющим каждому коциклу $a \in Z^2(N(\Pi), C)$ расширение (Σ), задаваемое с помощью формулы (5). Это хорошо известный метод описания расширений групп с помощью «систем факторов». Отображение $\vartheta\Theta$ было описано в предложении 3.3. Отображение

$$\varphi\eta^{-1} : E(I(\Pi), C) \longrightarrow \Sigma(\Pi, C)$$

будет рассмотрено в упражнении 3.

5. РАСШИРЕНИЯ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли над одним и тем же коммутативным кольцом K, для которых существует эпиморфное отображение

$$f : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Любое такое отображение мы будем называть *расширением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Расширение мы будем называть *несущественным*, если существует такой гомоморфизм алгебр Ли $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, что композиция fu является тождественным отображением.

Ядро C эпиморфизма f является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Отображение $y \otimes c \to [y, c]$ тензорного произведения[1] $\mathfrak{h} \otimes C$ в идеал C определяет C как левый $\mathfrak{h}$-модуль, поскольку в силу тождества Якоби

$$[y_1, [y_2, c]] - [y_2, [y_1, c]] = [[y_1, y_2], c].$$

Если алгебра Ли C коммутативна, то левый $\mathfrak{h}$-модуль C можно превратить в левый $\mathfrak{g}$-модуль, положив

(1) $$xc = [y, c], \qquad c \in C, \ y \in \mathfrak{h}, \ x = fy \in \mathfrak{g}.$$

Обратно, если на идеале C алгебры Ли $\mathfrak{h}$ можно определить левые $\mathfrak{g}$-операторы, удовлетворяющие соотношению (1), то идеал C является коммутативной алгеброй Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над кольцом K, а C — некоторый левый $\mathfrak{g}$-модуль. *Расширением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с ядром* C мы будем называть точную последовательность вида

(Σ) $$C \xrightarrow{g} \mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{h}$ — некоторая алгебра Ли над кольцом K, f — эпиморфизм алгебр Ли, а g — такой мономорфизм K-модулей, что

(2) $$g(xc) = [y, gc], \quad c \in C, \ y \in \mathfrak{h}, \ x = fy \in \mathfrak{g}.$$

Два расширения (Σ) и (Σ') алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с ядром C мы будем называть *эквивалентными*, если существует такой гомоморфизм алгебр Ли $k : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{h} \arrow[dd, "k"] \arrow[dr, "f"] & \\ C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & \mathfrak{g} \\ & \mathfrak{h}' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Любой такой гомоморфизм k является, очевидно, изоморфизмом.

Множество всех классов эквивалентных расширений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с ядром C мы будем обозначать через $\Sigma(\mathfrak{g}, C)$.

В дальнейшем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ мы будем предполагать K-свободной. Ввиду этого мы можем, согласно следствию XIII, 3.3, отождествить ее как K-модуль с некоторым подмодулем обертывающей алгебры $\mathfrak{g}^e$.

[1] Над кольцом K. — *Прим. ред.*

Рассмотрим множество $F(\mathfrak{g}^e, C)$ классов эквивалентных расширений дополненной алгебры $\mathfrak{g}^e$ с ядром C. Любое такое расширение представляет собой точную последовательность

$$(F) \qquad C \xrightarrow{\bar{g}} \Gamma \xrightarrow{\bar{f}} \mathfrak{g}^e,$$

где Γ — некоторая K-алгебра, $\bar{f}$ — эпиморфизм K-алгебр, а $\bar{g}$ — такой мономорфизм K-модулей, что

$$(3) \qquad \gamma(\bar{g}c) = \bar{g}(\lambda c), \ (\bar{g}c)\gamma = \bar{g}(c(\varepsilon\lambda)), \qquad c \in C, \ \gamma \in \Gamma, \ \lambda = \bar{f}\gamma \in \mathfrak{g}^e.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любого расширения* (F) *множество* $\mathfrak{h}$ *всех элементов* $y \in \Gamma$, *для которых* $\bar{f}y \in \mathfrak{g}$, *является алгеброй Ли над кольцом* K *относительно операции* $[y_1, y_2] = y_1y_2 - y_2y_1$, *и последовательность*

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} \mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{g},$$

где f *— отображение, индуцированное отображением* $\bar{f}$, *а* g *— отображение, определяемое отображением* $\bar{g}$, *является расширением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с ядром* C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{f}y_1 = x_1, \bar{f}y_2 = x_2$, где $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, то в силу соотношений, выполняющихся в обертывающей алгебре, $\bar{f}(y_1y_2 - y_2y_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$. Таким образом, $y_1y_2 - y_2y_1 \in \mathfrak{h}$, так что множество $\mathfrak{h}$ замкнуто относительно скобочной операции и, следовательно, является алгеброй Ли над кольцом K. Так как $\bar{f}\bar{g} = 0$, то отображение $\bar{g}$ определяет мономорфизм g K-модуля C в K-модуль $\mathfrak{h}$, образ которого совпадает с ядром эпиморфизма f, индуцированного отображением $\bar{f}$. Полагая в соотношении (3) $\gamma = y$ и $\lambda = x$, мы получим, что $y(\bar{g}c) = \bar{g}(xc)$ и $(\bar{g}c)y = 0$, откуда следует, что $[y, gc] = y(\bar{g}c) - (\bar{g}c)y = g(xc)$. Таким образом, отображение g удовлетворяет условию (2). Тем самым предложение 5.1 полностью доказано.

Согласно предложению 5.1, каждому расширению (F) соответствует некоторое расширение (Σ). Очевидно, что эквивалентным расширениям (F) и (F') соответствуют эквивалентные расширения (Σ) и (Σ'). Таким образом, для любой K-свободной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определено некоторое отображение

$$\varphi : F(\mathfrak{g}^e, C) \longrightarrow \Sigma(\mathfrak{g}, C).$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Отображение* φ *является взаимно однозначным отображением множества* $F(\mathfrak{g}^e, C)$ *на множество* $\Sigma(\mathfrak{g}, C)$. *Все несущественные расширения* (Σ) *составляют один класс эквивалентности, которому в множестве* $F(\mathfrak{g}^e, C)$ *соответствует класс несущественных расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что если расширениям (F) и (F') соответствуют эквивалентные расширения $\varphi(F)$

и $\varphi(F')$, то расширения (F) и (F') эквивалентны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что каждое расширение (F) может быть полностью (с точностью до эквивалентности) описано, если известно расширение $(\Sigma) = \varphi(F)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{h} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "i_{\mathfrak{g}}"] \\ C \arrow[r, "\bar{g}"] & \Gamma \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathfrak{g}^e \end{tikzcd}$$

где j — отображение вложения, а $i_{\mathfrak{g}}$ — естественное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в обвертывающую алгебру $\mathfrak{g}^e$. Отображение j можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{a} T(\mathfrak{h}) \xrightarrow{b} \Gamma$$

естественного отображения a алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в ее тензорную алгебру и некоторого гомоморфизма b K-алгебр. Поскольку при гомоморфизме b все элементы вида $y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1 - [y_1, y_2]$ переходят в нуль, гомоморфизм j разлагается в композицию

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{i_{\mathfrak{h}}} \mathfrak{h}^e \xrightarrow{k} \Gamma$$

естественного отображения $i_{\mathfrak{h}}$ и некоторого гомоморфизма k K-алгебр. При этом имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{h} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_{\mathfrak{h}}"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "i_{\mathfrak{g}}"] \\ C \arrow[r, "i_{\mathfrak{h}} g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{h}^e \arrow[r, "f^e"] \arrow[d, "k"] & \mathfrak{g}^e \arrow[d, leftrightarrow] \\ C \arrow[r, "\bar{g}"] & \Gamma \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathfrak{g}^e \end{tikzcd}$$

Пусть $\bar{C} = i_{\mathfrak{h}} g C$. Согласно предложению XIII, 1.3, ядро эпиморфизма f^e совпадает с идеалом $\bar{C} \cdot \mathfrak{h}^e$. Кроме того, K-модуль $\bar{C} \cdot I(\mathfrak{h})$, где $I(\mathfrak{h})$ — пополняющий идеал обвертывающей алгебры $\mathfrak{h}^e$, содержится в силу второго соотношения (3) в ядре гомоморфизма k. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$(4)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "l"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{h}^e/\bar{C} \cdot I(\mathfrak{h}) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "k'"] & \mathfrak{g}^e \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\bar{g}"] & \Gamma \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathfrak{g}^e \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ядро гомоморфизма f', представляющее собой фактормодуль $\bar{C} \cdot \mathfrak{h}^e/\bar{C} \cdot I(\mathfrak{h})$, совпадает, очевидно, с образом отображения l. Кроме того, отображение l мономорфно, поскольку мономорфно отображение $\bar{g} = k'l$. Таким образом, верхняя строка диаграммы (4)

24 № 1074

является точной последовательностью K-модулей. Так как нижняя строка также является точной последовательностью, то ввиду коммутативности этой диаграммы k' является изоморфизмом K-модулей.

Отсюда вытекает, что подмодуль $\overline{C} \cdot I(\mathfrak{h})$ алгебры $\mathfrak{h}^e$ совпадает с ядром отображения k. Так как это отображение представляет собой гомоморфизм K-алгебр, то его ядро $\overline{C} \cdot I(\mathfrak{h})$ является двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{h}^e$ (впрочем, это можно доказать и непосредственно). Следовательно, отображение k' представляет собой изоморфизм K-алгебр.

Таким образом, верхняя строка диаграммы (4) представляет собой некоторое расширение (F_0), эквивалентное расширению (F). Поскольку это расширение однозначно определяется расширением (Σ), сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Докажем теперь, что расширение (F) тогда и только тогда несущественно, когда несущественно расширение $(\Sigma) = \varphi(F)$. Пусть расширение (F) несущественно, и пусть $\overline{u} : \mathfrak{g}^e \to \Gamma$ — такой гомоморфизм K-алгебр, что композиция $\overline{f}\overline{u}$ является тождественным отображением. Тогда для индуцированного гомоморфизмом $\overline{u}$ гомоморфизма алгебр Ли $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ композиция fu также является тождественным отображением. Обратно, если $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — некоторый гомоморфизм алгебр Ли, композиция fu которого с эпиморфизмом f является тождественным отображением, то отображение $ku^e : \mathfrak{g}^e \to \Gamma$ является гомоморфизмом K-алгебр, композиция которого с гомоморфизмом $\overline{f}$ является тождественным отображением.

Остается доказать, что при отображении φ множество $F(\mathfrak{g}^e, C)$ отображается на все множество $\Sigma(\mathfrak{g}, C)$. Пусть (Σ) — произвольное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с ядром C. Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ K-свободна, то мы можем предполагать, что алгебра Ли $\mathfrak{h}$ разлагается как K-модуль в прямую сумму $C + \mathfrak{g}$, причем

$$gc = (c, 0), \quad f(c, x) = x.$$

Скобочная операция в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ должна, очевидно, удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[(c_1, 0), (c_2, 0)] = 0,\\
&[(c_1, 0), (0, x_2)] = (-x_2c_1, 0),\\
&[(0, x_1), (c_2, 0)] = (x_1c_2, 0),\\
&[(0, x_1), (0, x_2)] = (a(x_1, x_2), [x_1, x_2]), \qquad a(x_1, x_2) \in C.
\end{aligned}$$

Первое из этих соотношений выражает тот факт, что идеал C является коммутативной подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{h}$; второе и третье соотношения вытекают из соотношения (2); последнее соотношение выражает тот факт, что отображение f является гомоморфизмом алгебр Ли. Все эти соотношения можно объединить в одну формулу

(5) $$[(c_1, x_1), (c_2, x_2)] = (-x_2c_1 + x_1c_2 + a(x_1, x_2), [x_1, x_2]).$$

Определим теперь, при каких условиях операция, задаваемая на модуле $C+\mathfrak{g}$ формулой (5), удовлетворяет всем аксиомам алгебры Ли. Поскольку скобочная операция в произвольной алгебре Ли K-билинейна, функция $a(x_1, x_2)$ должна быть K-билинейной. Соотношение $[(c, x), (c, x)] = 0$ равносильно соотношению $a(x, x)=0$. Таким образом, функция $a(x_1, x_2)$ является билинейной кососимметрической функцией, т. е. двумерной коцепью комплекса $V(\mathfrak{g})$ с коэффициентами в $\mathfrak{g}$-модуле C (см. § XIII, 8). Чтобы проверить выполнение тождества Якоби, вычислим произведение

$$[(c_1, x_1), [(c_2, x_2), (c_3, x_3)]] = (-[x_2, x_3]\, c_1 - x_1x_3c_2 + \\ + x_1x_2c_3 + x_1a(x_2, x_3) + a(x_1, [x_2, x_3]), [x_1, [x_2, x_3]]).$$

Складывая это соотношение с двумя аналогичными соотношениями, получающимися из выписанного циклическими перестановками, мы получим, что тождество Якоби равносильно соотношению

$$x_1a(x_2, x_3) + x_2a(x_3, x_1) + x_3a(x_1, x_2) + a(x_1, [x_2, x_3]) + \\ + a(x_2, [x_3, x_1]) + a(x_3, [x_1, x_2]) = 0.$$

Ввиду того, что функция a кососимметрична, это соотношение равносильно соотношению $\delta a(x_1, x_2, x_3) = 0$. Таким образом, коцепь a должна быть двумерным коциклом.

Согласно предложению XIII, 8.1, коцикл a комплекса $V(\mathfrak{g})$ можно продолжить до некоторого коцикла $\bar{a}$ нормализованного стандартного комплекса $N(\mathfrak{g}^e, \varepsilon)$. Построим теперь по коциклу $\bar{a}$ расширение

$$(F) \qquad C \xrightarrow{\bar{g}} \Gamma \xrightarrow{\bar{f}} \mathfrak{g}^e.$$

Здесь $\Gamma = C + \mathfrak{g}^e$, $\bar{g}c = (c, 0)$, $\bar{f}(c, x) = x$, причем умножение в алгебре Γ задается формулой 3, (3), т. е. формулой

$$(c_1, \lambda_1)(c_2, \lambda_2) = (c_1(\varepsilon\lambda_2) + \lambda_1c_2 + \bar{a}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2).$$

В частности, для любых элементов $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$

$$(c_1, x_1)(c_2, x_2) = (x_1c_2 + \bar{a}(x_1, x_2), x_1x_2).$$

Принимая во внимание это соотношение и вспоминая, что $a(x_1, x_2) = \bar{a}(x_1, x_2) - \bar{a}(x_2, x_1)$, легко проверить, что в ассоциативной алгебре Γ скобка от элементов (c_1, x_1) и (c_2, x_2) вычисляется по формуле (5). Поэтому, если к построенному расширению (F) применить отображение φ, то получится исходное расширение (Σ). Тем самым теорема 5.2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно почти дословно повторить замечание, сделанное в конце § 4, заменяя только группу Π и комплекс $N(\Pi)$ алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и комплексом $V(\mathfrak{g})$ соответственно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим произвольное расширение

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Λ-модуля A и соответствующие связывающие гомоморфизмы

$$\Theta_E : \mathrm{Hom}\,(C, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1\,(A, C),$$
$$\Theta'_E : \mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1\,(A, C).$$

Показать, что $\Theta'_E i + \Theta_E j = 0$, где $i \in \mathrm{Hom}\,(A, A)$ и $j \in \mathrm{Hom}\,(C, C)$ — тождественные отображения. (Указание: воспользоваться результатом упражнения VI, 18.)

2. Пусть Λ — произвольная K-алгебра и C — некоторый двусторонний Λ-модуль. В множестве $F(\Lambda, C)$ (см. § 2) ввести бэровское умножение и показать, что рассмотренное в теореме 2.1 отображение переводит сложение, определенное в группе $H^2(\Lambda, C)$, в бэровское умножение. Ввести бэровское умножение и доказать аналогичные предложения для множеств $\Sigma(\Pi, C)$ и $\Sigma(\mathfrak{g}, C)$ (см. § 4 и 5).

3. Пусть Π — произвольная группа, а C — некоторый левый Π-модуль. Мы будем говорить, что расширение

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} \Pi$$

группы Π *родственно* расширению

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} I(\Pi) \longrightarrow 0$$

левого $Z(\Pi)$-модуля $I(\Pi)$, если существует такое отображение $k : W \to X$, удовлетворяющее соотношению

$$k(w_1 w_2) = kw_1 + (fw_1)(kw_2),$$

что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \Pi \arrow[d, "i_\Pi"] \\
C \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r, "\alpha"] & I(\Pi)
\end{tikzcd}$$

где $i_\Pi(x) = x - 1$, $x \in \Pi$. Показать, что расширения (Σ) и (E) тогда и только тогда родственны, когда при определенных в § 3 и 4 отображениях

$$\eta : F(Z(\Pi), C) \to E(I(\Pi), C),$$
$$\varphi : F(Z(\Pi), C) \to \Sigma(\Pi, C)$$

им соответствует в множестве $F(Z(\Pi), C)$ один и тот же класс эквивалентных расширений, т. е. когда $(\Sigma) = \varphi\eta^{-1}(E)$.

4. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная K-свободная алгебра Ли над кольцом K, а C — некоторый левый $\mathfrak{g}$-модуль. Мы будем говорить, что расширение

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} \mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{g}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *родственно* расширению

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} I(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

левого $\mathfrak{g}^e$-модуля $I(\mathfrak{g})$, если существует такое отображение $k : \mathfrak{h} \to X$, удовлетворяющее соотношению

$$k([y_1, y_2]) = (fy_1)(ky_2) - (fy_2)(ky_1),$$

что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{h} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "i_{\mathfrak{g}}"] \\ C \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r, "\alpha"] & I(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

где $i_{\mathfrak{g}}$ — естественное отображение. Показать, что расширения (Σ) и (E) родственны тогда и только тогда, когда при определенных в § 3 и 5 отображениях

$$\eta : F(\mathfrak{g}^e, C) \longrightarrow E(I(\mathfrak{g}), C),$$
$$\varphi : F(\mathfrak{g}^e, C) \longrightarrow \Sigma(\mathfrak{g}, C)$$

им соответствует в множестве $F(\mathfrak{g}^e, C)$ один и тот же класс эквивалентных расширений, т. е. когда $(\Sigma) = \varphi\eta^{-1}(E)$.

5. Пусть

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

— точная последовательность (левых) Λ-модулей, где Λ — произвольная K-алгебра. Предположим, что модуль A K-проективен. Тогда тензорное произведение $\Lambda \otimes_K A$ будет Λ-проективным модулем. Определим гомоморфизм $p : \Lambda \otimes A \to A$, положив

$$p(\lambda \otimes a) = \lambda a.$$

Ядро этого гомоморфизма обозначим через N. Выбрав некоторый K-гомоморфизм $u : A \to X$, композиция φu которого с гомоморфизмом φ является тождественным отображением, и определив отображение $f : \Lambda \otimes A \to X$ формулой

$$f(\lambda \otimes a) = \lambda(ua),$$

рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Lambda \otimes A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\psi"] & X \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

где v — отображение, индуцированное отображением f, а i — тождественное отображение модуля A. По условию строки этой диаграммы являются точными последовательностями.

Показать, что при связывающем гомоморфизме $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, C) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, C)$ гомоморфизм $v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N, C)$ переходит в характеристический элемент расширения (E).

[Указание: отождествить модуль X с прямой суммой $A + C$ посредством отображения

$$x \longrightarrow (\varphi x, \psi^{-1}(x - u\varphi x)).]$$

6. Пусть

$$(F) \qquad C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda$$

— произвольное расширение алгебры Λ с ядром C (в смысле § 2). Определим отображения

$$i_\Gamma : \Gamma \longrightarrow J(\Gamma), \quad i_\Lambda : \Lambda \longrightarrow J(\Lambda),$$

положив $i_\Gamma(\gamma) = \gamma \otimes 1 - 1 \otimes \gamma^*$ и $i_\Lambda(\lambda) = \lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda^*$. Обозначим через I подмодуль K-модуля $J(\Gamma)$, порожденный всеми элементами вида $(gc)u$ и $u(gc)$, $c \in C$, $u \in J(\Gamma)$. Показать, используя соотношения 2, (2), что I является двусторонним Γ-модулем. Фактормодуль $J(\Gamma)/I$, который можно рассматривать как двусторонний Λ-модуль, обозначим через X, естественный эпиморфизм $J(\Gamma) \to X$ — через k, а отображение $X \to J(\Lambda)$, индуцированное гомоморфизмом $\bar{f} : J(\Gamma) \to J(\Lambda)$, — через α. Введем, кроме того, отображения $j = ki_\Gamma : \Gamma \to X$ и $\beta = jg : C \to X$. Показать, что отображения α и β являются гомоморфизмами двусторонних Λ-модулей. Показать, кроме того, что нижняя строка коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} (F) & & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \Gamma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & \Lambda \arrow[d, "i_\Lambda"] & \\ (E) & 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r, "\alpha"] & J(\Lambda) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

является точной последовательностью.

Таким образом, каждому расширению (F) алгебры Λ с ядром C сопоставляется некоторое расширение (E) Λ^e-модуля. Соответствующее отображение множества $F(\Lambda, C)$ в множество $E(J(\Lambda), C)$ мы обозначим через

$$\eta : F(\Lambda, C) \longrightarrow E(J(\Lambda), C).$$

Предполагая, что алгебра Λ K-проективна, доказать, что имеет место антикоммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(\Lambda, C) & \xrightarrow{\omega^{-1}} & H^2(\Lambda, C) = \operatorname{Ext}^2_{\Lambda^e}(K, C) \\ \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \uparrow{\scriptstyle\vartheta} \\ E(J(\Lambda), C) & \xrightarrow{\Theta} & \operatorname{Ext}^1_{\Lambda^e}(J(\Lambda), C), \end{array}$$

где Θ и ω — отображения, рассмотренные в теоремах 1.1 и 2.1, а ϑ — связывающий гомоморфизм, соответствующий точной последовательности

$$0 \longrightarrow J(\Lambda) \longrightarrow \Lambda^e \xrightarrow{\varrho} \Lambda \longrightarrow 0.$$

(Указание: воспользоваться схемой доказательства теоремы 3.1.)

7. Пусть Λ — произвольная K-проективная K-алгебра, а C — некоторый двусторонний Λ-модуль. Мы будем говорить, что расширение

$$(F) \qquad C \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda$$

алгебры Λ с ядром C *родственно* расширению

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} J(\Lambda) \longrightarrow 0$$

двустороннего Λ-модуля $J(\Lambda)$, если существует такое отображение $k: \Gamma \to X$, удовлетворяющее соотношению

$$k(\gamma_1 \gamma_2) = (f\gamma_1)(k\gamma_2) + (k\gamma_1)(f\gamma_2),$$

что для него имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g} & \Gamma & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \updownarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle i_\Lambda} \\ C & \xrightarrow{\beta} & X & \xrightarrow{\alpha} & J(\Lambda) \end{array}$$

где $i_\Lambda(\lambda) = \lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda$. Показать, что расширения (F) и (E) родственны тогда и только тогда, когда их классы из множеств $F(\Lambda, C)$ и $E(J(\Lambda), C)$ соответствуют друг другу при взаимно однозначном отображении η, определенном в упражнении 6.

8. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная (вообще говоря, не K-свободная) K-алгебра Ли, а C — некоторый (левый) $\mathfrak{g}$-модуль. Определим прямую сумму $C + \mathfrak{g}$ как алгебру Ли, положив

$$[(c_1, x_1), (c_2, x_2)] = (x_1 c_2 - x_2 c_1, [x_1, x_2]).$$

Тогда последовательность

$$(\Sigma) \qquad C \xrightarrow{g} C + \mathfrak{g} \xrightarrow{h} \mathfrak{g},$$

где отображения g и h определены очевидным образом, будет расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что это расширение несущественно. Показать, что любой гомоморфизм алгебр Ли $u: \mathfrak{g} \to C + \mathfrak{g}$, для которого композиция hu является тождественным отображением, имеет вид $ux = (\varphi x, x)$, где $\varphi: \mathfrak{g} \to C$ — некоторый скрещенный гомоморфизм.

9. Применить результаты предыдущего упражнения к случаю, когда алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ является свободная алгебра Ли $L(M)$ некоторого K-модуля M (см. упражнение XIII, 5). Показать, что любой K-гомоморфизм $M \to C$ модуля M в произвольный (левый) $L(M)$-модуль C можно единственным образом разложить в композицию $M \xrightarrow{j} L(M) \xrightarrow{\varphi} C$, где φ — некоторый скрещенный гомоморфизм. (Указание: рассмотреть гомоморфизм алгебр Ли $L(M) \to C + L(M)$, композиция которого с эпиморфизмом $C + L(M) \to L(M)$ является тождественным отображением.)

10. Для случая групп сформулировать упражнения, аналогичные упражнениям 8 и 9. Здесь M должно быть произвольным множеством, а $L(M)$ — свободной группой, порожденной множеством M.

11. Пусть $f: \Gamma \to \Lambda$ — произвольный эпиморфизм K-алгебр, где Λ — дополненная алгебра с пополняющим гомоморфизмом $\varepsilon: \Lambda \to K$. K-гомоморфизм

$$\alpha: \Gamma \longrightarrow A$$

алгебры Γ в некоторый левый Λ-модуль A мы назовем *скрещенным гомоморфизмом относительно эпиморфизма* f (или, просто, f-скрещенным гомоморфизмом), если

$$\alpha(\gamma_1\gamma_2) = (\alpha\gamma_1)(\varepsilon f\gamma_2) + (f\gamma_1)(\alpha\gamma_2).$$

Мы будем говорить, что алгебра Γ *проективна относительно эпиморфизма* f, если для любого эпиморфизма левых Λ-модулей

$$g: A \longrightarrow A''$$

и любого f-скрещенного гомоморфизма $\alpha'': \Gamma \to A''$ существует такой f-скрещенный гомоморфизм $\alpha: \Gamma \to A$, что $\alpha'' = g\alpha$.

Пусть C — произвольный левый Λ-модуль. Показать, что если расширению

$$(F) \qquad C \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{f} \Lambda$$

алгебры Λ соответствует при отображении η (см. теорему 3.1) расширение

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow I(\Lambda) \longrightarrow 0$$

левого Λ-модуля $I(\Lambda)$, то алгебра Γ тогда и только тогда проективна относительно эпиморфизма f, когда модуль X Λ-проективен.

12. Пусть $f: W \to \Pi$ — произвольный гомоморфизм групп. Мы будем говорить, что группа W *f-проективна*, если для любого Π-эпиморфизма $g: A \to A''$ левых Π-модулей и любого f-скрещенного гомоморфизма $\alpha'': W \to A''$ существует такой f-скрещенный гомоморфизм $\alpha: W \to A$, что $g\alpha = \alpha''$.

Пусть C — произвольный левый Π-модуль. Показать, что если расширение

$$(\Sigma) \qquad C \longrightarrow W \xrightarrow{f} \Pi$$

группы Π родственно (см. упражнение 3) расширению

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow I(\Pi) \longrightarrow 0$$

левого Π-модуля $I(\Pi)$, то группа W тогда и только тогда f-проективна, когда модуль X $Z(\Pi)$-проективен.

13. Пусть $f: F \to \Pi$ — эпиморфное отображение свободной группы F на группу Π, и пусть $R = \operatorname{Ker} f$. Как известно, коммутант $[R, R]$ группы R является нормальным делителем во всей группе F. Показать, что в индуцированной точной последовательности

$$R/[R, R] \longrightarrow F/[R, R] \xrightarrow{f'} \Pi$$

группа $F/[R, R]$ f'-проективна (в смысле упражнения 12).

14. Для алгебр Ли сформулировать аналог упражнения 12. Рассмотреть произвольный эпиморфизм алгебр Ли $f: L(M) \to \mathfrak{g}$ с ядром $\mathfrak{h}$. Показать, что множество $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ является идеалом как алгебры Ли $\mathfrak{h}$, так и алгебры Ли $L(M)$. Показать, что в точной последовательности

$$\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \longrightarrow L(M)/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \xrightarrow{f'} \mathfrak{g},$$

где f' — эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом f, алгебра Ли $L(M)/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ f'-проективна. (Указание: воспользоваться результатом упражнения 9.)

15. Пусть

$$(\Sigma) \qquad C \longrightarrow W \xrightarrow{f} \Pi$$

— произвольное расширение группы Π и $l = \omega^{-1}\varphi^{-1}(\Sigma)$ — элемент группы когомологий $H^2(\Pi, C)$, соответствующий расширению (Σ). Рассмотрим гомоморфизмы

$$(1) \qquad H^p(\Pi, \operatorname{Hom}(C, D)) \longrightarrow H^{p+2}(\Pi, D), \qquad {}_{\Pi}D,$$

$$(1a) \qquad H_{p+2}(\Pi, D') \longrightarrow H_p(\Pi, D' \otimes C), \qquad D'_{\Pi},$$

определенные соответствиями $h \to h \smile l$ и $h' \to h' \frown l$ (имеются в виду умножения (8) и (8a) из § XI, 8); предполагается, что Π-операторы на группах $\operatorname{Hom}(C, D)$ и $D' \otimes C$ определены формулами

$$(xf)c = xf(x^{-1}c), \qquad f \in \operatorname{Hom}(C, D),$$
$$x(d' \otimes c) = d'x^{-1} \otimes xc.$$

Доказать, что если группа W f-проективна, то при $p > 0$ гомоморфизмы (1) и (1a) являются изоморфизмами, а при $p = 0$ имеют место точные последовательности

$$\operatorname{Hom}_\Pi(W, D) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Pi(C, D) \longrightarrow H^2(\Pi, D) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H_2(\Pi, D') \longrightarrow D' \otimes_\Pi C \longrightarrow D' \otimes_\Pi W,$$

где $\operatorname{Hom}_\Pi(W, D)$ — модуль f-скрещенных гомоморфизмов $W \to D$, а $D' \otimes_\Pi W$ — абелева группа, порожденная всеми парами вида $d' \otimes w$, подчиненными соотношениям $(d_1' + d_2') \otimes w = d_1' \otimes w + d_2' \otimes w$. (Указание: перейдя к расширению $(E): 0 \to C \to X \to I(\Pi) \to 0$, родственному расширению (Σ), рассмотреть точную последовательность $0 \to C \to X \to Z(\Pi) \to Z \to 0$ с Π-проективным модулем X и применить следствие XI, 9.5.)

Применить этот результат к последовательности, рассмотренной в упражнении 13.

16. Для алгебр Ли сформулировать упражнение, аналогичное упражнению 15.

17. Пусть $(\Sigma): C \to W \xrightarrow{f} \Pi$ — такое расширение конечной группы Π порядка r, что группа W f-проективна, и пусть l — элемент группы когомологий $H^2(\Pi, C)$, соответствующий расширению (Σ). Используя результаты упражнений 15 и XII, 14, доказать, что элемент l имеет порядок r.

18. Для любой диаграммы Λ-модулей и Λ-гомоморфизмов вида

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

строками которой являются точные последовательности, естественно возникает вопрос, при каких условиях существует хотя бы один гомоморфизм $f: A \to C$, включение которого в диаграмму делает ее коммутативной. Необходимым условием является коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ext}^n(C', D) & \xrightarrow{\delta_C} & \operatorname{Ext}^{n+1}(C'', D) \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\psi^*} \\
\operatorname{Ext}^n(A', D) & \xrightarrow{\delta_A} & \operatorname{Ext}^{n+1}(A'', D)
\end{array}$$

для любого Λ-модуля D и любого целого числа n. В частности, полагая $D = C'$ и $n = 0$, мы получаем следующее необходимое условие:

$$\delta_A \varphi^* j = \psi^* \delta_C j,$$

где $j \in \mathrm{Hom}(C', C')$ — тождественное отображение.

Является ли последнее условие достаточным?

Указать двойственные необходимые условия.

19. Пусть A — произвольная абелева группа с конечной периодической частью tA. Доказать, что подгруппа tA является прямым слагаемым группы A. (Указание: воспользоваться следствием VII, 6.2.)

ГЛАВА XVI

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Введение. Эта глава посвящена чисто алгебраическому изучению спектральных последовательностей, которые можно построить для любого комплекса с заданной в нем фильтрацией (т. е. упорядоченной по включению последовательностью подкомплексов). В частности, две спектральные последовательности можно построить для любого двойного комплекса (§ 6). Приложения спектральных последовательностей излагаются в главах XVI и XVII. Как в этой, так и в следующих главах рассматриваются лишь левые модули.

Спектральные последовательности возникли в связи с топологическим изучением расслоенных пространств (Leray, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1945), 1419—1422], и до сих пор их основные применения относятся к области алгебраической топологии.

Понятие спектральной последовательности впервые было алгебраизировано Косулом (Koszul, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **225** (1947), 217—219]. Наше изложение теории спектральных последовательностей несколько видоизменено. Заметим, что эту теорию равным образом можно было изложить с помощью понятия «точной пары» в смысле Масси [Massey, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 363—396].

1. ФИЛЬТРАЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Фильтрацией F модуля A называется семейство $\{F^pA\}$ (индекс p пробегает все целые числа) подмодулей модуля A, обладающее следующими свойствами:

$$\ldots \supset F^pA \supset F^{p+1}A \supset \ldots, \tag{1}$$

$$\bigcup F^pA = A. \tag{2}$$

Удобно считать, что $F^\infty A = 0$ и $F^{-\infty}A = A$. Иногда мы будем пользоваться и нижними индексами, предполагая при этом, что $F_pA = F^{-p}A$.

Каждому модулю A с фильтрацией F можно сопоставить градуированный модуль $E_0(A)$, однородные составляющие которого определяются формулами

$$E_0^p(A) = F^pA/F^{p+1}A.$$

Если модуль A снабжен дифференциалом d, причем фильтрация F *согласована* с d, т. е. для любого p

$$d(F^pA) \subset F^pA,$$

то включение $F^pA \subset A$ индуцирует некоторый гомоморфизм

$$H(F^pA) \longrightarrow H(A),$$

образ которого мы будем обозначать через $F^pH(A)$. Очевидно, что семейство подмодулей $F^pH(A)$ является фильтрацией модуля $H(A)$. Эту фильтрацию мы также будем обозначать через F.

Соответствующий присоединенный градуированный модуль $E_0(H(A))$ является, по определению, прямой суммой фактормодулей

$$E_0^p(H(A)) = F^pH(A)/F^{p+1}H(A).$$

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с коммутативными диаграммами вида

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A' \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi'"'] & A \arrow[r, "\eta"'] & A'' \end{tikzcd}$$

строка которых является точной последовательностью. Для любой такой диаграммы имеет место

ЛЕММА 1.1. *Гомоморфизм η индуцирует изоморфизм*

$$\operatorname{Im}\varphi/\operatorname{Im}\varphi' \approx \operatorname{Im}\psi.$$

Действительно, гомоморфизм η индуцирует изоморфное отображение модуля $\operatorname{Im}\varphi/\operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi/\operatorname{Ker}\eta$ на модуль $\operatorname{Im}(\eta\varphi) = \operatorname{Im}\psi$.

Применяя эту лемму к диаграмме

$$\begin{tikzcd} & H(F^pA) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H(F^{p+1}A) \arrow[ur] \arrow[r] & H(A) \arrow[r] & H(A/F^{p+1}A) \end{tikzcd}$$

мы получим изоморфизм

(3) $$E_0^p(H(A)) \approx \operatorname{Im}(H(F^pA) \longrightarrow H(A/F^{p+1}A)).$$

Введем теперь следующие модули :

$$Z_\infty^p(A) = \operatorname{Im}(H(F^pA) \longrightarrow H(F^pA/F^{p+1}A)),$$
$$B_\infty^p(A) = \operatorname{Im}(H(A/F^pA) \longrightarrow H(F^pA/F^{p+1}A)).$$
$$E_\infty^p(A) = Z_\infty^p(A)/B_\infty^p(A).$$

Применяя лемму 1.1 к диаграмме

$$\begin{tikzcd} & H(F^pA) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H(A/F^pA) \arrow[ur] \arrow[r] & H(F^pA/F^{p+1}A) \arrow[r] & H(A/F^{p+1}A) \end{tikzcd}$$

мы получим изоморфизм

(4) $$E_\infty^p(A) \approx \operatorname{Im}\left(H(F^pA) \longrightarrow H(A/F^{p+1}A)\right).$$

Комбинируя этот изоморфизм с изоморфизмом (3), мы получим изоморфизм

(5) $$E_0^p(H(A)) \approx E_\infty^p(A).$$

Таким образом, градуированный модуль $E_\infty(A) = \sum_p E_\infty^p(A)$ изоморфен градуированному модулю $E_0(H(A))$, присоединенному к модулю $H(A)$.

Введем теперь модули $Z_r^p(A)$, $B_r^p(A)$ и $E_r^p(A)$, в некотором (уточняемом ниже) смысле аппроксимирующие модули $Z_\infty^p(A)$, $B_\infty^p(A)$ и $E_\infty^p(A)$. Именно для каждого $r \geq 1$ мы положим

$$Z_r^p(A) = \operatorname{Im}\left(H(F^pA/F^{p+r}A) \longrightarrow H(F^pA/F^{p+1}A)\right),$$
$$B_r^p(A) = \operatorname{Im}\left(H(F^{p-r+1}A/F^pA) \longrightarrow H(F^pA/F^{p+1}A)\right),$$
$$E_r^p(A) = Z_r^p(A)/B_r^p(A).$$

Полагая здесь $r = \infty$ и учитывая, что $F^\infty A = 0$, $F^{-\infty}A = A$, мы снова получим модули $Z_\infty^p(A)$, $B_\infty^p(A)$ и $E_\infty^p(A)$. Очевидно, что

$$\ldots \subset B_r^p \subset B_{r+1}^p \subset \ldots \subset B_\infty^p \subset Z_\infty^p \subset \ldots \subset Z_{r+1}^p \subset Z_r^p \subset \ldots .$$

Далее, так как модуль A/F^pA является пределом прямого спектра модулей $F^{p-r+1}A/F^pA$, а функтор H перестановочен с операцией взятия предела прямого спектра, то

$$B_\infty^p = \bigcup_r B_r^p.$$

С другой стороны, модуль Z_∞^p, вообще говоря, не совпадает с пересечением $\bigcap_r Z_r^p$.

Применяя лемму 1.1 к диаграммам

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H(F^p/F^{p+r}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H(F^p/F^{p+r+1}) \arrow[r] \arrow[ur] & H(F^p/F^{p+1}) \arrow[r] & H(F^{p+1}/F^{p+r+1})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H(F^p/F^{p+r}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H(F^{p+1}/F^{p+r}) \arrow[r] \arrow[ur] & H(F^{p+r}/F^{p+r+1}) \arrow[r] & H(F^{p+1}/F^{p+r+1})
\end{tikzcd}$$

(вместо $F^p(A)$ мы пишем просто F^p), мы получим изоморфизмы

$$Z_r^p/Z_{r+1}^p \approx \operatorname{Im}\left(H(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H(F^{p+1}/F^{p+r+1})\right) \approx B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r}.$$

Композицию этих изоморфизмов мы будем обозначать через

(6) $$\delta_r^p : Z_r^p/Z_{r+1}^p \approx B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r}.$$

Определим теперь гомоморфизм

$$d_r^p : E_r^p(A) \longrightarrow E_r^{p+r}(A)$$

как композицию гомоморфизмов

$$E_r^p = Z_r^p/B_r^p \longrightarrow Z_r^p/Z_{r+1}^p \xrightarrow{\delta_r^p} B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \longrightarrow Z_r^{p+r}/B_r^{p+r} = E_r^{p+r}.$$

Очевидно, что

$$\text{(7)}\qquad \operatorname{Ker} d_r^p = Z_{r+1}^p/B_r^p, \quad \operatorname{Im} d_r^p = B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r}.$$

Рассмотрим, в частности, гомоморфизмы

$$E_r^{p-r}(A) \xrightarrow{d_r^{p-r}} E_r^p(A) \xrightarrow{d_r^p} E_r^{p+r}(A).$$

Так как

$$\operatorname{Im} d_r^{p-r} = B_{r+1}^p/B_r^p \subset Z_{r+1}^p/B_r^p = \operatorname{Ker} d_r^p,$$

то имеет место естественный изоморфизм

$$\operatorname{Ker} d_r^p/\operatorname{Im} d_r^{p-r} \approx Z_{r+1}^p/B_{r+1}^p = E_{r+1}^p(A).$$

Введем теперь градуированный модуль

$$E_r(A) = \sum_p E_r^p(A).$$

Очевидно, что гомоморфизмы d_r^p определяют некоторый эндоморфизм d_r модуля $E_r(A)$. Из всего сказанного выше непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого $r \geq 1$ эндоморфизм d_r модуля $E_r(A)$ является дифференциалом степени r. Градуированный модуль гомологий $H(E_r(A))$ модуля $E_r(A)$ относительно дифференциала d_r естественно изоморфен модулю $E_{r+1}(A)$.*

Если $r = 1$, то $B_1^p = 0$ и $E_1^p = Z_1^p = H(F^p/F^{p+1})$. Так как $E_0^p = F^p/F^{p+1}$, то, вводя в градуированный модуль $E_0 = \sum_p E_0^p$ дифференциал d_0, индуцированный дифференциалом d модуля A, мы получим, что $H(E_0) = E_1$. Таким образом, теорема 1.2 справедлива и для $r = 0$.

Другое описание отображения d_r^p можно получить следующим образом. Применяя лемму 1.1 к диаграмме

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H(F^p/F^{p+r}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H(F^{p-r+1}/F^p) \arrow[ur] \arrow[r] & H(F^p/F^{p+1}) \arrow[r] & H(F^{p-r+1}/F^{p+1})
\end{tikzcd}$$

мы для любого r $(1 \leq r \leq \infty)$ получим изоморфизм

$$\text{(8)}\qquad E_r^p(A) \approx \operatorname{Im}\left(H(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H(F^{p-r+1}/F^{p+1})\right).$$

Далее, в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} H(F^p/F^{p+r}) \arrow[r, "\varphi_r^p"] \arrow[d] & H(F^{p-r+1}/F^{p+1}) \arrow[d] \\ H(F^{p+r}/F^{p+2r}) \arrow[r, "\varphi_r^{p+r}"'] & H(F^{p+1}/F^{p+r+1}) \end{tikzcd}$$

имеет место гомоморфизм

$$\operatorname{Im} \varphi_r^p \longrightarrow \operatorname{Im} \varphi_r^{p+r}.$$

Комбинируя этот гомоморфизм с изоморфизмами (8), мы снова получим отображение d_r^p. Так как для $r = 1$ гомоморфизм φ_1^p и изоморфизм (8) являются тождественными отображениями, то отображение d_1^p совпадает со связывающим гомоморфизмом $H(F^p/F^{p+1}) \to H(F^{p+1}/F^{p+2})$, соответствующим точной последовательности $0 \to F^{p+1}/F^{p+2} \to F^p/F^{p+2} \to F^p/F^{p+1} \to 0$.

Последовательность градуированных модулей $E_2(A), E_3(A), \ldots$ с дифференциалами $d_2, d_3, \ldots$, рассматриваемая вместе с изоморфизмами $H(E_r(A)) \approx E_{r+1}(A)$ $(r \geq 2)$, называется *спектральной последовательностью* дифференциального модуля A, соответствующей данной фильтрации F. Причина того, что в спектральную последовательность не включается модуль $E_1(A)$, будет выяснена ниже.

2. СХОДИМОСТЬ

В этом параграфе выясняется, в каком смысле спектральная последовательность $E_2, E_3, \ldots$ аппроксимирует модуль $E_\infty(A) \approx E_0(H(A))$.

Фильтрацию F мы будем называть *слабо сходящейся*, если

$$Z_\infty^p(A) = \bigcap_r Z_r^p(A). \tag{1}$$

Оказывается, что для слабо сходящейся фильтрации модуль E_∞ «определяется» как «предел» спектральной последовательности $E_2, E_3, \ldots$. Действительно, рассмотрим произвольный член E_k этой спектральной последовательности. Так как

$$E_\infty^p \approx (Z_\infty^p/B_k^p)/(B_\infty^p/B_k^p),$$

$$Z_\infty^p/B_k^p = \bigcap_{r \geq k} (Z_r^p/B_k^p),$$

$$B_\infty^p/B_k^p = \bigcup_{r \geq k} (B_r^p/B_k^p),$$

то для того чтобы показать, что спектральная последовательность $E_k, E_{k+1}, \ldots$ определяет модуль E_∞, достаточно показать, как по спектральной последовательности восстанавливаются модули

$$Z_r^p/B_k^p, \quad B_r^p/B_k^p, \qquad r \geq k.$$

Если $r = k$, то первый из этих модулей совпадает с модулем E_k^p, а второй равен нулю. Если же $r > k$, то, заметив, что модуль Z_r^p/B_k^p

содержится в ядре дифференциального оператора d_k, мы получим, что

$$Z_r^p/B_k^p = \psi^{-1}(Z_r^p/B_{k+1}^p),$$
$$B_r^p/B_k^p = \psi^{-1}(B_r^p/B_{k+1}^p),$$

где ψ — естественный гомоморфизм модуля $Z(E_k^p)$ на модуль E_{k+1}^p, ядром которого является подмодуль B_{k+1}^p/B_k^p. Следовательно, с помощью этих рекуррентных формул мы можем последовательно определить все нужные нам модули.

Приведем теперь два характеристических свойства слабо сходящихся фильтраций. Применяя лемму 1.1 к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & H(F^p/F^{p+r}) \arrow[dr] & \\
H(F^p) \arrow[ur] \arrow[r] & H(F^p/F^{p+1}) \arrow[r] & H(F^{p+1})
\end{tikzcd}$$

мы получим изоморфизм

(2) $$Z_r^p(A)/Z_\infty^p(A) \approx \operatorname{Im}\left(H(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H(F^{p+1})\right),$$

где $H(F^p/F^{p+r}) \to H(F^{p+1})$ — сквозное отображение $H(F^p/F^{p+r}) \to H(F^{p+r}) \to H(F^{p+1})$. Отсюда, принимая во внимание, что соотношение (1) равносильно соотношению $\bigcap_r Z_r^p/Z_\infty^p = 0$, мы получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Фильтрация F слабо сходится тогда и только тогда, когда для каждого p пересечение образов гомоморфизмов*

$$H(F^pA/F^{p+r}A) \longrightarrow H(F^{p+1}A), \qquad r \geq 1,$$

равно нулю.

Пусть теперь

$$R^p = \bigcap_r \operatorname{Im}\left(H(F^{p+r}A) \longrightarrow H(F^pA)\right), \qquad r > 1,$$
$$R^{-\infty} = \bigcap_p F^pH(A) = \bigcap_p \operatorname{Im}\left(H(F^pA) \longrightarrow H(A)\right),$$

и пусть

$$R^{p+1} \longrightarrow R^p, \quad R^p \longrightarrow R^{-\infty}$$

— гомоморфизмы, индуцированные отображениями $H(F^{p+1}A) \to H(F^pA)$ и $H(F^pA) \to H(A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Фильтрация F слабо сходится тогда и только тогда, когда для любого p гомоморфизм $R^{p+1} \to R^p$ является мономорфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & H(F^{p+1}) \arrow[dr] & \\
H(F^p/F^{p+r}) \arrow[ur] \arrow[r] & H(F^{p+r}) \arrow[u] \arrow[r] & H(F^p)
\end{tikzcd}$$

Произвольный элемент $x \in R^{p+1}$ принадлежит образу модуля $H(F^{p+r})$ и потому тогда и только тогда принадлежит образу модуля $H(F^p/F^{p+r})$, когда при гомоморфизме $R^{p+1} \to R^p$ он отображается в нуль. Следовательно,

$$\bigcap_{r \geq 1} \operatorname{Im}(H(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H(F^{p+1})) = \operatorname{Ker}(R^{p+1} \longrightarrow R^p).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 2.1.

Мы будем говорить, что фильтрация F модуля A *сходится*, если она слабо сходится и

$$\bigcap_p F^p H(A) = 0$$

(т. е. $R^{-\infty} = 0$). Пусть гомоморфизм

$$u : H(A) \longrightarrow \varprojlim H(A)/F^p H(A)$$

определен гомоморфизмами $u_p : H(A) \to H(A)/F^p H(A)$. Очевидно, что $R^{-\infty} = \operatorname{Ker} u$. Таким образом, если фильтрация F сходится, то гомоморфизм u является мономорфизмом. Мы будем говорить, что фильтрация F модуля A *сильно сходится*, если она слабо сходится и гомоморфизм u является изоморфизмом. Очевидно, что каждая сильно сходящаяся фильтрация сходится.

Наряду с гомоморфизмом u можно также рассматривать гомоморфизм

$$v : \varprojlim H(A)/F^p H(A) \longrightarrow \varprojlim H(A/F^p A),$$

индуцированный отображениями

$$v_p : H(A)/F^p H(A) \longrightarrow H(A/F^p A).$$

Поскольку все отображения v_p мономорфны, гомоморфизм v является мономорфизмом. Можно доказать, что если $R^p = 0$ для всех p, то мономорфизм v является изоморфизмом.

3. ОТОБРАЖЕНИЯ И ГОМОТОПИИ

Пусть $f : A \to A'$ — отображение дифференциальных модулей, в которых заданы некоторые фильтрации, согласованные с дифференциалами. Мы будем говорить, что отображение f согласовано с фильтрациями, если для всех p

$$f(F^p A) \subset F^p A'.$$

Такое отображение f, очевидно, индуцирует гомоморфизмы

$$f^* : H(A) \longrightarrow H(A'),$$
$$f_r^* : E_r(A) \longrightarrow E_r(A'),$$
$$f_\infty^* : E_\infty(A) \longrightarrow E_\infty(A'),$$

причем $d_r f_r^* = f_r^* d_r$, где через d_r мы обозначаем как дифференциал модуля $E_r(A)$, так и дифференциал модуля $E_r(A')$. Пусть теперь $f, g : A \to A'$ — два согласованных с фильтрациями отображения. Гомотопией $s : f \simeq g$ порядка, не превосходящего k, мы будем называть такой гомоморфизм $s : A \to A'$, что

$$ds + sd = g - f \text{ и } s(F^pA) \subset F^{p-k}A' \text{ для всех } p.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если существует гомотопия $s : f \simeq g$ порядка, не превосходящего k, то $f^* = g^*$, $f_\infty^* = g_\infty^*$ и $f_r^* = g_r^*$ для всех $r > k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о том, что $f^* = g^*$, тривиально и общеизвестно[1]. Для доказательства того, что $f_r^* = g_r^*$, если $k < r \leq \infty$, мы воспользуемся естественным изоморфизмом 1, (8). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H(F^pA/F^{p+r}A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & H(F^{p-r+1}A/F^{p+1}A) \arrow[d, "\beta"] \\
H(F^pA'/F^{p+r}A') \arrow[r, dashed, "\alpha'"'] & H(F^{p-r+1}A'/F^{p+1}A')
\end{tikzcd}$$

вертикальные отображения которой индуцируются отображением $g - f : A \to A'$. Так как $E_r^p(A) \approx \operatorname{Im} \alpha$ [см. 1, (8)], то достаточно показать, что $\beta\alpha = 0$, если $k < r \leq \infty$. Пусть x — такой элемент модуля F^pA, что $dx \in F^{p+r}A$. Так как

$$gx - fx = sdx + dsx$$

и, с другой стороны, $sdx \in F^{p+r-k}A'$, $sx \in F^{p-k}A'$, т. е.

$$sdx \in F^{p+1}A', \quad sx \in F^{p-r+1}A',$$

то элемент $gx - fx$ определяет нулевой элемент модуля гомологий $H(F^{p-r+1}A'/F^{p+1}A')$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть A и A' — дифференциальные модули с фильтрациями и $f : A \to A'$ — такое согласованное с фильтрациями отображение модуля A в модуль A', что для некоторого k гомоморфизм $f_k^* : E_k(A) \to E_k(A')$ является изоморфизмом. Тогда для любого $r \geq k$ гомоморфизм $f_r^* : E_r(A) \to E_r(A')$ также является изоморфизмом. Если же фильтрации модулей A и A' слабо сходятся, то изоморфизмом будет и гомоморфизм $f_\infty^* : E_\infty(A) \to E_\infty(A')$. Наконец, если фильтрации модулей A и A' сильно сходятся, то изоморфизмом будет и гомоморфизм $f^* : H(A) \to H(A')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение f_k^* изоморфно и перестановочно с дифференциальными операторами d_k модулей $E_k(A)$ и $E_k(A')$, то отображение f_{k+1}^* также изоморфно. Следовательно, гомоморфизмы f_r^* являются изоморфизмами для всех конечных $r \geq k$. Поэтому, если фильтрации модулей A и A' слабо сходятся, то гомоморфизм f_∞^* также является изоморфизмом.

[1] См. § IV, 1. — *Прим. ред.*

Таким образом, если фильтрации модулей A и A' слабо сходятся, то гомоморфизмы

$$F^{p-1}H(A)/F^pH(A) \longrightarrow F^{p-1}H(A')/F^pH(A')$$

для всех p являются изоморфизмами. Отсюда непосредственно получаем (индукцией по r), что для любого $r \geq 1$ и любого p гомоморфизмы

$$F^{p-r}H(A)/F^pH(A) \longrightarrow F^{p-r}H(A')/F^pH(A')$$

также являются изоморфизмами[1]. Поэтому изоморфизмом будет и гомоморфизм

$$H(A)/F^pH(A) \longrightarrow H(A')/F^pH(A').$$

Следовательно, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{u} & \varprojlim H(A)/F^pH(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ H(A') & \xrightarrow[u']{} & \varprojlim H(A')/F^pH(A') \end{array}$$

отображение g является изоморфизмом. С другой стороны, если фильтрации модулей A и A' сильно сходятся, то отображения u и u' также являются изоморфизмами. Таким образом, отображение f^* изоморфно.

В последнем рассуждении можно было бы предполагать, что сильно сходится лишь фильтрация модуля A; относительно же фильтрации модуля A' достаточно предполагать, что она сходится. Действительно, в этом случае отображение u изоморфно, а отображение u' мономорфно. Но так как отображение g изоморфно, то отображение gu, а следовательно, и отображение u' эпиморфно. Таким образом, отображение u' является изоморфизмом, так что на самом деле фильтрация модуля A' сильно сходится.

4. СЛУЧАЙ ГРАДУИРОВАННЫХ МОДУЛЕЙ

В этом параграфе мы будем предполагать, что A является комплексом (т. е. градуированным модулем с дифференциалом d степени 1). Мы будем рассматривать лишь такие фильтрации комплекса A, для которых каждый подмодуль F^pA однороден, т. е. разлагается в прямую сумму подмодулей $A^{p+q} \cap F^pA$.

Пусть

$$F^{p,q}A = A^{p+q} \cap F^pA = F^pA^{p+q},$$

$$E_0^{p,q}(A) = F^{p,q}A/F^{p+1,q-1}A.$$

---

[1] Следует иметь в виду, что если для некоторого гомоморфного отображения $\varphi: C \to C'$ существуют такие подмодули $D \subset C$ и $D' \subset C'$, что $\varphi(D) \subset D'$, и индуцированные отображением φ гомоморфизмы $D \to D'$ и $C/D \to C'/D'$ являются изоморфизмами, то отображение φ также является изоморфизмом. — *Прим. ред.*

Модуль $E_0^p(A)$ мы можем отождествить с прямой суммой $\sum_q E_0^{p,q}(A)$. Тем самым модуль $E_0(A)$ определяется как дважды градуированный модуль

$$E_0(A) = \sum_{p,q} E_0^{p,q}(A).$$

Аналогично модуль $E_0(H(A))$ является дважды градуированным модулем с однородными составляющими

$$E_0^{p,q}(H(A)) = F^p H^{p+q}(A)/F^{p+1} H^{p+q}(A).$$

Как и в § 1, мы для каждого r, $1 \leq r \leq \infty$, положим

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q}(A) &= \operatorname{Im}\left(H^{p+q}(F^pA/F^{p+r}A) \longrightarrow H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)\right), \\ B_r^{p,q}(A) &= \operatorname{Im}\left(H^{p+q-1}(F^{p-r+1}A/F^pA) \longrightarrow H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)\right), \\ E_r^{p,q}(A) &= Z_r^{p,q}(A)/B_r^{p,q}(A). \end{aligned}$$

Отождествив модуль $E_r^p(A)$ с прямой суммой $\sum_q E_r^{p,q}(A)$, мы определим $E_r(A)$ как дважды градуированный модуль. Очевидно, что $E_\infty^{p,q}(A) \approx E_0^{p,q}(H(A))$. Дифференциальный оператор $d_r : E_r \to E_r$ модуля E_r состоит из гомоморфизмов

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

и, следовательно, имеет двойную степень $(r, 1-r)$. Во всех этих дважды градуированных модулях мы будем первую степень p называть *фильтрационной степенью*, вторую степень q — *дополнительной степенью*, а сумму $p+q$ — *полной степенью*.

Иногда, чтобы избежать отрицательных индексов, мы будем пользоваться нижними индексами, полагая при этом, что

$$E_{p,q}^r = E_r^{-p,-q}.$$

В этих обозначениях дифференциальный оператор

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$$

имеет двойную степень $(-r, r-1)$.

Фильтрацию F комплекса A мы будем называть *регулярной*, если для любого n существует такое число $u(n)$, что

(1) $$H^n(F^p(A)) = 0 \text{ для всех } p > u(n).$$

Оказывается, что из свойства (1) вытекает, что

(2) $$Z_r^{p,q}(A) = Z_\infty^{p,q}(A) \text{ для всех } r > u(p+q+1) - p.$$

Действительно, для градуированных модулей имеет место следующий изоморфизм [аналогичный изоморфизму 2, (2)]:

$$Z_r^{p,q}(A)/Z_\infty^{p,q}(A) \approx \operatorname{Im}\left(H^{p+q}(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1})\right).$$

С другой стороны, гомоморфизм $H^{p+q}(F^p/F^{p+r}) \to H^{p+q+1}(F^{p+1})$ является композицией гомоморфизмов

$$H^{p+q}(F^p/F^{p+r}) \longrightarrow H^{p+q+1}(F^{p+r}) \longrightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1}).$$

Свойство (2) следует отсюда непосредственно, поскольку

$$H^{p+q+1}(F^{p+r}) = 0, \text{ если } p + r > u(p + q + 1).$$

В § 2 было введено понятие сильно сходящейся фильтрации; мы говорили, что фильтрация F сильно сходится, если она слабо сходится и гомоморфизм

$$u : H(A) \longrightarrow \varprojlim H(A)/F^p H(A)$$

является изоморфизмом. Для градуированных модулей мы можем рассмотреть гомоморфизмы

$$u^n : H^n(A) \longrightarrow \varprojlim H^n(A)/F^p H^n(A).$$

Если гомоморфизм u является изоморфизмом, то то же самое справедливо и для всех гомоморфизмов u^n; обратное заключение, вообще говоря, неверно. Однако для наших целей достаточно, чтобы каждый гомоморфизм u^n являлся изоморфизмом. Поэтому для градуированных модулей мы несколько ослабим понятие сильно сходящейся фильтрации, требуя лишь, чтобы каждый гомоморфизм u^n являлся изоморфизмом. При этом остается справедливым последнее утверждение теоремы 3.2, если только отображение f имеет нулевую степень.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Регулярная фильтрация комплекса A сильно сходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства (2) вытекает, что регулярная фильтрация слабо сходится. Таким образом, нам нужно только показать, что для любого n гомоморфизм

$$u^n : H^n(A) \longrightarrow \varprojlim H^n(A)/F^p H^n(A)$$

является изоморфизмом. Но это очевидно, поскольку подмодуль $F^pH^n(A)$, являясь образом гомоморфизма $H^n(F^pA) \to H^n(A)$, равен нулю, когда $p > u(n)$.

В случае регулярной фильтрации лучше всего видно, в каком смысле спектральная последовательность $\{E_r(A)\}$ «стремится» к модулю $E_\infty(A)$ как к своему «пределу». Действительно, если фильтрация регулярна, то для любого $r > u(p + q + 1) - p$ имеют место соотношения

$$B_r^{p,q} \subset B_{r+1}^{p,q} \subset \ldots \subset B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} = \ldots = Z_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p,q}.$$

Так как $B_\infty^{p,q} = \bigcup_r B_r^{p,q}$, то отсюда вытекает, что пределом прямого спектра

(3) $$E_r^{p,q} \longrightarrow E_{r+1}^{p,q} \longrightarrow \ldots$$

(отображениями этого спектра являются эпиморфизмы) служит модуль $E_\infty^{p,q}$. Каждый из эпиморфизмов спектра (3) определяется спектральной последовательностью вследствие того, что

$$E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}.$$

5. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ И ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть A — произвольный комплекс с фильтрацией F. В этом параграфе мы построим некоторые гомоморфизмы и точные последовательности, членами которых являются члены спектральной последовательности, соответствующей фильтрации F, а также модули $E_\infty^{p,q}(A)$ и $H^n(A)$. Ради сокращения записи мы будем вместо $E_r^{p,q}(A)$, $H^n(A)$ и т. д. писать просто $E_r^{p,q}$, H^n и т. д.[1]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если* $E_r^{p,q} = 0$, *то и* $E_s^{p,q} = 0$ *для любого* $s > r$ $(s \leq \infty)$.

Действительно, если $B_r^{p,q} = Z_r^{p,q}$, то и $B_s^{p,q} = Z_s^{p,q}$, ибо

$$B_r^{p,q} \subset B_s^{p,q} \subset Z_s^{p,q} \subset Z_r^{p,q}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть* $r < s \leq \infty$, *и пусть* $E_r^{u,v} = 0$ *всякий раз, когда* $u + v = p + q - 1$, $p - s < u \leq p - r$. *Тогда* $B_r^{p,q} = B_s^{p,q}$ *и, следовательно, определено мономорфное отображение* $E_s^{p,q} \to E_r^{p,q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть целое число t удовлетворяет неравенствам $r \leq t < s$. Согласно формулам 1, (7),

$$B_{t+1}^{p,q}/B_t^{p,q} = \operatorname{Im} d_t^{p-t,q+t-1}.$$

С другой стороны, так как $E_r^{p-t,q+t-1} = 0$ и, следовательно, согласно предложению 5.1, $E_t^{p-t,q+t-1} = 0$, то $d_t^{p-t,q+t-1} = 0$. Таким образом, $B_{t+1}^{p,q} = B_t^{p,q}$. Для $s = \infty$ утверждение вытекает из соотношения $B_\infty^{p,q} = \bigcup B_t^{p,q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2а. *Пусть* $r < s \leq \infty$, *и пусть* $E_r^{u,v} = 0$ *всякий раз, когда* $u + v = p + q + 1$, $p + r \leq u < p + s$. *Тогда* $Z_r^{p,q} = Z_s^{p,q}$, *если только* s *конечно или фильтрация слабо сходится. Следовательно, определено эпиморфное отображение* $E_r^{p,q} \to E_s^{p,q}$.

Для конечного s доказательство предложения 5.2а двойственно доказательству предложения 5.2. В случае же бесконечного s и слабо сходящейся фильтрации утверждение вытекает из того, что $Z_\infty^{p,q} = \bigcap_t Z_t^{p,q}$.

Комбинируя предложения 5.2 и 5.2а, мы получим достаточные условия, при выполнении которых имеет место изоморфизм $E_r^{p,q} \approx \approx E_s^{p,q}$ $(r < s \leq \infty)$.

---

[1] Для лучшего понимания рассматриваемых в этом параграфе конструкций удобно модули $E_r^{p,q}$ изображать, по предложению Е. Б. Дынкина, точками плоскости с координатами (p, q). — *Прим. ред.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Если* $E_\infty^{u,n-u}=0$ *для всех* $u<p$, *то* $F^pH^n=H^n$. *Следовательно, определено эпиморфное отображение* $H^n\to E_\infty^{p,n-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия вытекает, что $F^uH^n=F^{u+1}H^n$ для всех $u<p$. Так как $H^n=\bigcup_u F^uH^n$, то тем самым доказано, что $H^n=F^pH^n$. Для доказательства второго утверждения достаточно вспомнить, что $E_\infty^{p,n-p}\approx F^pH^n/F^{p+1}H^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3а. *Если фильтрация сходится и* $E_\infty^{u,n-u}=0$ *для всех* $u>p$, *то* $F^{p+1}H^n=0$. *Следовательно, определено мономорфное отображение* $E_\infty^{p,n-p}\to H^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия вытекает, что $F^uH^n=F^{u+1}H^n$ для всех $u>p$. С другой стороны, $\bigcap_u F^uH^n=0$, ибо фильтрация сходится. Следовательно, $F^{p+1}H^n=0$. Для доказательства второго утверждения достаточно вспомнить, что $E_\infty^{p,n-p}\approx F^pH^n/F^{p+1}H^n$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Если фильтрация сходится и* $E_\infty^{u,n-u}=0$ *для всех* $u\neq p$, *то* $H^n\approx E_\infty^{p,n-p}$.

Справедливо и более общее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Если фильтрация сходится и* $E_\infty^{u,n-u}=0$ *всякий раз, когда* $u\neq p, p+k$, *где* $k>0$, *то имеет место точная последовательность*

$$0\longrightarrow E_\infty^{p+k,n-p-k}\longrightarrow H^n\longrightarrow E_\infty^{p,n-p}\longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм $E_\infty^{p+k,n-p-k}\to H^n$ определен в соответствии с предложением 5.3а. Его образом служит подмодуль $F^{p+k}H^n$. Гомоморфизм $H^n\to E_\infty^{p,n-p}$ определен в соответствии с предложением 5.3. Его ядром служит подмодуль $F^{p+1}H^n$. Наконец, $F^{p+1}H^n=F^{p+k}H^n$, ибо $0=E_\infty^{u,n-u}\approx F^uH^n/F^{u+1}H^n$, если $p<u<p+k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. (a). *Если* $E_r^{u,v}=0$ *всякий раз, когда* $u+v=n-1$, $u\leq p-r$ *или* $u+v=n$, $u<p$, *то определен гомоморфизм*

$$H^n\longrightarrow E_r^{p,n-p}. \tag{1}$$

(b) *Если фильтрация сходится и* $E_r^{u,v}=0$ *всякий раз, когда* $u+v=n+1$, $u\geq p+r$ *или* $u+v=n$, $u>p$, *то определен гомоморфизм*

$$E_r^{p,n-p}\longrightarrow H^n. \tag{2}$$

(c) *При одновременном выполнении условий* (a) *и* (b) *гомоморфизмы* (1) *и* (2) *являются взаимно обратными изоморфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) вытекает из предложений 5.1, 5.3 и 5.2. Утверждение (b) вытекает из предложений 5.2a, 5.1 и 5.3a. Утверждение (c) вытекает из предложений 5.1, 5.2, 5.2a и следствия 5.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *Если фильтрация сходится и* $E_r^{u,v}=0$ *всякий раз, когда*

$$u+v=n, \quad u\neq p,\, p-k$$

(где $k>0$ *— некоторое фиксированное число), или когда*

$$u+v=n+1, \quad u\geq p+r,$$

или, наконец, когда

$$u+v=n-1, \quad u\leq p-k-r,$$

то имеет место точная последовательность

$$\text{(I)} \qquad E_r^{p,n-p} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_r^{p-k,n-p+k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5.5, имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow E_\infty^{p,n-p} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_\infty^{p-k,n-p+k} \longrightarrow 0.$$

С другой стороны, согласно предложению 5.2а, определен эпиморфизм $E_r^{p,n-p} \to E_\infty^{p,n-p}$ и, согласно предложению 5.2, — мономорфизм $E_\infty^{p-k,n-p+k} \to E_r^{p-k,n-p+k}$.

Докажем теперь еще одну серию предложений несколько иного характера. Прежде чем переходить к этим предложениям, мы введем некоторое обобщение гомоморфизма

$$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $s>r$, и пусть $E_r^{u,v}=0$ всякий раз, когда

$$u+v=p+q+1, \quad p+r\leq u<p+s$$

или

$$u+v=p+q, \qquad p<u\leq p+s-r.$$

Мы определяем гомоморфизм $d_{r,s}^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+s,q-s+1}$ как композицию гомоморфизмов $E_r^{p,q} \xrightarrow{\alpha} E_s^{p,q} \xrightarrow{\beta} E_s^{p+s,q-s+1} \xrightarrow{\gamma} E_r^{p+s,q-s+1}$, где $\beta=d_s^{p,q}$, а γ и α — гомоморфизмы, о которых идет речь в предложениях 5.2 и 5.2а.

ЛЕММА 5.8. *Если* $E_r^{p-s,q+s-1}=0$, *где* $r\leq s<\infty$, *то имеет место точная последовательность*

$$\text{(3)} \qquad 0 \longrightarrow E_{s+1}^{p,q} \longrightarrow E_s^{p,q} \xrightarrow{d_s^{p,q}} E_s^{p+s,q-s+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как, согласно предложению 5.1, $E_s^{p-s,q+s-1}=0$, то $d_s^{p-s,q+s-1}=0$ и, следовательно, $B_{s+1}^{p,q}=B_s^{p,q}$. Поэтому модуль $E_{s+1}^{p,q}$ совпадает с модулем $Z_{s+1}^{p,q}/B_s^{p,q}$, который является, согласно формуле 1, (7), ядром гомоморфизма $d_s^{p,q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. *Если фильтрация слабо сходится и существуют такие целые числа* r *и* $s\geq r$, *что* $E_r^{u,v}=0$ *всякий раз, когда*

$$u+v=p+q-1, \quad u\leq p-r,$$

или когда

$$u+v=p+q, \quad p\neq u\leq p+s-r,$$

или, наконец, когда

$$u+v=p+q+1, \quad p+r\leq u\neq p+s,$$

то имеет место точная последовательность

$$\text{(II)} \qquad H^{p+q}\longrightarrow E_r^{p,q}\xrightarrow{d_{r,s}^{p,q}} E_r^{p+s,q-s+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E_r^{p-s,q+s-1}=0$, то применима лемма 5.8, согласно которой имеет место точная последовательность (3). С другой стороны, согласно предложениям 5.2 и 5.2a, $E_{s+1}^{p,q}\approx E_\infty^{p,q}$ и $E_s^{p,q}\approx E_r^{p,q}$. Кроме того, согласно предложению 5.2, имеет место мономорфизм $E_s^{p+s,q-s+1}\to E_r^{p+s,q-s+1}$. Отсюда и из точной последовательности (3) вытекает точная последовательность

$$0\longrightarrow E_\infty^{p,q}\longrightarrow E_r^{p,q}\xrightarrow{d_{r,s}^{p,q}} E_r^{p+s,q-s+1}.$$

Чтобы получить точную последовательность (II), остается вспомнить, что, согласно предложению 5.3, имеет место эпиморфизм $H^{p+q}\to E_\infty^{p,q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9a. *Если фильтрация сходится и существуют такие целые числа r и $s\geq r$, что $E_r^{u,v}=0$ всякий раз, когда*

$$u+v=p+q+1, \quad u\geq p+r,$$

или когда

$$u+v=p+q, \quad p+r-s\leq u\neq p,$$

или, наконец, когда

$$u+v=p+q-1, \quad p-s\neq u\leq p-r,$$

то имеет место точная последовательность

$$\text{(III)} \qquad E_r^{p-s,q+s-1}\xrightarrow{d_{r,s}^{p-s,q+s-1}} E_r^{p,q}\longrightarrow H^{p+q}.$$

Доказательство двойственно доказательству предыдущего предложения.

Комбинируя последовательности (I), (II), (III), мы можем строить новые точные последовательности. Например, имеют место следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 5.10. *Если фильтрация сходится и $E_r^{u,v}=0$ для всех $u\neq p, p'$, где $r\geq 1$ и $p-p'\geq r$, то имеет место точная последовательность*

$$\ldots\to E_r^{p,n-p}\to H^n\to E_r^{p',n-p'}\to E_r^{p,n+1-p}\to H^{n+1}\to E_r^{p',n+1-p'}\to\ldots.$$

ТЕОРЕМА 5.11. *Если фильтрация сходится и $E_r^{u,v}=0$ для всех $v\neq q, q'$, где $r\geq 2$ и $q'-q\geq r-1$, то имеет место точная последовательность*

$$\ldots\to E_r^{n-q,q}\to H^n\to E_r^{n-q',q'}\to E_r^{n+1-q,q}\to H^{n+1}\to E_r^{n+1-q',q'}\to\ldots.$$

ТЕОРЕМА 5.12. *Если фильтрация сходится и* $E_2^{p,q}=0$ *всякий раз, когда* $p<0$ *или когда* $0\neq q<n$, *где* $n>0$, *то имеют место изоморфизмы*

$$E_2^{i,0}\approx H^i,\qquad i<n,$$

и точная последовательность

$$0\to E_2^{n,0}\to H^n\to E_2^{0,n}\to E_2^{n+1,0}\to H^{n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование изоморфизмов следует из утверждения (c) предложения 5.6, а точной последовательности — из предложений 5.7, 5.9 и 5.9a.

Двойственной к последней теореме является

ТЕОРЕМА 5.12a. *Если фильтрация сходится и* $E^2_{p,q}=0$ *всякий раз, когда* $p<0$ *или когда* $0\neq q<n$, *где* $n>0$, *то имеют место изоморфизмы*

$$E^2_{i,0}\approx H_i,\qquad i<n,$$

и точная последовательность

$$H_{n+1}\longrightarrow E^2_{n+1,0}\longrightarrow E^2_{0,n}\longrightarrow H_n\longrightarrow E^2_{n,0}\longrightarrow 0.$$

В заключение мы рассмотрим несколько нужных нам в дальнейшем специальных случаев.

Случай A. $H(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $p<0$. В этом случае $E_r^{p,q}=0$ для всех $p<0$ (и всех $r\leq\infty$). Следовательно, согласно утверждению (a) предложения 5.6, имеют место гомоморфизмы

$$H^n\longrightarrow E_2^{0,n}.$$

Случай B. $H^{p+q}(F^pA)=0$ для всех $q<0$. В этом случае фильтрация регулярна (и потому сходится). Кроме того, $E_r^{p,q}=0$ для всех $q<0$ (и всех $r\leq\infty$). Следовательно, согласно утверждению (b) предложения 5.6, имеют место гомоморфизмы

$$E_2^{n,0}\longrightarrow H^n.$$

Случай C. $H(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $p<0$ и $H^{p+q}(F^pA)=0$ для всех $q<0$. В этом случае фильтрация регулярна и $E_r^{p,q}=0$ всякий раз, когда $p<0$ или когда $q<0$ (для всех $r\leq\infty$). Следовательно, имеют место гомоморфизмы

$$E_2^{n,0}\longrightarrow H^n\longrightarrow E_2^{0,n}$$

и точная последовательность

$$0\longrightarrow E_2^{1,0}\longrightarrow H^1\longrightarrow E_2^{0,1}\longrightarrow E_2^{2,0}\longrightarrow H^2.$$

Двойственными к этим трем случаям являются:

Случай A′. $H(F^pA)=0$ для всех $p>0$. В этом случае фильтрация регулярна, $E^r_{p,q}=0$ для всех $p<0$ (и всех $r\leq\infty$) и имеют место гомоморфизмы

$$E^2_{0,n}\longrightarrow H_n.$$

Случай B′. $H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $q>0$. В этом случае $E^r_{p,q}=0$ для всех $q<0$ (и всех $r\leq\infty$) и имеют место гомоморфизмы

$$H_n \longrightarrow E^2_{n,0}.$$

Случай C′. $H(F^pA)=0$ для всех $p>0$ и $H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $q>0$. В этом случае фильтрация регулярна и $E^r_{p,q}=0$ всякий раз, когда $p<0$ или $q<0$ (для всех $r\leq\infty$). Следовательно, имеют место гомоморфизмы

$$E^2_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{n,0}$$

и точная последовательность

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \longrightarrow E^2_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^2_{1,0} \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим еще следующие два случая:

Случай D^k. $H^{p+q}(F^pA)=0$ для всех $q<k$ и $H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $q>k+1$. В этом случае фильтрация регулярна и, согласно теореме 5.11, имеет место точная последовательность

$$\ldots \to E_2^{n-k,k} \to H^n \to E_2^{n-k-1,k+1} \to E_2^{n-k+1,k} \to H^{n+1} \to E_2^{n-k,k+1} \to \ldots$$

Случай E^k. $H(F^pA/F^{p+1}A)=0$ для всех $p<k$ и $H(F^pA)=0$ для всех $p>k+1$. В этом случае фильтрация регулярна и из предложений 5.2 и 5.2а вытекает, что $E_2=E_\infty$. Кроме того, из предложения 5.5 вытекает, что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow E_2^{k+1,n-k-1} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_2^{k,n-k} \longrightarrow 0.$$

Указанные в случаях **A**, **B**, **A′** и **B′** гомоморфизмы мы будем называть *краевыми гомоморфизмами*. Указанные в случаях **C** и **C′** точные последовательности мы будем называть *точными последовательностями членов низшей степени*.

До сих пор мы имели дело со спектральной последовательностью, соответствующей некоторому вполне определенному комплексу с фильтрацией. Однако в приложениях, рассматриваемых в последующих двух главах, ситуация будет несколько иной. В этих приложениях мы встретимся с комплексами, которые, как и их фильтрации, будут строиться с большой степенью произвола. Однако, как правило, модули гомологий этих комплексов, фильтрации этих модулей гомологий и спектральные последовательности «не будут зависеть» от произвола построения.

Ввиду этого необходимо усовершенствовать наши обозначения и терминологию, с тем чтобы можно было говорить о спектральных последовательностях, не указывая явно комплексы с фильтрацией, из которых они получаются.

Если для модулей $\sum\limits_{p,q} B^{p,q}$ и $\sum\limits_{n} D^n$ существует комплекс A с регулярной фильтрацией F, модули гомологий $H^n(A)$ которого изоморфны модулям D^n, а члены $E_2^{p,q}(A)$ соответствующей спектральной последовательности изоморфны модулям $B^{p,q}$, то мы будем писать

$$B^{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} D^n.$$

Под стрелкой мы указываем фильтрационную степень, потому что во многих конкретных случаях модуль $B^{p,q}$ имеет настолько сложный вид, что по его записи невозможно определить, какой из двух его индексов соответствует фильтрационной степени, а какой дополнительной.

6. ПРИМЕНЕНИЕ К ДВОЙНЫМ КОМПЛЕКСАМ

Пусть $A = \sum A^{p,q}$ — произвольный двойной комплекс с дифференциалами d_1 и d_2 (см. § IV, 4). С этим двойным комплексом ассоциируется (одинарный) комплекс с полным дифференциалом d, модули гомологий которого мы будем обозначать через $H^n(A)$.

Введем дважды градуированный модуль $H_{\mathrm{I}}(A)$, представляющий собой модуль гомологий двойного комплекса A относительно дифференциала d_1. Этот модуль $H_{\mathrm{I}}(A)$ мы можем рассматривать как двойной комплекс, первый дифференциал d_1 которого равен нулю, а второй дифференциал d_2 индуцируется вторым дифференциалом d_2 комплекса A. Подобным же образом можно определить двойной комплекс $H_{\mathrm{II}}(A)$, являющийся модулем гомологий двойного комплекса A относительно дифференциала d_2. Модули гомологий комплексов $H_{\mathrm{I}}(A)$ и $H_{\mathrm{II}}(A)$ мы будем обозначать через $H_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{I}}(A)$ и $H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(A)$. Однородными составляющими этих дважды градуированных модулей являются модули $H_{\mathrm{II}}^{p,q}H_{\mathrm{I}}(A)$ и $H_{\mathrm{I}}^{p,q}H_{\mathrm{II}}(A)$ соответственно.

Введем теперь в двойном комплексе A две фильтрации F_{I} *(первая фильтрация)* и F_{II} *(вторая фильтрация)*, положив

$$F_{\mathrm{I}}^p A = \sum_{r \geq p} \sum_q A^{r,q}, \quad F_{\mathrm{II}}^q A = \sum_{s \geq q} \sum_p A^{p,s}.$$

Эти фильтрации, рассматриваемые как фильтрации (одинарного) комплекса, ассоциированного с двойным комплексом A, согласованы с полным дифференциалом d. Следовательно, они определяют две фильтрации модуля $H(A)$ и две спектральные последовательности, которые мы будем называть *первой и второй спектральными последовательностями двойного комплекса* A. Члены $E_r^{p,q}$ этих спектральных последовательностей мы будем обозначать через $\mathrm{I}_r^{p,q}$ и $\mathrm{II}_r^{q,p}$ соответственно (причина того, что в членах второй последовательности мы переставляем индексы, будет выяснена несколько позже). Градуированный модуль $H(A)$ с обоими фильтрациями, а также обе спектральные последовательности мы будем называть *инвариантами* двойного комплекса A.

Модуль $F_{\mathrm{I}}^p A / F_{\mathrm{I}}^{p+1} A$ можно, очевидно, отождествить с прямой суммой $\sum_q A^{p,q}$. Следовательно, модуль I_0, ассоциированный с модунем A относительно фильтрации F_{I}, можно отождествить с самим модулем A. После этого отождествления дифференциальный оператор модуля I_0 совпадет, как легко видеть, с дифференциалом d_2. Таким образом, модуль гомологий модуля I_0, т. е. модуль I_1, естественным образом отождествляется с модулем $H_{\mathrm{II}}(A)$.

Дифференциальный оператор $d_{\mathrm{I},1}$ модуля I_1 [т. е. модуля $E_1(A)$, построенного относительно первой фильтрации] представляет собой связывающий гомоморфизм модулей гомологий, соответствующий точной последовательности

$$0 \longrightarrow F_{\mathrm{I}}^{p+1}/F_{\mathrm{I}}^{p+2} \longrightarrow F_{\mathrm{I}}^{p}/F_{\mathrm{I}}^{p+2} \longrightarrow F_{\mathrm{I}}^{p}/F_{\mathrm{I}}^{p+1} \longrightarrow 0 .$$

Пусть $h \in H_{\mathrm{II}}^{p,q}(A)$ — произвольный элемент двойной степени (p, q) модуля $H_{\mathrm{II}}(A)$, а $x \in A^{p,q}$ — некоторый его прообраз. Так как $d_2 x = 0$, то $dx = d_1 x$. Таким образом, связывающий гомоморфизм $H(F_{\mathrm{I}}^{p}/F_{\mathrm{I}}^{p+1}) \to H(F_{\mathrm{I}}^{p+1}/F_{\mathrm{I}}^{p+2})$ индуцируется дифференциалом d_1. Другими словами, после отождествления модуля I_1 с модулем $H_{\mathrm{II}}(A)$ дифференциал $d_{\mathrm{I},1}$ модуля I_1 совпадет с дифференциалом d_1 модуля $H_{\mathrm{II}}(A)$. Следовательно,

$$(1) \qquad \mathrm{I}_2(A) = H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}(A).$$

Отметим, что это отождествление согласовано с двойными градуировками.

Для вычисления начального члена E_2 второй спектральной последовательности мы рассмотрим двойной комплекс ${}^tA$, транспонированный к двойному комплексу A. Этот двойной комплекс определяется формулами

$${}^tA^{p,q} = A^{q,p}, \quad {}^td_1^{p,q} = d_2^{p,q}, \quad {}^td_2^{p,q} = d_1^{p,q}.$$

Двойные комплексы A и ${}^tA$ имеют один и тот же ассоциированный одинарный комплекс A. Вторая фильтрация двойного комплекса A является первой фильтрацией двойного комплекса ${}^tA$. Следовательно, искомым членом E_2 является модуль $H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}({}^tA)$, совпадающий, как легко видеть, с модулем, транспонированным к дважды градуированному модулю $H_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{I}}(A)$. Другими словами, в введенных выше обозначениях

$$(2) \qquad \mathrm{II}_2(A) = H_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{I}}(A).$$

Таким образом, перестановка фильтрационной и дополнительной степеней при определении модулей $\mathrm{II}_r^{p,q}$ действительно вызывается существом дела.

Каждое отображение $f: A \to A'$ двойных комплексов согласовано с обеими фильтрациями F_{I} и F_{II} и, следовательно, индуцирует некоторые отображения соответствующих спектральных последовательностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Гомотопные отображения двойных комплексов индуцируют одно и то же отображение их инвариантов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, g: A \to A'$ — данные отображения, а $(s_1, s_2): f \simeq g$ — связывающая их гомотопия (см. § IV, 4). Для ассоциированных (одинарных) комплексов эта гомотопия определяет, очевидно, некоторую гомотопию s порядка, не большего единицы, относительно каждой из фильтраций F_{I} и F_{II}. Следовательно, согласно предложению 3.1, отображения f и g для любого $r \geq 2$ индуцируют одни и те же гомоморфизмы $\mathrm{I}_r^{p,q}(A) \to \mathrm{I}_r^{p,q}(A')$ и $\mathrm{II}_r^{p,q}(A) \to \mathrm{II}_r^{p,q}(A')$.

Заметим, что этот результат является основной причиной того, что спектральная последовательность начинается, по определению, с модуля E_2, а не с модуля E_1 (и, тем более, не с модуля E_0, представляющего собой прямую сумму модулей $F^pA/F^{p+1}A$).

Мы установим сейчас несколько соотношений между соответствующими данному двойному комплексу A модулями $\mathrm{I}_2^{p,q}$, $\mathrm{II}_2^{p,q}$ и $H^n(A)$, имеющих место при предположении, что некоторые однородные составляющие $A^{p,q}$ модуля A равны нулю. Все эти соотношения вытекают из результатов § 5.

Случай 1. $A^{p,q} = 0$, если $q < 0$. В этом случае фильтрация F_{I} регулярна и для нее имеет место случай **B**, тогда как для фильтрации F_{II} имеет место случай **A**. Следовательно, определены краевые гомоморфизмы

$$\mathrm{I}_2^{n,0} \longrightarrow H^n \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n,0}.$$

Случай 2. $A^{p,q} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$ (т. е. двойной комплекс A градуирован положительно). В этом случае обе фильтрации регулярны и для них имеет место случай **C**. Следовательно, определены краевые гомоморфизмы

$$\mathrm{I}_2^{n,0} \longrightarrow H^n \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n,0},$$
$$\mathrm{II}_2^{0,n} \longrightarrow H^n \longrightarrow \mathrm{I}_2^{0,n}$$

и точные последовательности членов низшей степени

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow \mathrm{I}_2^{0,1} \longrightarrow \mathrm{I}_2^{2,0} \longrightarrow H^2,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{0,1} \longrightarrow H^1 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{1,0} \longrightarrow \mathrm{II}_2^{0,2} \longrightarrow H^2.$$

Случай 3. $A^{p,q} = 0$, если $q \neq 0, 1$. В этом случае обе фильтрации регулярны, причем для фильтрации F_{I} имеет место случай **D⁰**, а для фильтрации F_{II} — случай **E⁰**. Следовательно, имеют место точные последовательности

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n,0} \to H^n \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n-1,1} \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n+1,0} \longrightarrow H^{n+1} \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n,1} \longrightarrow \ldots,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n-1,1} \longrightarrow H^n \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n,0} \longrightarrow 0.$$

Случай 4. $A^{p,q} = 0$, если $p \neq 0, 1$ или $q \neq 0, 1$. В этом случае указанные выше точные последовательности вырождаются в точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow \mathrm{I}_2^{0,1} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{0,1} \longrightarrow H^1 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{1,0} \longrightarrow 0$$

и изоморфизмы

$$\mathrm{I}_2^{1,1} \approx H^2 \approx \mathrm{II}_2^{1,1}.$$

Эти результаты приспособлены для приложений к теории групп когомологий и правых производных функторов. Для приложений к теории групп гомологий и левых производных функторов нужны соответствующие двойственные предложения, которые проще всего получить, перейдя к нижним индексам:

$$A_{p,q} = A^{-p-q}, \quad \mathrm{I}^r_{p,q} = \mathrm{I}_r^{-p,-q}, \quad \mathrm{II}^r_{p,q} = \mathrm{II}_r^{-p,-q}, \quad H_n = H^{-n}.$$

Таким образом, мы должны рассмотреть следующие четыре случая:

Случай 1′. $A_{p,q} = 0$, если $q < 0$.
Случай 2′. $A_{p,q} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$.
Случай 3′. $A_{p,q} = 0$, если $q \neq 0, 1$.
Случай 4′. $A_{p,q} = 0$, если $p \neq 0, 1$ или $q \neq 0, 1$.

Соотношения, имеющие место в этих случаях, получаются из соответствующих соотношений, установленных в случаях **1—4**, посредством опускания индексов и изменения на противоположные направлений всех стрелок. Единственное существенное отличие состоит в том, что в случае **1′** регулярной является фильтрация F_{II}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если первый дифференциальный оператор d_1 двойного комплекса A равен нулю, то $H_{\mathrm{I}}(A) = A$ и

$$H(A) = H_{\mathrm{II}}(A) = H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(A) = H_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{I}}(A).$$

Таким образом, в этом случае модуль $H(A)$ дважды градуирован и совпадает с модулями I_2 и II_2. Кроме того, все дифференциальные операторы первой и второй спектральных последовательностей равны нулю, а в случае **1** композиция гомоморфизмов $\mathrm{I}_2^{n,0} \to H^n \to \mathrm{II}_2^{n,0}$ является тождественным отображением.

7. ОБОБЩЕНИЕ

В этом параграфе описывается некоторая более общая ситуация, в которой могут быть построены спектральные последовательности. Это обобщение особенно интересно в связи с геометрическими приложениями (см. ниже).

Предположим, что каждой паре (p, q) целых чисел (или символов $-\infty, \infty$), для которой $p \leq q$, сопоставлен некоторый модуль $H(p, q)$. Модуль $H(p, \infty)$ мы будем обозначать через $H(p)$, а модуль $H(-\infty, \infty)$ — через H.

Предположим далее, что любым двум парам (p, q), (p', q'), для которых $p \leq p'$ и $q \leq q'$ [в этом случае мы будем писать, что $(p, q) \leq (p', q')$], сопоставлен некоторый гомоморфизм

$$H(p', q') \longrightarrow H(p, q), \tag{1}$$

а любой тройке (p, q, r), для которой $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty$, сопоставлен некоторый *связывающий гомоморфизм*

$$(2) \qquad \delta : H(p, q) \longrightarrow H(q, r).$$

Введенные примитивные понятия мы подчиним следующим аксиомам:

(SP. 1) гомоморфизм $H(p, q) \to H(p, q)$ является тождественным отображением;

(SP. 2) для любых пар $(p, q) \leq (p', q') \leq (p'', q'')$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H(p'', q'') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(p, q) \\ & H(p', q') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(SP. 3) для любых троек $(p, q, r) \leq (p', q', r')$[1] имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H(p', q') \arrow[r] \arrow[d] & H(q', r') \arrow[d] \\ H(p, q) \arrow[r] & H(q, r) \end{tikzcd}$$

(SP. 4) для любой тройки (p, q, r) имеет место точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H(q, r) \longrightarrow H(p, r) \longrightarrow H(p, q) \xrightarrow{\delta} H(q, r) \longrightarrow \ldots;$$

(SP. 5) для любого фиксированного числа q прямой спектр модулей

$$H(q, q) \longrightarrow H(q-1, q) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H(p, q) \longrightarrow H(p-1, q) \longrightarrow \ldots$$

имеет своим пределом модуль $H(-\infty, q)$ [относительно гомоморфизмов $H(p, q) \to H(-\infty, q)$].

Из аксиом (SP. 1) и (SP. 4) вытекает, что для любого p модуль $H(p, p)$ равен нулю. Из аксиомы (SP. 3) вытекает, что связывающий гомоморфизм (2) допускает разложение

$$(2') \qquad H(p, q) \xrightarrow{\delta} H(q) \longrightarrow H(q, r).$$

Отсюда следует, что существование связывающего гомоморфизма (2) можно постулировать лишь для случая $r = \infty$, определив его в общем случае как сквозное отображение (2'). В соответствии с этим аксиомы (SP. 3) и (SP. 4) можно ослабить, положив в них $r = \infty$. Легко показать, что ослабленная таким образом система аксиом равносильна исходной.

[1] То есть таких, что $p \leq p'$, $q \leq q'$ и $r \leq r'$. — *Прим. ред.*

Как правило, в конкретных ситуациях модули $H(p, q)$ градуированы. В этом случае дополнительно предполагается, что гомоморфизм (1) имеет степень нуль, а гомоморфизм (2) — степень 1.

Пример 1. Пусть A — произвольный модуль с дифференциалом d и фильтрацией F. Определим модули $H(p, q)$, полагая $H(p, q) = H(F^p/F^q)$, где, как обычно, $F^{-\infty} = A$ и $F^{\infty} = 0$. Если $(p, q) \leq (p', q')$, то имеет место естественный гомоморфизм $F^{p'}/F^{q'} \to F^p/F^q$. Соответствующий гомоморфизм модулей гомологий мы примем за гомоморфизм (1). Для каждой тройки (p, q, r) имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow F^q/F^r \longrightarrow F^p/F^r \longrightarrow F^p/F^q \longrightarrow 0.$$

Соответствующий связывающий гомоморфизм мы примем за гомоморфизм (2). Аксиомы (SP. 1) — (SP. 5) проверяются непосредственно. Этот случай как раз и рассматривался выше в этой главе.

Пример 2. Пусть X — произвольное топологическое пространство, а $\{X^p\}$, где p пробегает все целые числа, — такое семейство его подпространств, что $X^p \subset X^{p-1}$. Пусть, кроме того, $X^{-\infty} = \varnothing$[1], $X^{\infty} = X$. Мы определим модули $H(p, q)$, положив

$$H(p, q) = \sum_n H^n(X^q, X^p),$$

где $H^n(X^q, X^p)$ — n-мерная группа когомологий пары (X^q, X^p) относительно некоторой фиксированной теории когомологий[2]. Гомоморфизмы (1) и (2) представляют собой соответственно индуцированный и когграничный гомоморфизмы данной теории когомологий. Аксиомы (SP. 1)—(SP. 4) непосредственно вытекают из известных свойств групп когомологий. Аксиома (SP. 5), вообще говоря, не выполняется. Для того чтобы она была выполнена, следует наложить определенные ограничения как на рассматриваемые пространства, так и на положенную в основу теорию когомологий.

Пример 3. В ситуации примера 2 определим модули $H(p, q)$, положив

$$H(p, q) = \sum_n H_n(X^{-p}, X^{-q}),$$

где $H_n(X^{-p}, X^{-q})$ — n-мерная группа гомологий пары (X^{-p}, X^{-q}).

Возвращаясь к абстрактному изложению, положим

$$\begin{aligned} F^pH &= \operatorname{Im}(H(p) \longrightarrow H), \\ Z_r^p &= \operatorname{Im}(H(p, p+r) \longrightarrow H(p, p+1)), \\ B_r^p &= \operatorname{Im}(H(p-r+1, p) \longrightarrow H(p, p+1)), \\ E_r^p &= Z_r^p/B_r^p, \end{aligned}$$

---

[1] Символом $\varnothing$ обозначается пустое множество. — *Прим. ред.*

[2] По поводу встречающихся здесь и ниже топологических понятий см. Стинрод и Эйленберг, Основания алгебраической топологии, Физматгиз, 1958. — *Прим. ред.*

где $1 \leq r \leq \infty$, $-\infty < p < \infty$. Легко проверить, что семейство подмодулей F^pH образует фильтрацию модуля H. Все результаты § 1, 2, 4 и 5 переносятся на рассматриваемый случай без каких-либо изменений. При перенесении результатов § 3 требуется некоторая осторожность.

Пусть $\{H(p, q)\}$ и $\{H'(p, q)\}$ — две системы модулей с гомоморфизмами (1) и (2), удовлетворяющие аксиомам (SP. 1)—(SP. 5). Отображением f первой системы во вторую называется семейство гомоморфизмов $f(p, q) : H(p, q) \to H'(p, q)$, перестановочных с гомоморфизмами (1) и (2). Очевидно, что любое отображение f индуцирует отображения $f_r^* : E_r \to E'_r$, $1 \leq r \leq \infty$. Пусть f и g — два отображения системы $\{H(p, q)\}$ в систему $\{H'(p, q)\}$. Мы будем говорить, что отображения f и g *k-эквивалентны*, где $k \geq 0$, если для любой пары (p, q) композиция отображений

$$H(p, q) \xrightarrow{\gamma} H'(p, q) \longrightarrow H'(p-k, q-k),$$

где $\gamma = g(p, q) - f(p, q)$, равна нулю. В качестве аналога предложения 3.1 мы докажем, что из k-эквивалентности отображений f и g следует, что $f_r^* = g_r^*$ для всех $r > k$. Как и при доказательстве предложения 3.1, достаточно показать, что композиция гомоморфизмов

$$H(p, p+r) \xrightarrow{\gamma} H'(p, p+r) \longrightarrow H'(p-r+1, p+1)$$

равна нулю. Однако это очевидно, поскольку второй гомоморфизм допускает разложение

$$H'(p, p+r) \longrightarrow H'(p-k, p+r-k) \longrightarrow H'(p-r+1, p+1).$$

Заметим, что мы тем самым заново доказали предложение 3.1. Остальные результаты § 3 переносятся без каких-либо изменений.

В заключение заметим, что систему точных последовательностей

$$\ldots \longrightarrow H(p+1) \longrightarrow H(p) \longrightarrow H(p, p+1) \longrightarrow H(p+1) \longrightarrow \ldots,$$

определенных для всех целых чисел p, можно представить в виде одной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & E_1 & \end{array} \tag{3}$$

где $C = \sum_p H(p)$, $E_1 = \sum_p H(p, p+1)$. Диаграмма (3) является *точной парой* в смысле Масси [Massey, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 363—396]. Спектральные последовательности можно также строить, исходя из произвольной точной пары.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Λ и Λ' — произвольные K-алгебры, $\Gamma = \Lambda \otimes_K \Lambda'$ — их тензорное произведение и A, A' и A'' — некоторые комплексы (над алгебрами Λ, Λ' и Γ соответственно). Предположим, что задано некоторое отображение Γ-комплексов

$$\varphi : A \otimes_K A' \longrightarrow A'',$$

отображающее подкомплекс $F^p(A) \otimes F^{p'}(A')$ в подкомплекс $F^{p+p'}(A'')$.

Показать, что соответствующий гомоморфизм $\alpha : H(A) \otimes H(A') \to H(A'')$ индуцирует согласованное с градуировками отображение

$$\bar{\varphi}^{p,p'} : E_0^p(H(A)) \otimes E_0^{p'}(H(A')) \longrightarrow E_0^{p+p'}(H(A'')).$$

2. Используя изоморфизм 1, (5), дать другое определение рассмотренного в упражнении 1 отображения $\bar{\varphi}^{p,p'}$ построив отображения

$$Z_\infty^p(A) \otimes Z_\infty^{p'}(A') \longrightarrow Z_\infty^{p+p'}(A''),$$

переводящие модули

$$B_\infty^p(A) \otimes Z_\infty^{p'}(A') \text{ и } Z_\infty^p(A) \otimes B_\infty^{p'}(A')$$

в модуль $B_\infty^{p+p'}(A'')$.

Показать, что отображение

$$\bar{\varphi}^{p,p'} : E_\infty^p(A) \otimes E_\infty^{p'}(A') \longrightarrow E_\infty^{p+p'}(A'')$$

можно определить как «предел» отображений

$$\varphi_r^{p,p'} : E_r^p(A) \otimes E_r^{p'}(A') \longrightarrow E_r^{p+p'}(A''),$$

индуцированных отображениями

$$Z_r^p(A) \otimes Z_r^{p'}(A') \longrightarrow Z_r^{p+p'}(A'').$$

Определив в модуле $E_r(A) \otimes E_r(A')$ дифференциал d_r, для которого

$$d_r(a \otimes a') = (d_r a) \otimes a' + (-1)^p a \otimes (d_r a'), \quad a \in E_r^p(A), a' \in E_r^{p'}(A'),$$

показать, что отображения $\varphi_r^{p,p'}$ согласованы с дифференциалами модулей $E_r(A) \otimes E_r(A')$ и $E_r(A'')$. Переходя к модулям гомологий, показать, что отображение

$$H^p(E_r(A)) \otimes H^{p'}(E_r(A')) \longrightarrow H^{p+p'}(E_r(A''))$$

совпадает с отображением $\varphi_{r+1}^{p,p'}$ [в силу естественных изоморфизмов $H^p(E_r(A)) \approx E_{r+1}^p(A)$, $H^{p'}(E_r(A')) \approx E_{r+1}^{p'}(A')$, $H^{p+p'}(E_r(A'')) \approx E_{r+1}^{p+p'}(A'')$].

3. Полагая $\Lambda = \Lambda' = K$ и $A' = A'' = A$, применить результаты упражнений 1 и 2 к произвольной градуированной K-алгебре A, в которой определен такой дифференциал d, что для любых однородных элементов $a, a' \in A$

$$d(aa') = (da)\,a' + (-1)^p\, a(da'),$$

где p — степень элемента a[1].

4. Пусть $\{A^{p,q}\}$, $\{A'^{p',q'}\}$, $\{A''^{s,t}\}$ — произвольные двойные комплексы. Рассмотрим двойной комплекс

$$C^{s,t} = \sum A^{p,q} \otimes A'^{p',q'}, \qquad p + p' = s,\ q + q' = t,$$

с дифференциальными операторами δ_1 и δ_2, построенными согласно § IV, 4. Предполагая, что задано некоторое отображение двойных комплексов

$$C^{s,t} \longrightarrow A''^{s,t},$$

рассмотрим первые фильтрации двойных комплексов $\{A^{p,q}\}$, $\{A'^{p',q'}\}$ и $\{A''^{s,t}\}$. Показать, что к соответствующим спектральным последовательностям применимы результаты упражнений 1 и 2. Аналогичным образом рассмотреть вторые фильтрации.

5. Пусть A — произвольный двойной комплекс с дифференциальными операторами d_1 и d_2. Полагая $B_{\mathrm{I}} = \operatorname{Im} d_1$, $Z_{\mathrm{I}} = \operatorname{Ker} d_1$, показать, что эти подмодули являются двойными комплексами, первые дифференциальные операторы которых равны нулю. Подобным же образом ввести двойные комплексы $B_{\mathrm{II}}(A)$ и $Z_{\mathrm{II}}(A)$. Рассмотрим дважды градуированный модуль

$$C(A) = Z_{\mathrm{I}}(A) \cap Z_{\mathrm{II}}(A) = Z(Z_{\mathrm{II}}(A)) = Z(Z_{\mathrm{I}}(A)).$$

Очевидно, что $C^{p,q}(A) = A^{p,q} \cap Z(A)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & C(A) = Z_{\mathrm{I}}(Z_{\mathrm{II}}(A)) \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g"] & \\
H(B_{\mathrm{I}}(A)) \arrow[r, "k"] & H(A) & H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(A))
\end{tikzcd}$$

где отображения k и f индуцированы вложениями $B_{\mathrm{I}}(A) \subset A$, $C(A) \subset A$, а отображение g — естественными гомоморфизмами $Z_{\mathrm{II}} \to H_{\mathrm{II}}$ и $Z_{\mathrm{I}} \to H_{\mathrm{I}}$. Показать, что отображение g является гомоморфизмом дважды градуированных групп, а отображения k и f согласованы как с первой, так и со второй фильтрациями. Следовательно, эти отображения определяют некоторые отображения f_{I}, f_{II}, k_{I} и k_{II} ассоциированных градуированных групп. В частности,

$$f_{\mathrm{I}} : C(A) \longrightarrow \mathrm{I}_{\infty}(A) = \sum_p F_{\mathrm{I}}^p H(A)/F_{\mathrm{I}}^{p+1} H(A).$$

6. Доказать равносильность следующих двух свойств (обозначения см. в упражнении 5):

---

[1] То есть к произвольной градуированной дифференциальной K-алгебре; см. примечание на стр. 283. — *Прим. ред.*

(a) для любых элементов $a, b \in A$, для которых $d_1 a = d_2 b$ и $d_2 a = 0$, существует такой элемент $c \in A$, что $d_1 d_2 c = d_1 a$;

(a′) отображение g является изоморфизмом.

Предполагая, что эти свойства выполнены, показать, что:

(i) $f(F_{\mathrm{I}}^p C) = F_{\mathrm{I}}^p H(A)$, $f(F_{\mathrm{II}}^q C) = F_{\mathrm{II}}^q H(A)$;

(ii) отображения f, f_{I} и f_{II} являются изоморфизмами;

(iii) первая фильтрация двойного комплекса A слабо сходится и $Z_\infty(A) = Z_2(A)$.

Дифференциальные операторы всех членов первой спектральной последовательности двойного комплекса A в этом случае равны нулю, так что имеет место изоморфизм $\varphi : \mathrm{I}_\infty(A) \approx H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(A))$. Показать, что $\varphi f_{\mathrm{I}} = g_{\mathrm{I}} = g$. [Указание к доказательству утверждения (i): индукцией по r доказать, что любой d-цикл $a \in \sum\limits_{0 \le i \le r} A^{p+i, q-i}$ d-гомологичен некоторому элементу подмодуля $\sum\limits_{0 \le i \le r} C^{p+i, q-i}$.]

7. Показать, что элемент $u \in C(A)$ (обозначения см. в упражнении 5) тогда и только тогда принадлежит ядру гомоморфизма g, когда существуют такие элементы $b, c \in A$, что $u = d_1 b + d_2 c$ и $d_2 b = 0$. Доказать равносильность следующих свойств:

(b) для любого элемента $a \in A$, для которого $d_2 d_1 a = 0$, существуют такие элементы $b, c \in A$, что $d_1 a = d_1 b + d_2 c$ и $d_2 b = 0$;

(b′) $g(Z(B_{\mathrm{I}}(A))) = 0$.

Предполагая, что двойной комплекс A обладает этими свойствами, доказать, что:

(iv) $\operatorname{Ker} g = Z(B_{\mathrm{I}}(A)) + \operatorname{Ker} f$ (указание: показать, что $\operatorname{Ker} f \subset \subset \operatorname{Ker} g$ и $\operatorname{Ker} g \subset Z(B_{\mathrm{I}}(A)) + \operatorname{Ker} f$);

(v) $k(H^{p,q}(B_{\mathrm{I}}(A))) \subset k(H^{p+1,q-1}(B_{\mathrm{I}}(A)))$;

(vi) $k_{\mathrm{I}} = 0$;

(vii) $\operatorname{Im} k \subset \bigcap\limits_p F_{\mathrm{I}}^p H(A)$;

(viii) если фильтрация F_{I} комплекса A сходится, то гомомор физм k равен нулю.

8. Предполагая, что двойной комплекс A обладает свойствами (a) и (b) (см. упражнения 6 и 7), доказать, что имеет место точная последовательность

$$H(B_{\mathrm{I}}(A)) \xrightarrow{k} H(A) \xrightarrow{l} H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(A)) \longrightarrow 0,$$

где $l = gf^{-1}$, и показать, что отображения k и l согласованы с обеими фильтрациями. Показать, что

$$k_{\mathrm{I}} = 0 \text{ и } l_{\mathrm{I}} = \varphi : \mathrm{I}_\infty(A) \approx H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(A)).$$

Показать также, что если $k=0$, то обе фильтрации модуля $H(A)$ являются образами при отображении l^{-1} фильтраций дважды градуированного модуля $H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(A)$.

Доказать равносильность следующих свойств:

(c) $k=0$;

(d) фильтрация F_{I} двойного комплекса A сходится.

9. Показать, что если двойной комплекс A является пределом прямого спектра таких двойных комплексов A_α, что для каждого индекса α

(1) комплекс A_α обладает свойством (b) из упражнения 7,

(2) фильтрация F_{I} комплекса A_α сходится,

то комплекс A также обладает свойством (b) и гомоморфизм $k: H(B_{\mathrm{I}}(A)) \to H(A)$ равен нулю. Если, кроме того, комплекс A обладает свойством (a) из упражнения 6, то отображение l является изоморфизмом $H(A) \approx H_{\mathrm{I}}(H_{\mathrm{II}}(A))$, согласованным с обеими фильтрациями.

ГЛАВА XVI

ПРИМЕНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Введение. В § V, 8 мы рассматривали функторы нескольких аргументов и изучали соотношения между производными и частными производными функторами. Полученные при этом результаты были далеко неполны, ибо полностью решить этот вопрос можно лишь с помощью спектральных последовательностей (см. § 1).

Спектральные последовательности появляются всякий раз, когда имеет место некоторое соотношение ассоциативности типа соотношения

$$\operatorname{Hom}(A, \operatorname{Hom}(B, C)) \approx \operatorname{Hom}(A \otimes B, C).$$

Такому соотношению соответствуют две спектральные последовательности по существу с одним и тем же «пределом», начальные члены E_2 которых имеют вид

$$\operatorname{Ext}^p(A, \operatorname{Ext}^q(B, C)) \text{ и } \operatorname{Ext}^q(\operatorname{Tor}_p(A, B), C).$$

На этом пути можно получить много разнообразных спектральных последовательностей. В частности, так получаются спектральные последовательности, связывающие группы гомологий произвольной группы с группами гомологий ее нормального делителя и соответствующей факторгруппы, а также спектральные последовательности, связывающие группы гомологий произвольной алгебры Ли с группами гомологий ее идеала и соответствующей факторалгебры.

В § 9 вкратце описываются некоторые топологические применения спектральных последовательностей, в основном к вопросам, связанным с группами операторов.

1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

Пусть $T(A, C)$ — произвольный функтор, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. Наряду с правыми производными функторами R^nT мы будем также рассматривать правые частные производные функторы $R^n_{(1)}T$ и $R^n_{(2)}T$, получающиеся, когда один из аргументов функтора T считается активным, а другой — пассивным. Как было показано в § V, 8, имеют место естественные отображения

$$(1)\qquad R^n_{(1)}T \longrightarrow R^nT, \quad R^n_{(2)}T \longrightarrow R^nT.$$

Подставив в функтор T вместо модуля A его произвольную инъективную резольвенту X, а вместо модуля C его произвольную проективную резольвенту Y, мы, согласно § IV, 5, получим некоторый двойной комплекс $T(X, Y)$. Из соображений, аналогичных изложенным в § V, 3, следует, что инварианты этого двойного комплекса не зависят от выбора резольвент и являются функторами аргументов A и C. Модулем гомологий комплекса $T(X, Y)$ является, по определению, модуль $RT(A, C)$.

Так как

$$H_{\mathrm{II}}(T(X, Y)) = R_{(2)}T(X, C),$$

то начальный член первой спектральной последовательности, соответствующей двойному комплексу $T(X, Y)$, имеет вид

$$\mathrm{I}_2 = H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}(T(X, Y)) = H\left(R_{(2)}T(X, C)\right) = R_{(1)}R_{(2)}T(A, C)$$

(см. § XV, 6), т. е.

$$(2)\qquad \mathrm{I}_2^{p,q} = R^p_{(1)}R^q_{(2)}T.$$

Аналогично

$$(3)\qquad \mathrm{II}_2^{p,q} = R^q_{(2)}R^p_{(1)}T.$$

Так как двойной комплекс $T(X, Y)$ градуирован положительно, то обе его фильтрации регулярны и, следовательно,

$$(4)\qquad R^p_{(1)}R^q_{(2)}T \underset{p}{\Longrightarrow} R^nT,$$

$$(5)\qquad R^q_{(2)}R^p_{(1)}T \underset{q}{\Longrightarrow} R^nT.$$

Рассмотрим краевые гомоморфизмы и точные последовательности членов низшей степени, соответствующие этим спектральным последовательностям. Для простоты мы предположим, что функтор T точен слева и, следовательно, $R^0T = R^0_{(1)}T = R^0_{(2)}T = T$. В этом случае краевые гомоморфизмы и точные последовательности членов низшей степени имеют вид:

$$(6)\qquad R^n_{(1)}T \longrightarrow R^nT, \qquad R^n_{(2)}T \longrightarrow R^nT,$$

$$(7)\qquad R^nT \longrightarrow R^0_{(1)}R^n_{(2)}T, \qquad R^nT \longrightarrow R^0_{(2)}R^n_{(1)}T,$$

$$(8)\qquad 0 \longrightarrow R^1_{(1)}T \longrightarrow R^1T \longrightarrow R^0_{(1)}R^1_{(2)}T \longrightarrow R^2_{(1)}T \longrightarrow R^2T,$$

$$(9)\qquad 0 \longrightarrow R^1_{(2)}T \longrightarrow R^1T \longrightarrow R^0_{(2)}R^1_{(1)}T \longrightarrow R^2_{(2)}T \longrightarrow R^2T.$$

Оказывается, что гомоморфизмы (1) совпадают с гомоморфизмами (6). Действительно, рассмотрим (одинарный) комплекс $B = T(X, C)$ с фильтрацией F, определенной формулой $F^pB = \sum_{n \geq p} B^n$.

Отображение $T(X, C) \to T(X, Y)$, индуцированное пополняющим отображением резольвенты Y, переводит фильтрацию F в фильтрацию F_1 комплекса $T(X, Y)$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_2^{n,0}(B) & \longrightarrow & H^n(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n_{(1)}T(A, C) & \longrightarrow & R^n T(A, C) \end{array}$$

Но для фильтрации F комплекса B мы имеем $E_0(B) = B$ и $E_1^{n,0}(B) = E_2^{n,0}(B) = H^n(B) = R^n_{(1)}T(A, C)$. Следовательно, верхний горизонтальный и левый вертикальный гомоморфизмы рассматриваемой диаграммы являются тождественными отображениями. Поэтому нижний горизонтальный гомоморфизм совпадает с правым вертикальным гомоморфизмом. Остается заметить, что первым из этих гомоморфизмов является гомоморфизм (6), а вторым — гомоморфизм (1).

Мы можем теперь дать новое, более короткое доказательство содержащегося в теореме V, 8.1 утверждения о том, что для сбалансированного справа функтора T гомоморфизм (1) является изоморфизмом. Действительно, если функтор T сбалансирован справа, то $R^q_{(2)}T(A, C) = 0$ для всех $q > 0$ и любого инъективного модуля A. Поэтому $R^p_{(1)}R^q_{(2)}T = 0$ для всех $q > 0$. Таким образом, первая спектральная последовательность (4) вырождается[1] и, следовательно, определяет изоморфизм $R^n_{(1)}T \approx R^n T$.

Все сказанное непосредственно обобщается на случай, когда A и C представляют собой некоторые множества аргументов, по одним из которых функтор T ковариантен, а по другим — контравариантен.

Аналогичные результаты имеют место и для левых производных функторов. При этом спектральные последовательности (4) и (5) заменяются спектральными последовательностями

(4a) $$L^{(1)}_p L^{(2)}_q T \underset{p}{\Longrightarrow} L_n T,$$

(5a) $$L^{(2)}_q L^{(1)}_p T \underset{q}{\Longrightarrow} L_n T.$$

2. ФУНКТОРЫ КОМПЛЕКСОВ

Пусть $T(A, C)$ — произвольный точный слева и сбалансированный справа функтор, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. Мы будем здесь рассматривать случай, когда значениями аргумента A являются комплексы, а значениями

[1] То есть однородные составляющие $E_2^{p,q}$ дважды градуированного модуля E_2 равны нулю для всех $q \neq 0$. В этом случае, как вытекает, например, из теоремы XV, 5.12, соответствующие краевые гомоморфизмы являются изоморфизмами. — *Прим. перев.*

аргумента C модули. Подставляя в функтор T вместо модуля C его произвольную проективную резольвенту Y, мы получим двойной комплекс $T(A, Y)$. Инварианты этого двойного комплекса не зависят от выбора резольвенты Y и являются функторами аргументов A и C.

Модуль гомологий $H^n(T(A, Y))$ комплекса $T(A, Y)$ мы будем обозначать через $\mathcal{R}^n T(A, C)$. С другой стороны, $H_{\mathrm{II}}(T(A, Y)) = RT(A, C)$ и, следовательно,

$$\mathrm{I}_2^{p,q} = H^p(R^q T(A, C)). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь модуль $H_{\mathrm{I}}^{p,q}(T(A, Y)) = H^p(T(A, Y_q))$. Так как функтор $T(A, Y_q)$ для проективного модуля Y_q является точным функтором аргумента A, то, согласно теореме IV, 7.2, мы можем модуль $H^p(T(A, Y_q))$ отождествить с модулем $T(H^p(A), Y_q)$. Таким образом, $H_{\mathrm{I}}^{p,q}(T(A, Y)) = T(H^p(A), Y_q)$. Отсюда, применяя функтор H_{II}, мы получим, что

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = R^q T(H^p(A), C). \tag{2}$$

Двойной комплекс $T(A, Y)$ удовлетворяет условиям случая 1, § XV, 6, так что определены краевые гомоморфизмы $\mathrm{I}_2^{n,0} \to H^n \to \mathrm{II}_2^{n,0}$, т. е. гомоморфизмы

$$H^n(T(A, C)) \longrightarrow \mathcal{R}^n T(A, C) \longrightarrow T(H^n(A), C). \tag{3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Сквозное отображение* (3) *совпадает с отображением*

$$\alpha' : H^n(T(A, C)) \longrightarrow T(H^n(A), C),$$

рассмотренным в предложении IV, 6.1a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сквозное отображение (3), которое мы обозначим через $\bar{\alpha}$, очевидно, естественно относительно отображений комплексов $A \to A'$. Поэтому в силу предложения IV, 6.1a достаточно показать, что гомоморфизм $\bar{\alpha}$ является тождественным отображением всякий раз, когда дифференциал комплекса A равен нулю. Но в этом случае равен нулю первый дифференциал двойного комплекса $T(A, Y)$ и потому, согласно замечанию, сделанному в конце § XV, 6, гомоморфизм $\bar{\alpha}$ действительно является тождественным отображением.

Во всех приложениях, которые мы будем рассматривать в этой главе, градуировка комплекса A, а потому и соответствующая двойная градуировка комплекса $T(A, Y)$ положительны. В этом случае обе фильтрации комплекса $T(A, Y)$ регулярны, так что

$$H^p(R^q T(A, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C), \tag{4}$$

$$R^q T(H^p(A), C) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C). \tag{5}$$

Аналогичные результаты имеют место и в случае, когда значениями аргумента A являются модули, а значениями аргумента C

(отрицательно градуированные) комплексы. В двойном комплексе $T(X, C)$, где X — произвольная инъективная резольвента модуля A, мы первой степенью будем считать степень, соответствующую градуировке комплекса C, а второй степенью — степень, соответствующую градуировке комплекса X. Тогда будут иметь место спектральные последовательности

$$(4') \qquad R^p T(A, H_q(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C),$$

$$(5') \qquad H^q(R^p T(A, C)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C),$$

где

$$\mathcal{R}^n T(A, C) = H^n(T(X, C)).$$

Эти результаты можно обобщить, предположив, что комплексами являются значения обоих аргументов A и C. Этот общий случай мы рассмотрим в гл. XVII.

Ясно, что совершенно аналогичные результаты имеют место и для сбалансированных слева функторов.

3. СЛОЖНЫЕ ФУНКТОРЫ

Рассмотрим функтор

$$(1) \qquad T(A, C) = U(A, V(C)) = U'(V'(A), C),$$

двумя различными способами представленный в виде сложного функтора. Результаты исследования этого функтора понадобятся нам в следующих параграфах.

Сначала мы рассмотрим случай, когда функторы U и U' контравариантны по первому аргументу, ковариантны по второму, точны слева и сбалансированы справа, а функторы V и V' ковариантны и точны соответственно слева и справа. В этом случае функтор T точен слева, контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму.

Прежде всего мы должны найти модули $R^p_{(1)} R^q_{(2)} T(A, C)$ и $R^q_{(2)} R^p_{(1)} T(A, C)$. Подставляя с этой целью в функтор T вместо модуля A его произвольную проективную резольвенту X, а вместо модуля C его произвольную инъективную резольвенту Y, мы получим двойной комплекс $T(X, Y)$, для которого

$$H^{p,q}_{\mathrm{II}}(T(X, Y)) = H^{p,q}_{\mathrm{II}}(U(X, V(Y))) = H^q(U(X_p, V(Y))) \approx$$
$$\approx U(X_p, H^q V(Y)) = U(X_p, R^q V(C)),$$

где изоморфизмом является отображение α', построенное, согласно предложению IV, 6.1a, для функтора $U(X_p, C)$ (этот функтор точен, ибо модуль X_p проективен, а функтор U сбалансирован справа). Следовательно,

$$H^{p,q}_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}(T(X, Y)) \approx R^p U(A, R^q V(C)).$$

Таким образом, имеет место спектральная последовательность

$$R^pU(A, R^qV(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} R^nT(A, C). \tag{2}$$

Совершенно аналогично получается спектральная последовательность

$$R^qU'(L_pV'(A), C) \underset{q}{\Longrightarrow} R^nT(A, C). \tag{3}$$

Для спектральных последовательностей (2) и (3) определены краевые гомоморфизмы:

$$R^n U(A, V(C)) \longrightarrow R^n T(A, C), \tag{4}$$

$$R^n U'(V'(A), C) \longrightarrow R^n T(A, C), \tag{5}$$

$$R^nT(A, C) \longrightarrow U(A, R^nV(C)), \tag{6}$$

$$R^nT(A, C) \longrightarrow U'(L_nV'(A), C). \tag{7}$$

Оказывается, что эти гомоморфизмы можно описать в явном виде; Во-первых, так как

$$R^nU(A, V(C)) = H^n(U(X, V(C))) = H^n(T(X, C)) = R^n_{(1)}T(A, C),$$

то в силу результатов § 1 гомоморфизм (4) совпадает с естественным гомоморфизмом $R^n_{(1)}T \to R^nT$. Аналогично гомоморфизм (5) можно отождествить с естественным гомоморфизмом $R^n_{(2)}T \to R^nT$.

Рассмотрим далее гомоморфизм

$$R^n U(A, V(C)) \longrightarrow U'(L_nV'(A), C), \tag{8}$$

являющийся композицией гомоморфизмов (4) и (7). Так как

$$R^n U(A, V(C)) = H^n(U(X, V(C))) = H^n(U'(V'(X), C)),$$

$$U'(L_n V'(A), C) = U'(H_n(V'(X)), C),$$

то, согласно предложению 2.1, гомоморфизм (8) совпадает с гомоморфизмом α', рассмотренным в предложении IV, 6.1a. Аналогично можно описать и композицию гомоморфизмов (5) и (6).

Заметим еще, что точные последовательности членов низшей степени, соответствующие спектральным последовательностям (2) и (3), имеют вид

$$\begin{aligned}(9)\ 0 \longrightarrow R^1U(A, V(C)) \longrightarrow R^1T(A, C) \longrightarrow U(A, R^1V(C)) \longrightarrow \\ \longrightarrow R^2U(A, V(C)) \longrightarrow R^2T(A, C);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10)\ 0 \longrightarrow R^1U'(V'(A), C) \longrightarrow R^1T(A, C) \longrightarrow U'(L_1V'(A), C) \longrightarrow \\ \longrightarrow R^2U'(V'(A), C) \longrightarrow R^2T(A, C).\end{aligned}$$

Кроме рассмотренного случая нам понадобится также случай, когда все функторы U, U', V и V' ковариантны и точны справа, причем функторы U и U' сбалансированы слева. В этом случае за

X и Y следует принять проективные резольвенты модулей A и C соответственно. Вместо последовательностей (2) и (3) мы получим при этом спектральные последовательности

(2a) $$L_p U(A, L_q V(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} L_n T(A, C),$$

(3a) $$L_q U'(L_p V'(A), C) \underset{q}{\Longrightarrow} L_n T(A, C),$$

а вместо гомоморфизмов (4)—(7) — краевые гомоморфизмы:

(4a) $$L_n T(A, C) \longrightarrow L_n U(A, V(C)),$$

(5a) $$L_n T(A, C) \longrightarrow L_n U'(V'(A), C),$$

(6a) $$U(A, L_n V(C)) \longrightarrow L_n T(A, C),$$

(7a) $$U'(L_n V'(A), C) \longrightarrow L_n T(A, C).$$

Эти гомоморфизмы вычисляются совершенно аналогичным способом. Точные последовательности членов низшей степени, соответствующие спектральным последовательностям (2a) и (3a), имеют в этом случае следующий вид:

(9a) $$L_2 T(A, C) \longrightarrow L_2 U(A, V(C)) \longrightarrow U(A, L_1 V(C)) \longrightarrow \\ \longrightarrow L_1 T(A, C) \longrightarrow L_1 U(A, V(C)) \longrightarrow 0,$$

(10a) $$L_2 T(A, C) \longrightarrow L_2 U'(V'(A), C) \longrightarrow U'(L_1 V'(A), C) \longrightarrow \\ \longrightarrow L_1 T(A, C) \longrightarrow L_1 U'(V'(A), C) \longrightarrow 0.$$

4. ФОРМУЛЫ АССОЦИАТИВНОСТИ

«Формулами ассоциативности» мы называем изоморфизмы, аналогичные рассмотренным в § II, 5 и IX, 2.

Сначала мы рассмотрим ситуацию, описываемую символом $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma, C_{\Gamma-\Sigma})$, где Λ, Γ и Σ — некоторые K-алгебры. Согласно предложению IX, 2.2, мы можем функтор

$$T(A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C))$$

отождествить с функтором $\mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C)$. Таким образом,

(1) $$T(A, C) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)) = \mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C),$$

т. е. мы находимся в ситуации, рассмотренной в предыдущем параграфе, причем

$$V(C) = \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C), \quad V'(A) = A \otimes_\Lambda B,$$

и, следовательно,

$$R^q V(C) = \mathrm{Ext}^q_\Sigma(B, C), \quad L_p V'(A) = \mathrm{Tor}^\Lambda_p(A, B).$$

Предполагая теперь, что алгебра Γ K-проективна, рассмотрим произвольную $\Lambda \otimes \Gamma$-проективную резольвенту X модуля A и произвольную $\Gamma \otimes \Sigma$-инъективную резольвенту Y модуля C. Так как, согласно следствиям IX, 2.4 и IX, 2.4a, комплекс X является также Λ-проективной резольвентой модуля A, а комплекс Y — Σ-инъективной резольвентой модуля C, то спектральные последовательности (2) и (3) из § 3 принимают в рассматриваемом случае следующий вид (алгебра Γ предполагается K-проективной):

(2) $$\operatorname{Ext}^p_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \operatorname{Ext}^q_\Sigma(B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} R^n T(A, C),$$

(3) $$\operatorname{Ext}^q_{\Gamma\otimes\Sigma}(\operatorname{Tor}^\Lambda_p(A, B), C) \underset{q}{\Longrightarrow} R^n T(A, C).$$

Если
$$\operatorname{Tor}^\Lambda_n(A, B) = 0 = \operatorname{Ext}^n_\Sigma(B, C) \text{ для всех } n > 0,$$

то спектральные последовательности (2) и (3) вырождаются и, следовательно,

(4) $$\operatorname{Ext}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A, \operatorname{Hom}_\Sigma(B, C)) \approx \operatorname{Ext}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C).$$

Это утверждение является обобщением теоремы IX, 2.8а.

При $A = \Lambda$ и $\Gamma = \Lambda^*$ спектральная последовательность (3) вырождается, а спектральная последовательность (2) принимает следующий вид:

(5) $$H^p(\Lambda, \operatorname{Ext}^q_\Sigma(B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_{\Lambda^*\otimes\Sigma}(B, C).$$

Здесь мы уже находимся в ситуации $({}_\Lambda B_\Sigma, {}_\Lambda C_\Sigma)$, причем алгебра Λ предполагается K-проективной. Факт существования спектральной последовательности (5) является обобщением предложения IX, 4.3.

Заменим теперь тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (K, Γ^e, Σ^e), а тройку (A, B, C) тройкой (Γ, Σ, C), где C — произвольный двусторонний $\Gamma \otimes \Sigma$-модуль. Если алгебра Γ K-проективна, то алгебра Γ^e также K-проективна, так что имеют место спектральные последовательности (2) и (3), которые в этом случае принимают следующий вид:

$$H^p(\Gamma, H^q(\Sigma, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} R^n T(\Gamma, C),$$

$$\operatorname{Ext}^q_{(\Gamma\otimes\Sigma)^e}(\operatorname{Tor}^K_p(\Gamma, \Sigma), C) \underset{q}{\Longrightarrow} R^n T(\Gamma, C).$$

Поскольку алгебра Γ K-проективна, вторая из этих спектральных последовательностей вырождается, так что

$$R^n T(\Gamma, C) \approx \operatorname{Ext}^n_{(\Gamma\otimes\Sigma)^e}(\Gamma \otimes \Sigma, C) = H^n(\Gamma \otimes \Sigma, C).$$

Таким образом, в предположении K-проективности алгебры Γ мы получаем спектральную последовательность

(6) $$H^p(\Gamma, H^q(\Sigma, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\Gamma \otimes \Sigma, C).$$

В силу теоремы X, 2.1 спектральная последовательность (6) имеет место также и в случае, когда Γ и Σ являются K-проективными дополненными K-алгебрами. Однако этот и даже более сильный результат можно получить непосредственно, полагая в спектральных последовательностях (2) и (3) $\Lambda = A = B = K$. В этом случае спектральная последовательность (3) вырождается, а спектральная последовательность (2) в предположении, что алгебра Γ K-проективна, принимает вид

(7) $$\operatorname{Ext}^p_\Gamma(K, \operatorname{Ext}^q_\Sigma(K, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_{\Gamma\otimes\Sigma}(K, C), \qquad {}_{\Gamma-\Sigma}C.$$

Аналогичные результаты имеют место и для групп гомологий. Действительно, рассмотрим ситуацию $(A_{\Lambda-\Gamma}, {}_\Lambda B_\Sigma, {}_{\Gamma-\Sigma}C)$. Согласно предложению IX, 2.1, функтор $T(A, C) = A \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma}(B \otimes_\Sigma C)$ мы можем отождествить с функтором $(A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Gamma\otimes\Sigma} C$. Таким образом,

(1а) $$T(A, C) = A \otimes_{\Lambda\otimes\Gamma}(B \otimes_\Sigma C) = (A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Gamma\otimes\Sigma} C.$$

Применяя к этому функтору результаты предыдущего параграфа, мы в предположении K-проективности алгебры Γ получим спектральные последовательности:

(2а) $$\operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Gamma}_p(A, \operatorname{Tor}^\Sigma_q(B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} L_nT(A, C),$$

(3а) $$\operatorname{Tor}^{\Gamma\otimes\Sigma}_q(\operatorname{Tor}^\Lambda_p(A, B), C) \underset{q}{\Longrightarrow} L_nT(A, C).$$

Если $\operatorname{Tor}^\Lambda_n(A, B) = 0 = \operatorname{Tor}^\Sigma_n(B, C)$ для всех $n > 0$, то спектральные последовательности (2а) и (3а) вырождаются, так что

(4а) $$\operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Gamma}(A, B \otimes_\Sigma C) \approx \operatorname{Tor}^{\Gamma\otimes\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C).$$

Это утверждение является обобщением теоремы IX, 2.8.

При $C = \Sigma$ и $\Gamma = \Sigma^*$ спектральная последовательность (2а) вырождается, а спектральная последовательность (3а) принимает следующий вид:

(5а) $$H_q(\Sigma, \operatorname{Tor}^\Lambda_p(A, B)) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Sigma^*}(A, B).$$

Здесь мы уже находимся в ситуации $({}_\Sigma A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Sigma)$, причем алгебра Σ предполагается K-проективной.

Заменим теперь тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (Λ^e, Γ^e, K), а тройку (A, B, C) тройкой (A, Λ, Γ), где A — произвольный двусторонний $\Lambda \otimes \Gamma$-модуль. В этом случае в предположении, что алгебра Γ K-проективна, спектральная последовательность (2а) вырождается, а спектральная последовательность (3а) принимает вид

(6а) $$H_q(\Gamma, H_p(\Lambda, A)) \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(\Lambda \otimes \Gamma, A).$$

Для дополненных алгебр в предположении, что алгебра Γ K-проективна, аналогично получается спектральная последовательность

(7а) $$\operatorname{Tor}^\Gamma_q(\operatorname{Tor}^\Lambda_p(A, K), K) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Gamma}_n(A, K), \qquad A_{\Lambda-\Gamma}.$$

5. ПРИМЕНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ О ЗАМЕНЕ КОЛЕЦ

Мы воспользуемся сейчас результатами § 4, чтобы получить более законченные результаты в вопросе о «замене колец», рассматривавшемся ранее в § II, 6 и VI, 4. Пусть

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$$

— произвольный гомоморфизм колец. Сохраняя обозначения, введенные в § II, 6, мы будем рассматривать кольца Λ и Γ как Z-алгебры.

Случай 1. $(A_\Lambda, {}_\Lambda\Gamma_\Gamma, {}_\Gamma C)$. Заменяя в формуле 4, (1a) тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (Λ, Z, Γ), мы получим, что

$$(1)_1 \qquad T(A, C) = A \otimes_\Lambda C = A_{(\varphi)} \otimes_\Gamma C.$$

Спектральная последовательность 4, (2a) для этого функтора вырождается в изоморфизм $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) \approx L_n T(A, C)$. Следовательно, спектральная последовательность 4, (3a) принимает вид

$$(2)_1 \qquad \operatorname{Tor}_q^\Gamma(\operatorname{Tor}_p^\Lambda(A, \Gamma), C) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C).$$

Соответствующими краевыми гомоморфизмами являются гомоморфизмы

$$(3)_1 \qquad \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A_{(\varphi)}, C),$$

$$(4)_1 \qquad \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, \Gamma) \otimes_\Gamma C \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C).$$

Гомоморфизм $(3)_1$ совпадает с гомоморфизмом $f_{1,n}$, рассмотренным в § VI, 4. Если $\operatorname{Tor}_p^\Lambda(A, \Gamma) = 0$ для всех $p > 0$, то спектральная последовательность $(2)_1$ вырождается и потому гомоморфизм $(3)_1$ является изоморфизмом. Таким образом, мы получили новое доказательство предложения VI, 4.1.1.

Случай 2. $(A_\Gamma, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda, {}_\Lambda C)$. Заменяя в формуле 4, (1a) тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (Γ, Z, Λ), мы получим, что

$$(1)_2 \qquad T(A, C) = A \otimes_\Gamma ({}_{(\varphi)}C) = A \otimes_\Lambda C.$$

Спектральная последовательность 4, (3a) для этого функтора вырождается в изоморфизм $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) \approx L_n T(A, C)$. Следовательно, спектральная последовательность 4, (2a) принимает вид

$$(2)_2 \qquad \operatorname{Tor}_p^\Gamma(A, \operatorname{Tor}_q^\Lambda(\Gamma, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C).$$

Соответствующими краевыми гомоморфизмами являются гомоморфизмы:

$$(3)_2 \qquad \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^\Gamma(A, {}_{(\varphi)}C),$$

$$(4)_2 \qquad A \otimes {}_\Gamma\operatorname{Tor}_n^\Lambda(\Gamma, C) \longrightarrow \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A, C).$$

Гомоморфизм $(3)_2$ совпадает с гомоморфизмом $f_{2,n}$, рассмотренным в § VI, 4. Если $\mathrm{Tor}_q^A(\Gamma, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность $(2)_2$ вырождается и потому гомоморфизм $(3)_2$ является изоморфизмом. Таким образом, мы получили новое доказательство предложения VI, 4.1.2.

Случай 3. $({}_A A, {}_\Gamma \Gamma_A, {}_\Gamma C)$. Заменяя в формуле 4, (1) тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (Λ^*, Z, Γ^*), мы получим, что

$$(1)_3 \qquad T(A, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma(A_{(\varphi)}, C).$$

Спектральная последовательность 4, (2) для этого функтора вырождается в изоморфизм $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \approx R^n T(A, C)$. Следовательно, спектральная последовательность 4, (3) принимает вид

$$(2)_3 \qquad \mathrm{Ext}_\Gamma^q(\mathrm{Tor}_p^A(\Gamma, A), C) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C).$$

Соответствующими краевыми гомоморфизмами являются гомоморфизмы

$$(3)_3 \qquad \mathrm{Ext}_\Gamma^n({}_{(\varphi)}A, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C),$$

$$(4)_3 \qquad \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Tor}_n^A(\Gamma, A), C).$$

Гомоморфизм $(3)_3$ совпадает с гомоморфизмом $f_{3,n}$, рассмотренным в § VI, 4. Если $\mathrm{Tor}_p^A(\Gamma, A) = 0$ для всех $p > 0$, то спектральная последовательность $(2)_3$ вырождается и потому гомоморфизм $(3)_3$ является изоморфизмом. Таким образом, мы получили новое доказательство предложения VI, 4.1.3.

Случай 4. $({}_\Gamma A, {}_\Lambda \Gamma_\Gamma, {}_\Lambda C)$. Заменяя в формуле 4, (1) тройку $(\Lambda, \Gamma, \Sigma)$ тройкой (Γ^*, Z, Λ^*), мы получим, что

$$(1)_4 \qquad T(A, C) = \mathrm{Hom}_\Gamma(A, {}^{(\varphi)}C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C).$$

Спектральная последовательность 4, (3) для этого функтора вырождается в изоморфизм $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \approx R^n T(A, C)$. Следовательно, спектральная последовательность 4, (2) принимает вид

$$(2)_4 \qquad \mathrm{Ext}_\Gamma^p(A, \mathrm{Ext}_\Lambda^q(\Gamma, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C).$$

Соответствующими краевыми гомоморфизмами являются гомоморфизмы

$$(3)_4 \qquad \mathrm{Ext}_\Gamma^n(A, {}^{(\varphi)}C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C),$$

$$(4)_4 \qquad \mathrm{Ext}_\Lambda^n(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(A, \mathrm{Ext}_\Lambda^n(\Gamma, C)).$$

Гомоморфизм $(3)_4$ совпадает с гомоморфизмом $f_{4,n}$, рассмотренным в § VI, 4. Если $\mathrm{Ext}_\Lambda^q(\Gamma, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность $(2)_4$ вырождается и потому гомоморфизм $(3)_4$ является изоморфизмом. Таким образом, мы получили новое доказательство предложения VI, 4.1.4.

6. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

Пусть

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$$

— некоторый гомоморфизм дополненных K-алгебр. Мы будем говорить, что гомоморфизм φ *нормален* (справа), если левый идеал $\Gamma \cdot I(\Lambda)$ алгебры Γ, порожденный образом при гомоморфизме φ пополняющего идеала $I(\Lambda)$, является также и правым идеалом. Таким образом, если гомоморфизм φ нормален, то $\Gamma \cdot I(\Lambda)$ представляет собой двусторонний идеал, содержащийся в пополняющем идеале $I(\Gamma)$. Следовательно, определена факторалгебра $\Gamma/\Gamma \cdot I(\Lambda)$, являющаяся дополненной K-алгеброй. Мы будем эту алгебру обозначать через $\Gamma//\varphi$. В силу точности последовательности $0 \to I(\Lambda) \to \Lambda \to K \to 0$ имеет место точная последовательность

$$\Gamma \otimes_\Lambda I(\Lambda) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes_\Lambda K \longrightarrow 0,$$

где алгебра Γ рассматривается как правый Λ-модуль. Так как $\Gamma \cdot I(\Lambda) = \operatorname{Im}(\Gamma \otimes_\Lambda I(\Lambda) \to \Gamma)$, то отсюда следует, что алгебру $\Gamma//\varphi$ можно определить также следующей формулой:

$$\Gamma//\varphi = \Gamma \otimes_\Lambda K.$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Если гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ нормален (справа), а алгебра Γ, рассматриваемая как правый Λ-модуль, Λ-проективна, то имеют место спектральные последовательности:*

(1) $$\operatorname{Ext}^p_\Omega(A, \operatorname{Ext}^q_\Lambda(K, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_\Gamma(A, C), \qquad ({}_\Omega A, {}_\Gamma C),$$

(1a) $$\operatorname{Tor}^\Omega_p(\operatorname{Tor}^\Lambda_q(A, K), C) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^\Gamma_n(A, C), \qquad (A_\Gamma, {}_\Omega C),$$

где $\Omega = \Gamma//\varphi$; операторы из алгебры Ω на группах $\operatorname{Ext}^q_\Lambda(K, C)$ и $\operatorname{Tor}^\Lambda_q(A, K)$ определяются ниже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ситуации

$$({}_\Omega A, {}_\Gamma\Omega_\Omega, {}_\Gamma C), \quad (A_\Gamma, {}_\Gamma\Omega_\Omega, {}_\Omega C), \qquad \Omega = \Gamma//\varphi.$$

К этим ситуациям можно применить результаты предыдущего параграфа (случаи 4 и 1), если за гомоморфизм φ принять естественный гомоморфизм $\psi : \Gamma \to \Omega$. Следовательно, имеют место спектральные последовательности $(2)_4$ и $(2)_1$, принимающие в рассматриваемом случае вид

(2) $$\operatorname{Ext}^p_\Omega(A, \operatorname{Ext}^q_\Gamma(\Omega, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_\Gamma(A, C),$$

(2a) $$\operatorname{Tor}^\Omega_p(\operatorname{Tor}^\Gamma_q(A, \Omega), C) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^\Gamma_n(A, C).$$

Так как алгебра Γ проективна как правый Λ-модуль, то в силу предложений VI, 4.1.3 и VI, 4.1.2

$$\operatorname{Ext}^q_\Gamma(\Omega, C) = \operatorname{Ext}^q_\Gamma(\Gamma \otimes_\Lambda K, C) \approx \operatorname{Ext}^q_\Lambda(K, C),$$
$$\operatorname{Tor}^\Gamma_q(A, \Omega) = \operatorname{Tor}^\Gamma_q(A, \Gamma \otimes_\Lambda K) \approx \operatorname{Tor}^\Lambda_q(A, K).$$

Тем самым на группе $\mathrm{Ext}^q_\Lambda(K, C)$ определяются левые, а на группе $\mathrm{Tor}^\Lambda_q(A, K)$ правые Ω-операторы. Произведя теперь соответствующие замены в спектральных последовательностях (2) и (2a), мы получим спектральные последовательности (1) и (1a).

В наиболее интересных приложениях алгебра Λ является подалгеброй алгебры Γ, а φ — отображением вложения. Мы будем называть подалгебру Λ *нормальной подалгеброй*, если соответствующее отображение вложения φ является нормальным гомоморфизмом. Вместо символа $\Gamma//\varphi$ мы будем в этом случае употреблять символ $\Gamma//\Lambda$.

Для произвольного нормального делителя π некоторой группы Π кольцо $Z(\pi)$ является подкольцом кольца $Z(\Pi)$, причем $Z(\Pi)\cdot I(\pi) = I(\pi)\cdot Z(\Pi)$ [ибо для любых элементов $x \in \Pi$, $y \in \pi$

$$x(y-1) = (xyx^{-1}-1)\,x, \quad (y-1)\,x = x(x^{-1}yx-1)\,].$$

Таким образом, $Z(\pi)$ является нормальной подалгеброй алгебры $Z(\Pi)$. Легко видеть, что $Z(\Pi)//Z(\pi) = Z(\Pi)\otimes_\pi Z = Z(\Pi/\pi)$. Так как алгебра $Z(\Pi)$ π-проективна, то применима теорема 6.1, согласно которой имеют место спектральные последовательности

(3) $$\mathrm{Ext}^p_{\Pi/\pi}(A, H^q(\pi, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_\Pi(A, C), \qquad ({}_{\Pi/\pi}A,\ {}_\Pi C),$$

(3a) $$\mathrm{Tor}^{\Pi/\pi}_p(H_q(\pi, A), C) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Tor}^\Pi_n(A, C), \qquad (A_\Pi,\ {}_{\Pi/\pi}C)$$

Полагая в спектральной последовательности (3) $A = Z$, а в спектральной последовательности (3a) $C = Z$, мы получим спектральные последовательности

(4) $$H^p(\Pi/\pi, H^q(\pi, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\Pi, C), \qquad {}_\Pi C,$$

(4a) $$H_p(\Pi/\pi, H_q(\pi, A)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(\Pi, A) \qquad A_\Pi.$$

Спектральная последовательность (4) впервые была построена Хохшильдом и Серром [Hochschild G., Serre J.-P., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 110—134].

В качестве второго примера рассмотрим произвольный идеал $\mathfrak{h}$ некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом K. Предполагая, что идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ K-свободны, положим

$$\Lambda = \mathfrak{h}^e, \quad \Gamma = \mathfrak{g}^e, \quad \Omega = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^e.$$

Пусть

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma, \quad \psi : \Gamma \longrightarrow \Omega$$

соответствующие естественные отображения.

Согласно предложению XIII, 4.1, алгебра Γ, рассматриваемая как правый Λ-модуль, свободна, а гомоморфизм φ является мономорфизмом и, следовательно, его можно рассматривать как отображение вложения. С другой стороны, согласно предложению XIII, 1.3, ядром эпиморфизма ψ служит левый идеал $\Gamma\cdot I(\Lambda)$ [совпадающий с правым идеалом $I(\Lambda)\cdot\Gamma$]. Таким образом, подалгебра Λ алгебры

Γ нормальна (слева и справа), причем $\Omega = \Gamma//\Lambda$. Следовательно, применима теорема 6.1, согласно которой имеют место спектральные последовательности

$$\mathrm{Ext}^p_\Omega(A, H^q(\mathfrak{h}, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_\Gamma(A, C), \qquad ({}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}A, {}_{\mathfrak{g}}C), \tag{5}$$

$$\mathrm{Tor}^\Omega_p(H_q(\mathfrak{h}, A), C) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Tor}^\Gamma_n(A, C), \qquad (A_{\mathfrak{g}}, {}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}C). \tag{5a}$$

Полагая в спектральной последовательности (5) $A = K$, а в спектральной последовательности (5а) $C=K$, мы получим спектральные последовательности

$$H^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^q(\mathfrak{h}, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\mathfrak{g}, C), \qquad {}_{\mathfrak{g}}C, \tag{6}$$

$$H_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H_q(\mathfrak{h}, A)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(\mathfrak{g}, A), \qquad A_{\mathfrak{g}}. \tag{6a}$$

Спектральная последовательность (6) впервые была построена Хохшильдом и Серром [Hochschild G., Serre J.-P., *Ann. of Math.*, 57 (1953), 591—603].

7. ФОРМУЛЫ АССОЦИАТИВНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ДИАГОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе мы будем рассматривать дополненную K-алгебру Λ вместе с диагональным отображением $D: \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ и антиподизмом $\omega: \Lambda \to \Lambda^*$, обладающими указанными в § XI, 8 свойствами (i)—(vi). В силу предложения XI, 8.1 мы в ситуации $({}_\Lambda A, {}_\Lambda B, {}_\Lambda C)$ можем функтор $T(A, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ отождествить с функтором $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C)$. Таким образом,

$$T(A, C) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}(B, C)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B, C). \tag{1}$$

Следовательно, согласно § 3, имеют место спектральные последовательности

$$\mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, \mathrm{Ext}^q(B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} R^nT(A, C), \tag{2}$$

$$\mathrm{Ext}^q_\Lambda(\mathrm{Tor}_p(A, B), C) \underset{q}{\Longrightarrow} R^nT(A, C). \tag{3}$$

Здесь группы $\mathrm{Ext}^q(B, C)$ и $\mathrm{Tor}_p(A, B)$ [т. е. группы $\mathrm{Ext}^q_K(B, C)$ и $\mathrm{Tor}^K_p(A, C)$], являющиеся соответственно левыми $\Lambda \otimes \Lambda^*$- и $\Lambda \otimes \Lambda$-модулями, мы определяем как левые Λ-модули с помощью отображений $E: \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda^*$ и $D: \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$.

Если $\mathrm{Tor}_p(A, B) = 0$ для всех $p > 0$, то спектральная последовательность (3) вырождается, а спектральная последовательность (2) принимает вид

$$\mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, \mathrm{Ext}^q(B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A \otimes B, C). \tag{4}$$

В частности, для $A = K$ получается спектральная последовательность

(5) $$\operatorname{Ext}^p_\Lambda (K, \operatorname{Ext}^q (B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_\Lambda (B, C).$$

Если теперь $\operatorname{Ext}^q (B, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность (5) вырождается в изоморфизм

(6) $$\operatorname{Ext}^n_\Lambda (K, \operatorname{Hom} (B, C)) \approx \operatorname{Ext}^n_\Lambda (B, C).$$

Аналогичные результаты можно получить и для групп гомологий. Рассмотрим в ситуации $(A_\Lambda, {}_\Lambda B, {}_\Lambda C)$ функтор

(1a) $$T(A, C) = A \otimes_\Lambda (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes_\Lambda C$$

(см. предложение XI, 8.1a). Ему соответствуют спектральные последовательности :

(2a) $$\operatorname{Tor}^\Lambda_p (A, \operatorname{Tor}_q (B, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} L_n T(A, C);$$

(3a) $$\operatorname{Tor}^\Lambda_q (\operatorname{Tor}_p (A, B), C) \underset{q}{\Longrightarrow} L_n T(A, C).$$

Если $\operatorname{Tor}_q (B, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность (2a) вырождается, а спектральная последовательность (3a) принимает вид

(4a) $$\operatorname{Tor}^\Lambda_q (\operatorname{Tor}_p (A, B), C) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^\Lambda_n (A, B \otimes C).$$

В частности, для $C = K$ получается спектральная последовательность

(5a) $$\operatorname{Tor}^\Lambda_q (\operatorname{Tor}_p (A, B), K) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Tor}^\Lambda_n (A, B).$$

Если теперь $\operatorname{Tor}_p (A, B) = 0$ для всех $p > 0$, то

(6a) $$\operatorname{Tor}^\Lambda_n (A \otimes B, K) \approx \operatorname{Tor}^\Lambda_n (A, B).$$

Результаты этого параграфа применимы, в частности, к алгебрам Ли и группам; следует лишь за алгебру Λ принять алгебры $\mathfrak{g}^e$ и $Z(\Pi)$ соответственно.

8. КОМПЛЕКСЫ НАД АЛГЕБРАМИ

Пусть Λ — произвольная K-проективная дополненная K-алгебра, и пусть C — положительно градуированный комплекс, однородными составляющими которого являются левые Λ-модули, а дифференциальным оператором — Λ-гомоморфизм. Применим к функтору

$$T(A, C) = \operatorname{Hom}_\Lambda (A, C),$$

где A — произвольный левый Λ-модуль, результаты § 2. Спектральные последовательности (4') и (5') из § 2 в рассматриваемом случае принимают следующий вид:

$$\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, H^q(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C),$$

$$H^q(\operatorname{Ext}^p_\Lambda(A, C)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(A, C).$$

Полагая $A = K$ и обозначая модуль $\mathcal{R}^n T(K, C)$ через $\mathcal{H}^n(\Lambda, C)$, мы получим, что

$$H^p(\Lambda, H^q(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^n(\Lambda, C), \tag{1}$$

$$H^q(H^p(\Lambda, C)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^n(\Lambda, C). \tag{2}$$

[Напомним, что, согласно определению функтора $\mathcal{R}^n T$,

$$\mathcal{H}^n(\Lambda, C) = H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C)),$$

где X — произвольная Λ-проективная резольвента кольца K, причем $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, C)$ рассматривается здесь как двойной комплекс.]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Если $H^q(C) = 0$ для всех $q > 0$, то имеет место спектральная последовательность*

$$H^q(H^p(\Lambda, C)) \underset{q}{\Longrightarrow} H^n(\Lambda, H^0(C)). \tag{3}$$

Действительно, в этом случае спектральная последовательность (1) вырождается в изоморфизм $\mathcal{H}^n(\Lambda, C) \approx H^n(\Lambda, H^0(C))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Если комплекс C слабо инъективен, то имеет место спектральная последовательность*

$$H^p(\Lambda, H^q(C)) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(K, C)). \tag{4}$$

Действительно, в этом случае $H^p(\Lambda, C) = 0$ для всех $p > 0$, так что спектральная последовательность (2) вырождается в изоморфизм $\mathcal{H}^n(\Lambda, C) \approx H^n(H^0(\Lambda, C)) = H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(K, C))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *При одновременном выполнении условий предложений 8.1 и 8.2 имеет место изоморфизм*

$$H^n(\Lambda, H^0(C)) \approx H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(K, C)). \tag{5}$$

Последний результат представляет собой некоторое обобщение обычного метода вычисления групп когомологий $H^n(\Lambda, H^0(C))$ с помощью инъективных резольвент модуля $H^0(C)$, поскольку комплекс C можно рассматривать как «слабо инъективную резольвенту» модуля $H^0(C)$.

Аналогичные результаты имеют место и для групп гомологий. Обозначая через A произвольный отрицательно градуированный правый Λ-комплекс, рассмотрим функтор

$$T(A, C) = A \otimes_\Lambda C,$$

где C — произвольный левый Λ-модуль. Полагая, в частности, $C = K$, мы получим спектральные последовательности

(1а) $$H_p(H_q(\Lambda, A)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathscr{H}_n(\Lambda, A),$$

(2а) $$H_q(\Lambda, H_p(A)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathscr{H}_n(\Lambda, A),$$

где

$$\mathscr{H}_n(\Lambda, A) = H_n(A \otimes_\Lambda X),$$

(X — произвольная Λ-проективная резольвента кольца K).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1а. *Если* $H_p(A) = 0$ *для всех* $p > 0$, *то имеет место спектральная последовательность*

(3а) $$H_p(H_q(\Lambda, A)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(\Lambda, H_0(A)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2а. *Если комплекс A слабо проективен, то имеет место спектральная последовательность*

(4а) $$H_q(\Lambda, H_p(A)) \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(A \otimes_\Lambda K).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3а. *При одновременном выполнении условий предложений* 8.1а *и* 8.2а *имеет место изоморфизм*

(5а) $$H_n(\Lambda, H_0(A)) \approx H_n(A \otimes_\Lambda K).$$

Применим теперь полученные результаты к случаю, когда $\Lambda = Z(\Pi)$, где Π — произвольная группа, рассматриваемая вместе с единичной пополняющей функцией. Пусть X — произвольный отрицательно градуированный Π-комплекс, т. е. Π-комплекс, для которого $X_n = 0$, когда $n < 0$ (в этом случае мы пользуемся нижними индексами).

ТЕОРЕМА 8.4. *Если комплекс X слабо проективен, то для любого левого Π-модуля C и любого правого Π-модуля A имеют место спектральные последовательности*

(6) $$H^p(\Pi, H^q(\mathrm{Hom}\,(X, C))) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\mathrm{Hom}_\Pi\,(X, C)),$$

(6а) $$H_p(\Pi, H_q(A \otimes X)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(A \otimes_\Pi X).$$

Напомним, что операторы $s \in \Pi$ на группах $\mathrm{Hom}\,(X, C)$ и $A \otimes X$ задаются следующими формулами:

$$(sf)\,x = s[f(s^{-1}x)], \quad (a \otimes x)\,s = as \otimes s^{-1}x.$$

Для доказательства теоремы 8.4 заметим, что, согласно предложению X, 8.5, модуль $\mathrm{Hom}\,(X, C)$ слабо инъективен, а модуль $A \otimes X$ слабо проективен. Следовательно, согласно предложениям 8.2 и 8.2а, имеют место спектральные последовательности

$$H^p(\Pi, H^q(\mathrm{Hom}\,(X, C))) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\mathrm{Hom}_\Pi\,(K, \mathrm{Hom}\,(X, C))),$$

$$H_p(\Pi, H_q(A \otimes X)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n((A \otimes X) \otimes_\Pi K).$$

Поэтому для завершения доказательства остается воспользоваться соотношениями ассоциативности

$$\mathrm{Hom}_{\Pi}(K, \mathrm{Hom}(X, C)) \approx \mathrm{Hom}_{\Pi}(X, C),$$
$$(A \otimes X) \otimes_{\Pi} K \approx A \otimes_{\Pi} X.$$

Спектральная последовательность (6) была впервые построена А. Картаном и Ж. Лере (Cartan H., Leray J., Colloque Topologie Algebrique, Paris, 1947, p. 83—85) для случая, когда группа Π конечна; для любой группы эта спектральная последовательность была построена А. Картаном [*C. R. Acad. Sci. Paris*, **226** (1948), 303—305].

В следующем параграфе мы укажем несколько важных приложений теоремы 8.4 к задачам топологии.

9. ПРИМЕНЕНИЯ К ТОПОЛОГИИ

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное топологическое пространство, в котором действует некоторая группа Π левых операторов. Мы будем предполагать, что группа Π состоит из *собственных* операторов, т. е. что каждая точка $x \in \mathcal{X}$ обладает такой окрестностью U, что

$$U \cap sU = \varnothing \text{ для всех } s \in \Pi, \ s \neq 1.$$

В частности, для любого элемента $s \neq 1$ отображение $s: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ не имеет неподвижных точек.

Отождествляя каждую точку x пространства $\mathcal{X}$ со всеми ее образами sx, $s \in \Pi$, мы получим некоторое новое пространство, которое будем обозначать через $\mathcal{X}_{\Pi}$. Если пространство $\mathcal{X}$ линейно связно, то оно будет регулярно накрывать пространство $\mathcal{X}_{\Pi}$, так что фундаментальную группу пространства $\mathcal{X}$ можно отождествить с некоторым нормальным делителем фундаментальной группы пространства $\mathcal{X}_{\Pi}$. При этом соответствующей факторгруппой является группа Π.

Пусть X — полный сингулярный комплекс пространства $\mathcal{X}$. Очевидно, что X можно рассматривать как левый Π-комплекс. Так как отличные от единицы элементы группы Π действуют на пространстве $\mathcal{X}$ без неподвижных точек, то комплекс X Π-свободен.

Для любого правого Π-модуля A и любого левого Π-модуля C рассмотрим группы гомологий и когомологий

$$H_n(\mathcal{X}; A) = H_n(A \otimes X), \quad H^n(\mathcal{X}; C) = H^n(\mathrm{Hom}(X, C)).$$

То обстоятельство, что группа Π является группой операторов групп A и C, в этом определении совершенно не используется. Однако задание Π-операторов в группах A и C (а также в комплексе X) позволяет рассматривать группу $H_n(\mathcal{X}; A)$ как правый, а группу $H^n(\mathcal{X}; C)$ как левый Π-модуль.

Модули A и C можно также рассматривать как системы локальных коэффициентов в пространстве $\mathscr{X}_\Pi$, что позволяет нам определить группы гомологий и когомологий

$$H_n(\mathscr{X}_\Pi;\ A),\quad H^n(\mathscr{X}_\Pi;\ C)$$

с локальными коэффициентами. Как хорошо известно, имеют место естественные изоморфизмы

$$H^n(\mathscr{X}_\Pi;\ C) \approx H^n(\mathrm{Hom}_\Pi(X, C)),$$
$$H_n(\mathscr{X}_\Pi;\ A) \approx H_n(A \otimes_\Pi X).$$

Следовательно, в силу теоремы 8.4 (эта теорема применима, так как комплекс X Π-свободен) имеют место спектральные последовательности

(1) $$H^p(\Pi, H^q(\mathscr{X};\ C)) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\mathscr{X}_\Pi;\ C),$$

(1a) $$H_p(\Pi, H_q(\mathscr{X};\ A)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(\mathscr{X}_\Pi;\ A).$$

Укажем теперь несколько примеров применения этих спектральных последовательностей.

Пример 1. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ линейно связно и что для некоторого натурального числа n

(2) $$H^q(\mathscr{X};\ C) = 0,\ \text{ если } 0 < q < n.$$

Тогда $H^0(\mathscr{X};\ C) = C$. Кроме того, согласно теореме XV, 5.12, спектральная последовательность (1) определяет изоморфизмы

(3) $$H^q(\mathscr{X}_\Pi;\ C) \approx H^q(\Pi, C), \qquad q < n,$$

и точную последовательность

(4) $$0 \longrightarrow H^n(\Pi, C) \longrightarrow H^n(\mathscr{X}_\Pi;\ C) \longrightarrow [H^n(\mathscr{X};\ C)]^\Pi \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(\Pi, C) \longrightarrow H^{n+1}(\mathscr{X}_\Pi;\ C).$$

Аналогичные результаты для групп гомологий получаются в предположении, что пространство $\mathscr{X}$ линейно связно и

(2a) $$H_q(\mathscr{X};\ A) = 0,\ \text{ если } 0 < q < n.$$

В этом случае $H_0(\mathscr{X};\ A) = A$ и, согласно теореме XV, 5.12a, имеют место изоморфизмы

(3a) $$H_q(\mathscr{X}_\Pi;\ A) \approx H_q(\Pi, A), \qquad q < n,$$

и точная последовательность

(4a) $$H_{n+1}(\mathscr{X}_\Pi;\ A) \longrightarrow H_{n+1}(\Pi, A) \longrightarrow [H_n(\mathscr{X};\ A)]_\Pi \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_n(\mathscr{X}_\Pi;\ A) \longrightarrow H_n(\Pi, A) \longrightarrow 0.$$

Полученные результаты содержат в себе в качестве частных случаев результаты Экмана [Eckmann B., *Comment. Math. Helv.*, 18 (1945), 232—282], Эйленберга и Маклейна [Eilenberg S., MacLane S., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29** (1943), 155—158; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 49—99; *Ann. of Math.*, **51** (1950), 514—533] и Хопфа [Hopf H., *Comment. Math. Helv.*, **17** (1944), 39—79]. Однако они не содержат результатов Эйленберга и Маклейна, связанных с инвариантом k^{n+1} (см. упражнение 8), который, в отличие от точных последовательностей (4) и (4а), позволяет полностью определить группы $H^n(\mathscr{X}_\Pi; C)$ и $H_n(\mathscr{X}_\Pi; A)$.

Пример 2. Предположим, что Π является бесконечной циклической группой с образующей s. В этом случае за Π-проективную резольвенту кольца Z можно принять точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z(\Pi) \xrightarrow{d} Z(\Pi) \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

в которой отображение d представляет собой умножение на элемент $s - 1$. Следовательно,

$$H^0(\Pi, C) = C^\Pi, \quad H^1(\Pi, C) = C_\Pi, \quad H^p(\Pi, C) = 0, \text{ если } p > 1,$$
$$H_0(\Pi, A) = A_\Pi, \quad H_1(\Pi, A) = A^\Pi, \quad H_p(\Pi, A) = 0, \text{ если } p > 1.$$

Поэтому в спектральных последовательностях (1) и (1а) равны нулю все члены, фильтрационная степень p которых отлична от нуля и единицы, т. е. эти спектральные последовательности принадлежат к типу, рассмотренному в случае E^k в § XV, 5 при $k = 0$. Следовательно, имеют место точные последовательности

$$0 \longrightarrow [H^{n-1}(\mathscr{X}; A)]_\Pi \longrightarrow H^n(\mathscr{X}_\Pi; A) \longrightarrow [H^n(\mathscr{X}; A)]^\Pi \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow [H_n(\mathscr{X}; A)]_\Pi \longrightarrow H_n(\mathscr{X}_\Pi; A) \longrightarrow [H_{n-1}(\mathscr{X}; A)]^\Pi \rightarrow 0.$$

Прямое доказательство этого утверждения дано Серром [Serre J.-P., *Ann. of Math.*, **54** (1951), 503][1].

Пример 3. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ является ацикличным n-мерным многообразием, т. е. n-мерным многообразием, для которого

$$H_0(\mathscr{X}; Z) = Z \text{ и } H_q(\mathscr{X}; Z) = 0 \text{ для всех } q > 0.$$

Примером такого многообразия служит n-мерное евклидово пространство. Из соотношений Кюннета (теоремы VI, 3.1 и VI, 3.1а) вытекает, что для любой группы коэффициентов

$$H^0(\mathscr{X}; C) = C, \quad H^q(\mathscr{X}; C) = 0 \text{ для всех } q > 0,$$
$$H_0(\mathscr{X}; A) = A, \quad H_q(\mathscr{X}; A) = 0 \text{ для всех } q > 0.$$

Эти соотношения можно также получить, учитывая, что сингулярный комплекс X многообразия $\mathscr{X}$ является Z-проективной резольвентой кольца Z.

---

[1] Русский перевод этой статьи Серра см. в сборнике «Расслоенные пространства», Изд. иностр. лит., М., 1958. — *Прим. ред.*

Таким образом, спектральные последовательности (1) и (1а) вырождаются и, следовательно, определяют изоморфизмы

$$H^p(\mathscr{X}_\Pi; C) \approx H^p(\Pi, C),$$
$$H_p(\mathscr{X}_\Pi; A) \approx H_p(\Pi, A).$$

Так как пространство $\mathscr{X}_\Pi$ является n-мерным многообразием, то $H^p(\mathscr{X}_\Pi; C) = 0$ для всех $p > n$. Следовательно, для любого модуля коэффициентов C

$$H^p(\Pi, C) = 0, \text{ если } p > n.$$

Но это означает, что (см. теорему X, 6.2)

$$\dim_{Z(\Pi)} Z = \dim Z(\Pi) \leq n.$$

Если, кроме того, пространство $\mathscr{X}_\Pi$ компактно, то $H^n(\Pi, Z_2) \approx \approx H^n(\mathscr{X}_\Pi; Z_2) \neq 0$ и, таким образом,

$$\dim_{Z(\Pi)} Z = \dim Z(\Pi) = n.$$

Полученные соотношения налагают весьма сильные ограничения на группы Π, которые могут быть группами собственных операторов многообразия $\mathscr{X}$. В частности, из этих ограничений вытекает, что такая группа Π (если только $\Pi \neq 1$) не может быть конечной (см. упражнение XII, 2).

Пример 4. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ является n-мерной сферой S^n. Так как это пространство компактно, а операторы из группы Π собственные, то группа Π может быть только конечной. Если число n четно, то в силу общеизвестной теоремы о неподвижной точке каждый отличный от тождественного оператор $s \in \Pi$ должен обращать ориентацию сферы S^n. Следовательно, в этом случае либо $\Pi = 1$, либо $\Pi = Z_2$. Исключая этот не слишком интересный случай, мы предположим, что число n *нечетно*. Тогда[1] каждый оператор $s \in \Pi$ должен сохранять ориентацию сферы S^n. Как известно,

$$H^q(S^n; C) = C, \text{ если } q = 0, n,$$
$$H_q(S^n; A) = A, \text{ если } q = 0, n,$$

а все остальные группы гомологий и когомологий равны нулю. Таким образом, в спектральных последовательностях (1) и (1а) равны нулю все члены, для которых $q \neq 0, n$. Следовательно, в силу теоремы XV, 5.11 имеют место точные последовательности

$$\ldots \to H^p(\Pi, C) \longrightarrow H^p(S^n_\Pi; C) \longrightarrow H^{p-n}(\Pi, C) \longrightarrow H^{p+1}(\Pi, C) \longrightarrow \ldots,$$
$$\ldots \to H_{p+1}(\Pi, A) \longrightarrow H_{p-n}(\Pi, A) \longrightarrow H_p(S^n_\Pi; A) \longrightarrow H_p(\Pi, A) \longrightarrow \ldots$$

[1] Это следует из формулы Лефшеца для алгебраического числа неподвижных точек (см., например, Зейферт Г. и Трельфалль В., Топология, ГОНТИ, М.–Л., 1938, стр. 331). — *Прим. ред.*

Так как пространство S^n_Π является n-мерным многообразием, то

$$H^p(S^n_\Pi; C) = 0 = H_p(S^n_\Pi; A) \text{ для всех } p > n,$$

и поэтому выписанные выше точные последовательности определяют изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^p(S^n_\Pi; C) &\approx H^p(\Pi, C), && 0 \le p < n, \\ H_p(S^n_\Pi; A) &\approx H_p(\Pi, A), && 0 \le p < n, \\ H^i(\Pi, C) &\approx H^{i+n+1}(\Pi, C), && i > 0, \\ H_i(\Pi, A) &\approx H_{i+n+1}(\Pi, A), && i > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь полную производную последовательность $\hat{H}^q(\Pi, C)$ группы Π в смысле § XII, 2. Так как имеет место естественный изоморфизм $\hat{H}^1(\Pi, C) \approx \hat{H}^{n+2}(\Pi, C)$, а функторы $\hat{H}^0$ и $\hat{H}^{n+1}$ являются левыми сателлитами функторов $\hat{H}^1$ и $\hat{H}^{n+2}$ соответственно, то $\hat{H}^0(\Pi, C) \approx \approx \hat{H}^{n+1}(\Pi, C)$. Таким образом, конечная группа Π имеет период $n+1$ (в смысле § XII, 11). Как мы видели в § XII, 11, это накладывает на группу Π довольно существенные ограничения. Вопрос, всякую ли конечную группу Π периода $n+1$ (где n нечетно) можно представить как группу собственных операторов n-мерной сферы S^n, остается пока открытым.

10. ФИНИТНЫЕ ГРУППЫ КОГОМОЛОГИЙ

Пусть Π — произвольная группа, X — некоторый отрицательно градуированный (левый) Π-комплекс (т. е. $X_n = 0$ для всех $n < 0$) и A — произвольная абелева группа. n-мерную коцепь $f: X_n \to A$ мы будем называть *Π-финитной* коцепью, если для любого элемента $x \in X_n$ элементы $f(sx)$ отличны от нуля лишь для конечного числа элементов $s \in \Pi$. Финитные коцепи составляют, очевидно, некоторый подкомплекс $\overline{\mathrm{Hom}}(X, A)$ комплекса $\mathrm{Hom}(X, A)$.

Сопоставим каждой Π-финитной коцепи $f: X_n \to A$ коцепь $f' \in \mathrm{Hom}_\Pi(X_n, Z(\Pi) \otimes A)$, положив

$$f'x = \sum_{x \in \Pi} s \otimes f(s^{-1}x).$$

Здесь тензорное произведение $Z(\Pi) \otimes A$ рассматривается как левый Π-модуль, на котором Π-операторы индуцируются Π-операторами модуля $Z(\Pi)$. Обратно, произвольная коцепь f' имеет вид $f'x = \sum_{x \in \Pi} s \otimes g(s, x)$ и, следовательно, определяет [по формуле $fx = g(1, x)$] некоторую Π-финитную коцепь f. Ясно, что построенное соответствие является изоморфизмом

$$\overline{\mathrm{Hom}}(X, A) \approx \mathrm{Hom}_\Pi(X, Z(\Pi) \otimes A). \tag{1}$$

Пусть теперь комплекс X является Π-проективной резольвентой кольца Z. Мы определим финитные группы когомологий $\bar{H}^n(\Pi, A)$, положив

$$\bar{H}^n(\Pi, A) = H^n(\overline{\mathrm{Hom}}\,(X, A)). \tag{2}$$

Впервые эти группы были введены Экманом [Eckmann B., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), 275—281, 372—376; **39** (1953), 35—42]. В силу соотношения (1)

$$\bar{H}^n(\Pi, A) \approx H^n(\Pi, Z(\Pi) \otimes A). \tag{3}$$

Таким образом, теория финитных групп когомологий сводится к теории обычных групп когомологий.

Рассмотрим теперь случай, когда X является не Π-проективной резольвентой кольца Z, а произвольным слабо проективным комплексом. В этом случае, согласно теореме 8.4, имеет место спектральная последовательность

$$H^p(\Pi, H^q(\mathrm{Hom}\,(X, Z(\Pi) \otimes A))) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(\overline{\mathrm{Hom}}\,(X, A)). \tag{4}$$

Предположим далее, что каждая однородная составляющая X_n комплекса X является Π-свободным модулем с *конечной* базой $\{\sigma_{n,\alpha}\}$. Тогда элементы $s\sigma_{n,\alpha}$, $s \in \Pi$, образуют некоторую Z-базу модуля X_n. Следовательно, коцепь $f: X_n \to A$ тогда и только тогда Π-финитна, когда элементы $f(s\sigma_{n,\alpha})$ отличны от нуля лишь для конечного числа пар (s, α). Таким образом, Π-финитные коцепи являются не чем иным, как конечными коцепями комплекса X, рассматриваемого как клеточный комплекс с клетками $s\sigma_{n,\alpha}$. Следовательно, спектральную последовательность (4) можно представить в виде

$$H^p(\Pi, H^q(\mathrm{Hom}\,(X, Z(\Pi) \otimes A))) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}^n(X, A), \tag{4'}$$

где $\mathfrak{H}^n(X, A)$ — n-мерная группа когомологий комплекса X, построенная на *конечных коцепях*.

Эти результаты можно применить в следующей топологической ситуации. Пусть для топологического пространства $\mathcal{X}$ с группой Π как группой левых операторов задано такое его клеточное разбиение, инвариантное относительно операторов из группы Π, что при любом отличном от тождественного преобразовании из группы Π ни одна из клеток этого разбиения не отображается в себя. Предположим, кроме того, что пространство $\mathcal{X}_\Pi$ компактно. Тогда каждая однородная составляющая X_n Π-комплекса X, состоящего из цепей клеточного разбиения пространства $\mathcal{X}$, является свободным Π-модулем с конечной базой. Соответствующая группа когомологий $\mathfrak{H}^n(X, A)$, построенная на конечных коцепях, как известно, не зависит от выбора клеточного разбиения; она обычно обозначается через $\mathfrak{H}^n(\mathcal{X}; A)$ и называется «группой когомологий пространства $\mathcal{X}$

с компактными носителями». Спектральная последовательность (4′) для этой группы имеет вид

$$(4'') \qquad H^p(\Pi; H^q(\mathcal{X}, Z(\Pi) \otimes A)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}^n(\mathcal{X}; A).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В ситуации $({}_{\Lambda-\Sigma}A, B_{\Gamma-\Sigma}, {}_{\Lambda}C_{\Gamma})$, где Λ, Γ и Σ — произвольные K-алгебры, определить изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Sigma}(A, \mathrm{Hom}_{\Gamma}(B, C)) \approx \mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(B, \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, C))$$

и построить соответствующие спектральные последовательности.

2. Показать, что определенный в § VI, 5 гомоморфизм ϱ является краевым гомоморфизмом одной из спектральных последовательностей, построенных в § 4. Используя этот факт, обобщить предложение VI, 5.1.

3. Показать, что определенные в § XI, 9 гомоморфизмы $\smile j$ и $\frown j$ являются краевыми гомоморфизмами соответствующих спектральных последовательностей, построенных в § 7. Используя этот факт, обобщить предложение XI, 9.2.

4. Используя построенные в § 4 спектральные последовательности и результат упражнения 1, дать новые доказательства предложений VI, 3.5 и VI, 3.5а, а также новое решение упражнения VI, 14.

5. Пусть $\varphi: \Lambda \to \Gamma$ — некоторый гомоморфизм колец, а A — произвольный левый Γ-модуль. Показать, что

$$\text{l. w. dim}_\Lambda A \leq \text{l. w. dim}_\Lambda \Gamma + \text{l. w. dim}_\Gamma A,$$

$$\text{l. inj. dim}_\Lambda A \leq \text{r. w. dim}_\Lambda \Gamma + \text{l. inj. dim}_\Gamma A,$$

$$\text{l. dim}_\Lambda A \leq \text{l. dim}_\Lambda \Gamma + \text{l. dim}_\Gamma A.$$

6. Пусть Λ — произвольная K-проективная дополненная алгебра, а C — некоторый положительно градуированный комплекс, однородными составляющими которого являются левые Λ-модули, а дифференциальным оператором — Λ-гомоморфизм. Предполагая, что

$$H^q(C) = 0, \text{ если } 0 < q < n,$$

построить точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^n(\Lambda, H^0(C)) \longrightarrow \mathscr{H}^n(\Lambda, C) \longrightarrow H^0(\Lambda, H^n(C)) \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} H^{n+1}(\Lambda, H^0(C)) \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}(\Lambda, C).$$

[Указание: использовать спектральную последовательность 8, (1).] Сформулировать двойственный результат.

7. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ — две n-мерные сферы (где n нечетно), на которых действует группа Π операторов, являющаяся циклической группой порядка p (где p — простое нечетное число), и пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ — некоторое непрерывное отображение, согласованное с операторами из группы Π. Используя результат упражнения 6, построить коммутативную диаграмму

$$(\varDelta)\qquad \begin{array}{ccc} H^n(\mathscr{X}'; Z_p) & \xrightarrow{\varphi'} & H^{n+1}(\Pi, H^0(\mathscr{X}'; Z_p)) \\ \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} \\ H^n(\mathscr{X}; Z_p) & \xrightarrow{\varphi} & H^{n+1}(\Pi, H^0(\mathscr{X}; Z_p)) \end{array}$$

Предполагая далее, что операторы из группы Π на сфере $\mathscr{X}$ собственные, используя равенство $H^{n+1}(\mathscr{X}_\Pi; Z_p) = 0$ и результат упражнения 6 [или точную последовательность (4) из § 9], доказать, что гомоморфизм φ является изоморфизмом. Опираясь на диаграмму $(\varDelta)$, показать, что гомоморфизм f^n не зависит от выбора отображения f, т. е. что «степени» любых двух отображений $\mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ (согласованных с операторами из группы Π) сравнимы по модулю p.

8. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное связное топологическое пространство, в котором действует группа операторов Π, и пусть X — сингулярный комплекс пространства $\mathscr{X}$. Предполагая, что

$$H_q(\mathscr{X}) = 0, \text{ если } 0 < q < n,$$

показать, что

$$H^q(\mathrm{Hom}_Z(X, H_n(\mathscr{X}))) = 0, \qquad 0 < q < n,$$

$$H^n(\mathrm{Hom}_Z(X, H_n(\mathscr{X}))) = \mathrm{Hom}_Z(H_n(\mathscr{X}), H_n(\mathscr{X})).$$

Используя результат упражнения 6, определить гомоморфизм

$$\varphi: \mathrm{Hom}_\Pi(H_n(\mathscr{X}), H_n(\mathscr{X})) \longrightarrow H^{n+1}(\Pi, H_n(\mathscr{X})).$$

Элемент $\varphi(i)$, где i — тождественное отображение $H_n(\mathscr{X}) \to H_n(\mathscr{X})$, называется инвариантом Эйленберга — Маклейна

$$k^{n+1} \in H^{n-1}(\Pi, H_n(\mathscr{X})).$$

Пусть теперь $\mathscr{X}'$ — другое топологическое пространство с той же группой операторов Π, обладающее теми же свойствами, что и пространство $\mathscr{X}$, и пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ — произвольное непрерывное отображение, согласованное с операторами из группы Π. Показать, что при соответствующем гомоморфизме групп когомологий

$$H^{n+1}(\Pi, H_n(\mathscr{X})) \longrightarrow H^{n+1}(\Pi, H_n(\mathscr{X}'))$$

инвариант k^{n+1} пространства $\mathscr{X}$ переходит в инвариант k'^{n+1} пространства $\mathscr{X}'$.

Используя инвариант k^{n+1}, дать другое доказательство последнего утверждения упражнения 7.

ГЛАВА XVII

ГИПЕРГОМОЛОГИИ

Введение. В этой главе понятие резольвенты переносится с модулей на произвольные комплексы. Пусть A — произвольный комплекс и X — некоторая его резольвента (являющаяся, по определению, двойным комплексом). Оказывается, что для любого функтора T одного аргумента инварианты двойного комплекса $T(X)$ не зависят от выбора резольвенты X и являются «гипергомологическими инвариантами» комплекса $T(A)$. На этом пути мы получаем, в частности, две спектральные последовательности с одним и тем же «пределом», начальные члены E_2 которых имеют вид

$$H^p(R^q T(A)) \text{ и } (R^q T)(H^p(A)).$$

Аналогичные результаты справедливы и для функторов любого числа аргументов.

Строящиеся в этой главе спектральные последовательности можно рассматривать как наиболее далеко идущее обобщение соотношений Кюннета (см. § IV, 8 и VI, 3).

1. РЕЗОЛЬВЕНТЫ КОМПЛЕКСОВ

В этой главе предполагается, что все рассматриваемые модули, комплексы и двойные комплексы имеют один и тот же «тип»[1]. Для упрощения формулировок мы будем для любого двойного комплекса A и любого целого числа p обозначать через $A^{p,*}$ комплекс B, однородными составляющими которого являются модули $B^q = A^{p,q}$, а дифференциальным оператором — второй дифференциальный оператор d_2 комплекса A. Аналогично через $A^{*,q}$ мы будем обозначать комплекс C, однородными составляющими которого являются модули $C^p = A^{p,q}$, а дифференциальным оператором — первый дифференциальный оператор d_1 комплекса A. Комплекс $A^{p,*}$ мы будем называть p-й *строкой*, а комплекс $A^{*,q}$ q-м *столбцом* двойного комплекса A. Заметим, что дифференциальные операторы комплекса A можно рассматривать как отображения

$$A^{p,*} \to A^{p+1,*}, \quad A^{*,q} \to A^{*,q+1}.$$

[1] То есть все они либо левые, либо правые, либо двусторонние.— *Прим. ред*

Согласно § XV, 6, любой двойной комплекс A определяет два двойных комплекса $H_{\mathrm{I}}(A)$ и $H_{\mathrm{II}}(A)$. Двойной комплекс $H_{\mathrm{I}}(A)$ представляет собой модуль гомологий двойного комплекса A относительно его первого дифференциального оператора. Первый дифференциальный оператор двойного комплекса $H_{\mathrm{I}}(A)$ равен нулю, а второй дифференциальный оператор индуцируется вторым дифференциальным оператором d_2 двойного комплекса A. Двойной комплекс $H_{\mathrm{II}}(A)$ определяется аналогично. Очевидно, что

$$H_{\mathrm{II}}^{p,*}(A) = H(A^{p,*}), \quad H_{\mathrm{I}}^{*,q}(A) = H(A^{*,q}).$$

Подобным же образом мы можем определить двойные комплексы

$$B_{\mathrm{I}}(A), \quad B'_{\mathrm{I}}(A), \quad Z_{\mathrm{I}}(A), \quad Z'_{\mathrm{I}}(A)$$

и аналогичные им двойные комплексы с индексом II.

В § V, 1 мы условились произвольный модуль A рассматривать как комплекс, для которого $A^0 = A$ и $A^n = 0$, если $n \neq 0$. Подобным же образом произвольный комплекс A можно рассматривать как двойной комплекс, для которого $A^{p,0} = A^p$ и $A^{p,q} = 0$, если $q \neq 0$. Другими словами $A^{*,0} = A$, т. е. данный комплекс является нулевым столбцом соответствующего двойного комплекса.

Пусть A — произвольный комплекс. *Левым двойным комплексом X над комплексом A* мы будем называть двойной комплекс X, для которого $X^{p,q} = 0$, если $q > 0$, рассматриваемый вместе с некоторым пополняющим отображением $\varepsilon : X \to A$, т. е. с таким отображением $\varepsilon : X^{*,0} \to A$, что композиция $X^{*,-1} \to X^{*,0} \to A$ равна нулю.

Пусть $f : A \to A'$ — произвольное отображение комплексов, а X и X' — некоторые левые двойные комплексы над комплексами A и A' с пополняющими отображениями ε и ε' соответственно. Мы будем говорить, что отображение двойных комплексов $F : X \to X'$ *построено над отображением* f, если $\varepsilon' F = f\varepsilon$.

Каждый левый двойной комплекс X над комплексом A определяет левые комплексы:

$(1)_p$ $\quad X^{p,*}$ над модулем A^p ;

$(2)_p$ $\quad Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(X)$ над модулем $Z^p(A)$;

$(3)_p$ $\quad Z_{\mathrm{I}}'^{p,*}(X)$ над модулем $Z'^p(A)$;

$(4)_p$ $\quad B_{\mathrm{I}}^{p,*}(X)$ над модулем $B^p(A)$;

$(5)_p$ $\quad B_{\mathrm{I}}'^{p,*}(X)$ над модулем $B'^p(A)$;

$(6)_p$ $\quad H_{\mathrm{I}}^{p,*}(X)$ над модулем $H^p(A)$.

Мы будем говорить, что левый двойной комплекс X является *проективной резольвентой комплекса A*, если для любого p комплексы $(1)_p$—$(6)_p$ являются проективными резольвентами соответствующих модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если для всех p комплексы $(4)_p$ и $(6)_p$ являются проективными резольвентами, то двойной комплекс X является проективной резольвентой комплекса A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплекс $(5)_p$ является проективной резольвентой, ибо он естественно изоморфен комплексу $(4)_{p+1}$. Далее, применяя предложение V, 2.1 к точным последовательностям

$$\longrightarrow (4)_p \longrightarrow (2)_p \longrightarrow (6)_p \longrightarrow 0 \text{ и } 0 \longrightarrow (6)_p \longrightarrow (3)_p \longrightarrow (5)_p \longrightarrow 0,$$

мы получим, что проективными резольвентами являются и комплексы $(2)_p$, $(3)_p$. Наконец, в силу точности последовательности $0 \to (4)_p \to (1)_p \to (3)_p \to 0$ комплекс $(1)_p$ также будет проективной резольвентой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для любого комплекса существует по крайней мере одна проективная резольвента. Для любых проективных резольвент X и Y комплексов A и C соответственно существует над произвольным отображением $f: A \to C$ по крайней мере одно отображение $F: X \to Y$. Отображения $F, G: X \to Y$ над гомотопными отображениями $f, g: A \to C$ гомотопны (в смысле* § IV, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — произвольный комплекс. Для каждого целого числа p рассмотрим произвольные проективные резольвенты $X^{p,B}$ и $X^{p,H}$ модулей $B^p(A)$ и $H^p(A)$ соответственно. Согласно предложению V, 2.2, для любого p существует по крайней мере одна точная последовательность

$$0 \longrightarrow X^{p,B} \longrightarrow X^{p,Z} \longrightarrow X^{p,H} \longrightarrow 0,$$

где $X^{p,Z}$ — некоторая проективная резольвента модуля $Z^p(A)$, а следовательно, и точная последовательность

$$0 \longrightarrow X^{p,Z} \longrightarrow X^{p,A} \longrightarrow X^{p+1,B} \longrightarrow 0,$$

где $X^{p,A}$ — некоторая проективная резольвента модуля A^p.

Рассмотрим теперь дважды градуированный модуль X, строками которого являются градуированные модули $X^{p,A}$. Этот модуль мы определим как двойной комплекс, принимая за первый дифференциальный оператор d_1 на строке $X^{p,A}$ сквозное отображение

$$X^{p,A} \longrightarrow X^{p+1,B} \longrightarrow X^{p+1,Z} \longrightarrow X^{p+1,A},$$

а за второй дифференциальный оператор d_2 — отображение, совпадающее вдоль строки $X^{p,A}$ с дифференциальным оператором комплекса $X^{p,A}$, взятым со знаком $(-1)^p$. Очевидно, что $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$, так что X действительно является двойным комплексом. Пополняющее отображение $X \to A$ определяется пополняющими отображениями $X^{p,A} \to A^p$. Так как комплексы $B_{\mathrm{I}}^{p,*}(X)$ и $H_{\mathrm{I}}^{p,*}(X)$, соответствующие двойному комплексу X, изоморфны комплексам $X^{p,B}$ и $X^{p,H}$, то, согласно предложению 1.1, двойной комплекс X является проективной резольвентой комплекса A.

Пусть теперь X и Y — произвольные проективные резольвенты комплексов A и C соответственно, а $f: A \to C$ — некоторое отображение комплекса A в комплекс C. Рассмотрим гомоморфизмы

$$f^{p,B}: B^p(A) \longrightarrow B^p(C), \quad f^{p,Z}: Z^p(A) \longrightarrow Z^p(C), \quad f^{p,H}: H^p(A) \longrightarrow H^p(C),$$

индуцированные отображением f. Согласно предложению V, 1.2, над гомоморфизмами $f^{p,B}$ и $f^{p,H}$ существуют некоторые отображения

$$F^{p,B} : B_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) \longrightarrow B_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y), \quad F^{p,H} : H_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) \longrightarrow H_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y),$$

а, следовательно, согласно предложению V, 2.3, над гомоморфизмом $f^{p,Z}$ существует такое отображение

$$F^{p,Z} : Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) \longrightarrow Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y),$$

что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) & \longrightarrow & Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) & \longrightarrow & H_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y) & \longrightarrow & Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y) & \longrightarrow & H_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Применяя еще раз предложение V, 2.3, мы над гомоморфизмом f^p получим такое отображение

$$F^{p,*} : X^{p,*} \to Y^{p,*},$$

что будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(X) & \longrightarrow & X^{p,*} & \longrightarrow & B_{\mathrm{I}}^{p-1,*}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{\mathrm{I}}^{p,*}(Y) & \longrightarrow & Y^{p,*} & \longrightarrow & B_{\mathrm{I}}^{p-1,*}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

а потому и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^{p,*} & \xrightarrow{d_1} & X^{p-1,*} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F^{p,*}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F^{p-1,*}} \\ Y^{p,*} & \xrightarrow[d_1]{} & Y^{p-1,*} \end{array}$$

Таким образом, отображения $F^{p,*}$ определяют некоторое отображение $F : X \to Y$ над отображением f.

Пусть, наконец, $F, G : X \to Y$ — произвольные отображения, построенные над отображениями $f, g : A \to C$ соответственно, и пусть $s : f \simeq g$. Согласно предложению V, 1.2, над гомоморфизмом $s^p : A^p \to C^{p-1}$ существует хотя бы одно отображение $S^{p,*} : X^{p,*} \to Y^{p-1,*}$. Отображения $S^{p,q}$ определяют некоторый гомоморфизм $S : X \to Y$ двойной степени $(-1, 0)$, коммутирующий с пополняющими отображениями и антикоммутирующий со вторыми дифференциальными операторами. Пусть

$$J = F + d_1S + Sd_1.$$

Легко видеть, что гомоморфизм $J : X \to Y$ является отображением двойных комплексов над отображением g, причем пара $(S, 0)$ является гомотопией $F \simeq J$. Таким образом, остается лишь показать, что отображения G и J, построенные над одним и тем же отображением g, гомотопны между собой.

Каждую строку $X^{p,*}$, $Y^{p,*}$, $B_I^{p,*}(X)$ и т. д. мы будем рассматривать как комплекс, дифференциальным оператором которого является отображение $(-1)^p d_2$. Согласно предложению V, 1.2, существуют некоторые гомотопии

$$T^{p,B}: J^{p,B} \simeq G^{p,B}, \quad T^{p,H}: J^{p,H} \simeq G^{p,H},$$

и, следовательно, согласно предложению V, 2.3, существует перестановочная с этими гомотопиями гомотопия

$$T^{p,Z}: J^{p,Z} \simeq G^{p,Z},$$

а потому и гомотопия

$$T^{p,*}: J^{p,*} \simeq G^{p,*},$$

перестановочная с гомотопиями $T^{p,B}$, $T^{p,H}$ и $T^{p,Z}$. Отображения $(-1)^p T^{p,*}$ определяют, очевидно, гомоморфизм $T: X \to Y$ двойной степени $(0, -1)$, для которого

$$d_1 T + T d_1 = 0, \quad d_2 T + T d_2 = G - J.$$

Таким образом, пара $(0, T)$ является гомотопией $J \simeq G$. Тем самым предложение 1.2 полностью доказано.

Правым двойным комплексом над комплексом A называется двойной комплекс X, для которого $X^{p,q} = 0$, если $q < 0$, рассматриваемый вместе с некоторым пополняющим отображением $\varepsilon: A \to X$. Читателю предлагается ввести понятие инъективной резольвенты произвольного комплекса A, а также сформулировать и доказать аналог предложения 1.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Для любого комплекса A, для которого $A^n = 0$, если $n \in N$, где N — некоторое множество целых чисел, существуют такая проективная резольвента X и такая инъективная резольвента Y, что $X^{n,q} = 0$ и $Y^{n,q} = 0$ для всех q и всех $n \in N$.*

Непосредственно следует из построения резольвенты X, описанного в доказательстве предложения 1.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть Λ — такое кольцо, что для некоторого целого числа n функтор $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}$ равен нулю. Тогда для любого Λ-комплекса A существуют такая проективная резольвента X и такая инъективная резольвента Y, что $X^{p,q} = 0$ и $Y^{p,q} = 0$, когда $|q| > n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1} = 0$, то, согласно предложениям VI, 2.1 и VI, 2.1a, проективная (и инъективная) размерность любого Λ-модуля не превосходит n. Следовательно, для любого Λ-модуля существуют проективные и инъективные резольвенты размерности, не превосходящей n. Предложение 1.4 вытекает отсюда непосредственно (см. метод построения резольвент, указанный в доказательстве предложения 1.2).

2. ИНВАРИАНТЫ

Рассмотрим произвольный (аддитивный) функтор $T(A, C)$, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C [значениями аргумента A считаются Λ_1-модули, значениями аргумента C — Λ_2-модули, а значениями функтора $T(A, C)$ — Λ-модули].

Пусть A — произвольный Λ_1-комплекс, C — произвольный Λ_2-комплекс, X — инъективная резольвента комплекса A и Y — проективная резольвента комплекса C. Тогда определен четырехкратный комплекс $T(X, Y)$. Перейдем от этого четырехкратного комплекса к двойному комплексу, группируя (см. § IV, 4) первый индекс с третьим, а второй с четвертым. Таким образом,

$$T^{p,q}(X, Y) = \sum T(X^{p_1,q_1}, Y_{p_2,q_2}), \qquad p_1 + p_2 = p,\ q_1 + q_2 = q.$$

Дифференциальные операторы δ_1 и δ_2 двойного комплекса $T(X, Y)$ на подмодуле $T(X^{p_1,q_1}, Y_{p_2,q_2})$ задаются формулами

$$\delta_1 = T(d_1, Y_{p_2,q_2}) + T(X^{p_1,q_1}, d_1),$$
$$\delta_2 = T(d_2, Y_{p_2,q_2}) + T(X^{p_1,q_1}, d_2).$$

Оказывается, что инварианты двойного комплекса $T(X, Y)$, т. е. градуированный модуль $\sum H^n(T(X, Y))$, две его фильтрации и две спектральные последовательности, соответствующие этим фильтрациям[1], не зависят от выбора резольвент комплексов A и C. Эти инварианты мы будем называть «когомологическими инвариантами функтора T и комплексов A и C» или, допуская некоторую двусмысленность, «когомологическими инвариантами двойного комплекса $T(A, C)$». Модуль $H^n(T(X, Y))$ мы будем обозначать через $\mathcal{R}^n T(A, C)$ и называть *n-м модулем гиперкогомологий комплекса* $T(A, C)$.

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим, наряду с комплексами A, C и резольвентами X, Y, некоторые другие комплексы A', C' и их резольвенты X', Y'. Как мы знаем, для любых отображений $f, f_1 : A \to A'$ и $g, g_1 : C' \to C$ существуют отображения $F, F_1 : X \to X'$ и $G, G_1 : Y' \to Y$ над отображениями f, f_1 и g, g_1 соответственно. Эти отображения индуцируют отображения $J = T(F, G)$ и $J_1 = T(F_1, G_1)$ двойного комплекса $T(X, Y)$ в двойной комплекс $T(X', Y')$, которые в свою очередь индуцируют отображения инвариантов этих двойных комплексов. Если $f \simeq f_1$ и $g \simeq g_1$, то, согласно предложению 1.2, $F \simeq F_1$ и $G \simeq G_1$ и, следовательно, $J \simeq J_1$ (см. § IV, 5). Поэтому, согласно предложению XV, 6.1, отображения J и J_1 индуцируют одно и то же отображение инвариантов двойного комплекса $T(X, Y)$ в соответствующие инварианты двойного комплекса $T(X', Y')$.

---

[1] Точнее, соответствующие двум фильтрациям двойного комплекса $T(X, Y)$. — *Прим. перев.*

Из сказанного непосредственно вытекает, что когомологические инварианты двойного комплекса $T(A, C)$ не зависят от выбора резольвент комплексов A и C. Кроме того, мы видим, что произвольные отображения $f: A \to A'$ и $g: C' \to C$ индуцируют некоторое (однозначно определенное) отображение когомологических инвариантов двойного комплекса $T(A, C)$ в когомологические инварианты двойного комплекса $T(A', C')$, причем гомотопные отображения $f \simeq f_1$, $g \simeq g_1$ индуцируют одно и то же отображение инвариантов. Таким образом, когомологические инварианты двойного комплекса $T(A, C)$ представляют собой некоторые инвариантные относительно гомотопий функторы, ковариантные по аргументу A и контравариантные по аргументу C.

Вычислим теперь начальные члены $\mathrm{I}_2^{p,q}$ и $\mathrm{II}_2^{p,q}$ спектральных последовательностей, соответствующих двойному комплексу $T(A, C)$. Согласно § XV, 6, вычисление этих членов сводится к вычислению дважды градуированных модулей

$$H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}(T(X, Y)), \quad H_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{I}}(T(X, Y)),$$

где X — произвольная инъективная резольвента комплекса A, а Y — произвольная проективная резольвента комплекса C.

Начнем с вычисления двойного комплекса $H_{\mathrm{II}}(T(X, Y))$. Так как этот комплекс определяется с помощью второго дифференциального оператора, то при его вычислении мы можем зафиксировать некоторую строку $X^{p_1,*}$ комплекса X и некоторую строку $Y_{p_2,*}$ комплекса Y. При этом

$$H_{\mathrm{II}}^{p,q}(T(X, Y)) = \sum_{p_1+p_2=p} H^q(T(X^{p_1,*}, Y_{p_2,*})).$$

С другой стороны, так как строка $X^{r,*}$ является инъективной резольвентой модуля A^r, а строка $Y_{s,*}$ — проективной резольвентой модуля C_s, то

$$H^q(T(X^{p_1,*}, Y_{p_2,*})) = R^q T(A^{p_1}, C_{p_2}).$$

Таким образом,

$$(1) \qquad H_{\mathrm{II}}^{p,q}(T(X, Y)) = \sum_{p_1+p_2=p} R^q\, T(A_{p_1}, C_{p_2}),$$

то есть

$$(1') \qquad H_{\mathrm{II}}^{*,q} = R^q\, T(A, C).$$

Дифференциальные операторы обеих частей равенства (1′), очевидно, также совпадают. Следовательно,

$$(2) \qquad \mathrm{I}_2^{p,q} = H^q(R^p\, T(A, C)),$$

ибо модуль $H^p(H_{\mathrm{II}}^{*,q})$ является однородной составляющей двойной степени (p, q) модуля $H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}$.

Перейдем теперь к вычислению двойного комплекса $H_{\mathrm{I}}(T(A, C))$. Так как этот комплекс определяется с помощью первого дифференциального оператора, то при его вычислении мы можем зафиксировать некоторые столбцы X^{*,q_1}, Y_{*,q_2} комплексов X и Y. При этом

$$H_{\mathrm{I}}^{p,q}(T(X, Y)) = \sum_{q_1+q_2=q} H^p(T(X^{*,q_1}, Y_{*,q_2})).$$

Так как однородными составляющими комплексов X^{*,q_1}, $Z(X^{*,q_1})$, $B(X^{*,q_1})$, ..., $H(X^{*,q_1})$ являются инъективные модули, то комплекс X^{*,q_1} расщепляем. Аналогично расщепляем и комплекс Y_{*,q_2}. Следовательно, согласно предложению IV, 7.4, определены отображения α и α', являющиеся изоморфизмами. Поэтому мы можем считать, что

$$H^p(T(X^{*,q_1}, Y_{*,q_2})) = \sum_{p_1+p_2=p} T(H^{p_1}(X^{*,q_1}), H_{p_2}(Y_{*,q_2})).$$

Таким образом,

$$H_{\mathrm{I}}(T(X, Y)) = T(H_{\mathrm{I}}(X), H_{\mathrm{I}}(Y)). \tag{3}$$

Заметим теперь, что дифференциальные операторы обеих частей соотношения (3) совпадают и оба индуцируются вторыми дифференциальными операторами соответствующих двойных комплексов. С другой стороны, так как двойной комплекс $H_{\mathrm{I}}(X)$ является инъективной резольвентой комплекса $H(A)$, а двойной комплекс $H_{\mathrm{I}}(Y)$ проективной резольвентой комплекса $H(C)$, то к правой части соотношения (3) применима формула (1). Следовательно, модули $H_{\mathrm{II}}^{p,q} H_{\mathrm{I}}$, т. е. модули $\mathrm{II}_2^{p,q}$, имеют вид

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = \sum_{p_1+p_2=p} R^q T(H^{p_1}(A), H_{p_2}(C)). \tag{4}$$

Напомним при этом, что здесь в соответствии с принятым нами для второй спектральной последовательности соглашением фильтрационной степенью является индекс q. В формуле (2) фильтрационной степенью служит индекс p.

Мы рассматривали случай двух аргументов только для сокращения формулировок. Аналогичные результаты имеют место и для функторов произвольного числа аргументов. При этом вместо ковариантных аргументов в функтор следует подставлять инъективные резольвенты, а вместо контравариантных — проективные.

Двойственным образом можно также построить и гомологические инварианты, заменяя ковариантные аргументы проективными резольвентами, а контравариантные — инъективными. Гомологическими инвариантами двойного комплекса $T(A, C)$ является модуль *гипергомологий* $\sum \mathcal{L}_n T(A, C)$, обладающий двумя фильтрациями, и две спектральные последовательности, начинающиеся с членов

$$\mathrm{I}_{p,q}^2 = H_p(L_q T(A, C)), \tag{2a}$$

$$\mathrm{II}_{p,q}^2 = \sum_{p_1+p_2=p} L_q T(H_{p_1}(A), H^{p_2}(C))\,; \tag{4a}$$

при этом для членов (2а) фильтрационной степенью служит индекс p, а для членов (4а) — индекс q.

3. УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть, как и выше, A и C — произвольные комплексы, X — инъективная резольвента комплекса A, а Y — проективная резольвента комплекса C. Так как $X^{p,q}=0$ и $Y_{p,q}=0$, если $q<0$, то для любого функтора $T(A, C)$, ковариантного по первому и контравариантному по второму аргументу,

$$T^{p,q}(X, Y)=0, \text{ если } q<0.$$

Поэтому (см. § XV, 6, случай 1) первая фильтрация двойного комплекса $T(X, Y)$ регулярна и определен краевой гомоморфизм

$$\mathrm{I}_2^{n,0} \longrightarrow H^n(T(X, Y)),$$

который в рассматриваемом случае имеет вид

$$(1) \qquad H^n(R^0\,T(A, C)) \longrightarrow \mathcal{R}^n\,T(A, C).$$

Вторая фильтрация двойного комплекса $T(X, Y)$ в общем случае не регулярна; тем не менее, как было показано в § XV, 6, для второй спектральной последовательности также определен краевой гомоморфизм

$$H^n(T(X, Y)) \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n,0},$$

который в рассматриваемом случае имеет вид

$$(2) \qquad \mathcal{R}^n\,T(A, C) \longrightarrow R^0T(H(A), H(C)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Композиция гомоморфизмов* (1) *и* (2) *совпадает с гомоморфизмом*

$$\alpha' : H(R^0T(A, C)) \longrightarrow R^0T(H(A), H(C))$$

(*см. предложение* IV, 6.1a), *построенным для точного слева функтора* R^0T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиция гомоморфизмов (1) и (2), которую мы обозначим через $\bar{\alpha}$, является, очевидно, естественным гомоморфизмом. Поэтому, согласно предложению IV, 6.1a, нужно только показать, что для любых комплексов A и C с нулевыми дифференциалами гомоморфизм $\bar{\alpha}$ является тождественным отображением. Но если дифференциальные операторы комплексов A и C равны нулю, то резольвенты X и Y можно составить из произвольных резольвент модулей A^p и C^q соответственно, полагая первые дифференциальные операторы двойных комплексов X и Y равными нулю. В этом случае первый дифференциальный оператор двойного комплекса $T(X, Y)$ также равен нулю и, следовательно, согласно замечанию, сделанному в конце § XV, 6, гомоморфизм $\bar{\alpha}$ является тождественным отображением.

Практически мы почти ничего не можем сказать о когомологических инвариантах двойного комплекса $T(A, C)$, если мы не знаем, регулярна ли вторая фильтрация. Хотя никакого общего критерия регулярности второй фильтрации неизвестно, можно указать два случая (включающие в себя по существу все встречающиеся на практике ситуации), в которых вторая фильтрация регулярна.

Случай 1. Комплекс A ограничен снизу (т. е. $A^p = 0$ для всех достаточно малых p), а комплекс C ограничен сверху (т. е. $C^p = 0$ для всех достаточно больших p). В этом случае, согласно предложению 1.3, существуют такая инъективная резольвента X комплекса A, что $X^{p,q} = 0$ при малых p, и такая проективная резольвента Y комплекса C, что $Y^{p,q} = 0$ при больших p. Поэтому, так как

$$T^{p,q}(X, Y) = \sum T(X^{p_1,q_1}, Y_{p_2,q_2}),$$
$$p_1 + p_2 = p, \; q_1 + q_2 = q,$$

то $T^{p,q}(X, Y) = 0$ для всех достаточно малых p. Следовательно, вторая фильтрация двойного комплекса $T(X, Y)$ регулярна.

Случай 2. Кольца Λ_1 и Λ_2, над которыми рассматриваются модули A и C, таковы, что $\operatorname{Ext}^q_{\Lambda_1} = 0$ и $\operatorname{Ext}^q_{\Lambda_2} = 0$ для всех достаточно больших q. В этом случае, согласно предложению 1.4, существуют такие резольвенты X и Y, что $X^{p,q} = 0$ и $Y^{p,q} = 0$, если только число $|q|$ достаточно велико. Поэтому $T^{p,q}(X, Y) = 0$ для всех достаточно больших $|q|$ и, следовательно, вторая фильтрация двойного комплекса $T(X, Y)$ регулярна.

В последующем, рассматривая когомологические инварианты, мы будем всегда предполагать, что выполнены предположения по крайней мере одного из этих двух случаев. В силу этого будут иметь место спектральные последовательности

$$H^p(R^qT(A, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^nT(A, C), \tag{3}$$

$$\sum_{p_1+p_2=p} R^qT(H^{p_1}(A), H_{p_2}(C)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^nT(A, C), \tag{4}$$

которые мы будем называть соответственно первой и второй когомологическими спектральными последовательностями двойного комплекса $T(A, C)$.

Если $R^qT(A, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность (3) вырождается, а спектральная последовательность (4) принимает вид

$$\sum_{p_1+p_2=p} R^qT(H^{p_1}(A), H_{p_2}(C)) \underset{q}{\Longrightarrow} H^n(R^0T(A, C)). \tag{5}$$

Если комплекс A представляет собой ацикличный правый комплекс над некоторым модулем M, а комплекс C — ацикличный левый комплекс над некоторым модулем N, то спектральная последовательность (4) вырождается, а спектральная последовательность (3) принимает вид

$$H^p(R^qT(A, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} R^nT(M, N). \tag{6}$$

Если, кроме того, $R^qT(A, C) = 0$ для всех $q > 0$, то спектральная последовательность (6) вырождается в изоморфизм

$$H^n(R^0T(A, C)) \approx R^nT(M, N). \tag{7}$$

Формула (7) является обобщением правила вычисления производных функторов R^nT с помощью соответствующих резольвент аргументов.

Сформулируем теперь вкратце аналогичные результаты для гомологических инвариантов. Так как для произвольной проективной резольвенты X комплекса A и произвольной инъективной резольвенты Y комплекса C имеет место равенство $T_{p,q}(X, Y) = 0$, если $q < 0$, то вторая фильтрация двойного комплекса $T(X, Y)$ регулярна и определены краевые гомоморфизмы

$$\mathrm{II}^2_{n,0} \longrightarrow H_n(T(X, Y)) \longrightarrow \mathrm{I}^2_{n,0},$$

которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$L_0T(H(A), H(C)) \longrightarrow \mathcal{L}_0 T(A, C) \longrightarrow H(L_0T(A, C)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1а. *Сквозное отображение*

$$L_0T(H(A), H(C)) \longrightarrow \mathcal{L}_0 T(A, C) \longrightarrow H(L_0T(A, C))$$

совпадает с гомоморфизмом

$$\alpha : L_0T(H(A), H(C)) \longrightarrow H(L_0T(A, C)),$$

рассмотренным в предложении IV, 6.1.

Для того чтобы обеспечить регулярность первой фильтрации, мы будем предполагать, что имеет место по крайней мере один из следующих двух случаев :

Случай 1а. Комплекс A ограничен сверху, а комплекс C ограничен снизу.

Случай 2а. Выполнены предположения случая 2.

В каждом из этих двух случаев имеют место спектральные последовательности

$$H_p(L_qT(A, C)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{L}_nT(A, C), \tag{3a}$$

$$\sum_{p_1+p_2=p} L_qT(H_{p_1}(A), H^{p_2}(C)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{L}_nT(A, C), \tag{4a}$$

которые мы называем соответственно первой и второй гомологическими спектральными последовательностями двойного комплекса $T(A, C)$.

4. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Естественное отображение* $\tau^0 : T \to R^0T$ *индуцирует изоморфизм когомологических инвариантов двойных комплексов* $T(A, C)$ *и* $R^0T(A, C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы XV, 3.2 достаточно убедиться, что отображение τ^0 индуцирует изоморфизмы начальных членов первой и второй когомологических спектральных последовательностей (предполагается выполнение по крайней мере одного из указанных в § 3 условий регулярности). Но это действительно так, поскольку, согласно теореме V, 5.3, отображение τ^0 индуцирует изоморфизмы $R^qT \approx R^qR^0T$.

Из предложения 4.1 вытекает, что функторы T и R^0T имеют одни и те же когомологические инварианты. Ввиду этого, без какого-либо ограничения общности, функтор T можно предполагать точным слева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Отображения комплексов $f: A \to A'$, $g: C' \to C$, индуцирующие изоморфные отображения*

$$H(RT(A, C)) \longrightarrow H(RT(A', C')),$$
$$RT(H(A), H(C)) \longrightarrow RT(H(A'), H(C')),$$

индуцируют изоморфные отображения всех когомологических инвариантов двойного комплекса $T(A, C)$ на соответствующие когомологические инварианты двойного комплекса $T(A', C')$.

Непосредственно вытекает из теоремы XV, 3.2.

ТЕОРЕМА 4.3. *Если отображения комплексов $f: A \to A'$, $g: C' \to C$ индуцируют изоморфизмы $H(A) \to H(A')$, $H(C') \to H(C)$, то для любого точного слева функтора T, для которого $R^qT(A, C) = 0 = R^qT(A', C')$, если $q > 0$, отображения f и g (при выполнении по крайней мере одного из указанных в § 3 условий регулярности) индуцируют изоморфизм $H(T(A, C)) \to H(T(A', C'))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R^qT(A, C) = 0$, если $q > 0$, то первая когомологическая спектральная последовательность двойного комплекса $T(A, C)$ вырождается в изоморфизм $H^n(T(A, C)) \approx \approx \mathcal{R}^nT(A, C)$. Поэтому вторую спектральную последовательность можно представить в виде

$$\sum_{p_1+p_2=p} R^qT(H^{p_1}(A), H_{p_2}(C)) \underset{q}{\Longrightarrow} H^n(T(A, C)).$$

Аналогичная спектральная последовательность имеет место и для комплексов A', C'. Теорема вытекает теперь из теоремы XV, 3.2, поскольку отображения f и g по условию индуцируют изоморфизмы начальных членов этих спектральных последовательностей.

Читателю предоставляется сформулировать и доказать аналогичные предложения для гомологических инвариантов.

5. СООТНОШЕНИЯ КЮННЕТА

Мы будем здесь предполагать, что функтор T *точен слева* и что

(1) $$R^nT = 0 \text{ для всех } n > 1.$$

При этих предположениях имеет место случай **3** из § XV, 6 и, следовательно, первая когомологическая спектральная последовательность определяет точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n,0} \longrightarrow \mathcal{R}^nT \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n-1,1} \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n+1,0} \longrightarrow \mathcal{R}^{n+1}T \longrightarrow \mathrm{I}_2^{n,1} \to \ldots,$$

которую удобно представить в виде точного треугольника градуированных модулей

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{R}T(A,C) \arrow[dl, "\delta"'] & \\
H(R^1T(A,C)) \arrow[rr, "\gamma"'] & & H(T(A,C)) \arrow[ul, "\varrho"']
\end{tikzcd}
$$

где гомоморфизмы γ, ϱ, δ имеют степени $2, 0, -1$ соответственно.

Вторая когомологическая спектральная последовательность в рассматриваемом случае определяет точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n-1,1} \longrightarrow \mathcal{R}^nT \longrightarrow \mathrm{II}_2^{n,0} \longrightarrow 0,$$

т. е. точную последовательность градуированных модулей

$$0 \longrightarrow R^1T(H(A), H(C)) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{R}T(A, C) \xrightarrow{\tau} T(H(A), H(C)) \longrightarrow 0,$$

где гомоморфизмы σ, τ имеют степени $1, 0$ соответственно.

Как было уже показано в предложении 3.1, композиция $\tau\varrho$ совпадает с гомоморфизмом $\alpha' : H(T(A, C)) \to T(H(A), H(C))$. Аналогично можно показать, что композиция $\delta\sigma$ совпадает с гомоморфизмом $\alpha : R^1T(H(A), H(C)) \to H(R^1T(A, C))$, который здесь определен, ибо в силу соотношения (1) функтор R^1T точен справа.

Из этих замечаний следует, что указанные выше точный треугольник и точную последовательность можно объединить в одну диаграмму

$$
(2)\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^1T(H(A), H(C)) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{R}T(A,C) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dl, "\delta"'] & T(H(A), H(C)) \arrow[r] & 0 \\
 & H(R^1T(A,C)) \arrow[rr, "\gamma"'] & & H(T(A,C)) \arrow[ul, "\varrho"'] \arrow[u, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}
$$

в которой верхняя строка и центральный треугольник точны, а остальные два треугольника коммутативны.

Предположим теперь, что для некоторого целого числа n

$$(3)\qquad H^k(R^1T(A, C)) = 0, \text{ если } k = n-1,\ n-2.$$

Тогда гомоморфизм ϱ определяет изоморфизм

$$\varrho : H^n(T(A, C)) \approx \mathcal{R}^nT(A, C)$$

и, следовательно, верхняя строка диаграммы (2) задает точную последовательность

$$(4)\quad 0 \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} R^1T(H^p(A), H_q(C)) \xrightarrow{\beta'} H^n(T(A,C)) \xrightarrow{\alpha'}$$

$$\xrightarrow{\alpha'} \sum_{p+q=n} T(H^p(A), H_q(C)) \longrightarrow 0,$$

где $\beta' = \varrho^{-1}\sigma$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Если функтор T (ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C) точен слева и $R^nT=0$ для всех $n>1$, то для любых комплексов A и C, удовлетворяющих соотношению* (3), *имеет место точная последовательность* (4).

В частности, условию теоремы удовлетворяет функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)$ в случае, когда кольцо Λ наследственно. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Если кольцо Λ наследственно, то для любых комплексов A и C, удовлетворяющих соотношению*

$$H^k[\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,C)]=0, \qquad \text{где } k=n-1,\ n-2,$$

имеет место точная последовательность

$$(5)\quad 0\longrightarrow \sum_{p-q=n-1}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_p(A),H^q(C))\xrightarrow{\beta'}H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C))\xrightarrow{\alpha'}$$
$$\xrightarrow{\alpha'}\sum_{p+q=n}\mathrm{Hom}_\Lambda(H_p(A),H^q(C))\longrightarrow 0.$$

Чтобы получить аналогичные результаты для гомологических инвариантов, следует предположить, что функтор T точен справа и что $L_nT=0$ для всех $n>1$. В диаграмме (2) следует при этом заменить символы $\mathcal{R}$ и R^1 соответственно символами $\mathcal{L}$ и L_1, переставить гомоморфизмы α и α' и изменить на противоположные направления всех стрелок.

ТЕОРЕМА 5.1а. *Если функтор T (ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C) точен справа и $L_nT=0$ для всех $n>1$, то для любых комплексов A и C, удовлетворяющих соотношению*

$$H_k(L_1T(A,C))=0, \qquad \text{где } k=n-1,\ n-2,$$

имеет место точная последовательность

$$(4\text{a})\quad 0\longrightarrow\sum_{p+q=n}T(H_p(A),H^q(C))\xrightarrow{\alpha}H_n(T(A,C))\xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta}\sum_{p+q=n-1}L_1T(H_p(A),H^q(C))\longrightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2а. *Если кольцо Λ наследственно, то для любых комплексов A и C, удовлетворяющих соотношению*

$$H_k(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,C))=0, \qquad \text{где } k=n-1,\ n-2,$$

имеет место точная последовательность

$$(5\text{a})\quad 0\longrightarrow\sum_{p+q=n}H_p(A)\otimes_\Lambda H_q(C)\longrightarrow H_n(A\otimes_\Lambda C)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\sum_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^\Lambda(H_p(A),H_q(C))\longrightarrow 0.$$

В теоремах 5.1 и 5.1а неявно подразумевается, что выполнены соответствующие условия регулярности, указанные в § 3. В следствиях 5.2 и 5.2а этого дополнительного предположения делать не нужно, поскольку ввиду наследственности кольца Λ здесь автоматически имеет место случай 2 из § 3.

Мы предлагаем читателю самому сравнить полученные здесь результаты с результатами § IV, 8 и VI, 3.

6. СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ФУНКТОРЫ

ТЕОРЕМА 6.1. *Если функтор T (ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C) сбалансирован справа, то для любой инъективной резольвенты X комплекса A и любой проективной резольвенты Y комплекса C отображения*

$$T(X, C) \xrightarrow{\xi} T(X, Y) \xleftarrow{\mu} T(A, Y),$$

индуцированные пополняющими отображениями, определяют изоморфизмы между когомологическими инвариантами двойного комплекса $T(A, C)$ и инвариантами двойных комплексов $T(X, C)$ и $T(A, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как здесь также предполагается выполнение по крайней мере одного из указанных в § 3 условий регулярности, то в силу теоремы XV, 3.2 достаточно показать, что начальные члены соответствующих спектральных последовательностей изоморфны. Мы сделаем это для отображения μ; отображение ξ рассматривается совершенно аналогично.

Начнем с вычисления функтора H_{II}. Так как этот функтор определяется с помощью второго дифференциального оператора, то при его вычислении мы можем фиксировать некоторую строку $X^{p_1,*}$ комплекса X и некоторую строку $Y_{p_2,*}$ комплекса Y. При этом

$$H_{\mathrm{II}}^{p,q}(T(X, Y)) = \sum_{p_1+p_2=p} H^q(T(X^{p_1,*}, Y_{p_2,*})),$$

$$H_{\mathrm{II}}^{p,q}(T(A, Y)) = \sum_{p_1+p_2=p} H^q(T(A^{p_1}, Y_{p_2,*})).$$

Но так как строка $X^{p_1,*}$ двойного комплекса X является инъективной резольвентой модуля A^{p_1}, строка $Y_{p_2,*}$ двойного комплекса Y является проективной резольвентой модуля C_{p_2} и функтор T сбалансирован справа, то соответствующие слагаемые правых частей двух полученных соотношений представляют собой один и тот же модуль $R^qT(A^{p_1}, C_{p_2})$. Следовательно,

$$H_{\mathrm{II}}(T(X, Y)) = H_{\mathrm{II}}(T(A, Y)). \tag{1}$$

Применяя к обеим частям этого равенства функтор H_{I}, мы получим, что начальные члены первых спектральных последовательностей совпадают.

Прежде чем перейти ко вторым спектральным последовательностям, мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА 6.2. *Если функтор T сбалансирован справа, а C — такой комплекс, что для всех n модули $B^n(C)$ и $H^n(C)$ проективны, то для любого комплекса A отображение*

$$\alpha' : H(T(A, C)) \longrightarrow T(H(A), H(C))$$

является изоморфизмом.

Прежде всего заметим, что все модули C^n, $Z^n(C)$, $Z'^n(C)$, $B^n(C)$, $B'^n(C)$ и $H^n(C)$ проективны. Поэтому в категории $\mathcal{M}_C$, состоящей из этих модулей и всех их гомоморфизмов, любая точная последовательность $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ расщепляема. Отсюда следует, что если функтор T рассматривать как функтор, второй аргумент которого принимает значения лишь в категории $\mathcal{M}_C$, то этот функтор будет относительно второго аргумента точным функтором. Так как категория $\mathcal{M}_C$ состоит лишь из проективных модулей, а функтор T сбалансирован справа, то функтор T будет точным и относительно первого аргумента (при условии, что второй аргумент принимает значения в категории $\mathcal{M}_C$). Следовательно, согласно теореме IV, 7.2, отображение α' изоморфно.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 6.1. Применяя функтор H_{I}, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathrm{I}}(T(X, Y)) \arrow[d, "\alpha'"] & H_{\mathrm{I}}(T(A, Y)) \arrow[l, "\mu'"'] \arrow[d, "\alpha'"] \\
T(H_{\mathrm{I}}(X), H_{\mathrm{I}}(Y)) & T(H(A), H_{\mathrm{I}}(Y)) \arrow[l, "\mu''"]
\end{tikzcd}$$

Оказывается, что вертикальные отображения этой диаграммы являются изоморфизмами. Действительно, так как при вычислении функтора H_{I} используется лишь первый дифференциальный оператор, то комплекс Y мы можем заменить любым его столбцом $Y^{*,q}$. Но в этом случае, поскольку модули $B^p(Y^{*,q})$ и $H^p(Y^{*,q})$ проективны, мы можем воспользоваться леммой 6.2, в силу которой вертикальные отображения диаграммы являются изоморфизмами. Применяя теперь функтор H_{II}, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{I}}(T(X, Y)) \arrow[d] & H_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{I}}(T(A, Y)) \arrow[l] \arrow[d] \\
H_{\mathrm{II}}(T(H_{\mathrm{I}}(X), H_{\mathrm{I}}(Y))) & H_{\mathrm{II}}(T(H(A), H_{\mathrm{I}}(Y))) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

вертикальные отображения которой также являются изоморфизмами. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что двойной комплекс $H_{\mathrm{I}}(X)$ является инъективной резольвентой комплекса $H(A)$, а двойной комплекс $H_{\mathrm{I}}(Y)$ — проективной резольвентой комплекса $H(C)$, так что в последней диаграмме нижнее горизонтальное отображение в силу соотношения (1) также является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 6.1a. *Если функтор T (ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C) сбалансирован слева,* *то для любой проективной резольвенты X комплекса A и любой инъективной резольвенты Y комплекса C отображения*

$$T(X, C) \longleftarrow T(X, Y) \longrightarrow T(A, Y),$$

индуцированные пополняющими отображениями, определяют изоморфизмы между гомологическими инвариантами двойного комплекса $T(A, C)$ и инвариантами двойных комплексов $T(X, C)$ и $T(A, Y)$.

Заметим, что теорема 6.1 оправдывает использованное в § XVI, 2 обозначение $\mathcal{R}^n T(A, C)$, так как этот модуль действительно является модулем гиперкогомологий комплекса $T(A, C)$. Аналогично рассматривавшийся в § XVI, 8 модуль $\mathcal{H}^n(\Lambda, C)$ является модулем гиперкогомологий комплекса $\operatorname{Hom}_\Lambda(K, C)$.

7. СЛОЖНЫЕ ФУНКТОРЫ

Введенные в этой главе понятия мы в заключение используем для изучения сложного функтора $V = TU$. При этом для упрощения записи мы будем предполагать, что функтор U является ковариантным функтором одного аргумента, определенным на категории Λ-модулей и принимающим значения в категории Γ-модулей, а функтор T является ковариантным функтором одного аргумента, определенным на категории Γ-модулей.

Выбирая для произвольного Λ-модуля A некоторую инъективную резольвенту X, положим $Y = U(X)$. Для исследования когомологических инвариантов комплекса $T(Y)$ удобно ввести функторы $W^q = (R^q T)\,U$. Тогда

$$\mathrm{I}_2^{p,q} = H^p(R^q T(Y)) = H^p(W^q(X)) = R^p W^q(A),$$

$$\mathrm{II}_2^{p,q} = R^q T(H^p(Y)) = R^q T(R^p U(A)).$$

Таким образом, имеют место спектральные последовательности

(1) $$R^p W^q(A) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(U(X)),$$

(2) $$R^q T(R^p U(A)) \underset{q}{\Longrightarrow} \mathcal{R}^n T(U(X)).$$

Заметим, что, поскольку функтор $R^n T$ инвариантен относительно гомотопий, модуль $\mathcal{R}^n T(U(X))$ не зависит от выбора резольвенты X модуля A.

Для спектральных последовательностей (1) и (2) имеет место случай 2 из § XV, 6, так что определены краевые гомоморфизмы:

$$R^n W^0(A) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}^n T(U(X)) \longrightarrow R^0 W^n(A),$$

$$R^n T(R^0 U(A)) \longrightarrow \mathcal{R}^n T(U(X)) \xrightarrow{\psi} R^0 T(R^n U(A)).$$

Если функтор T точен слева, то $R^0 T = T$ и $W^0 = (R^0 T)\,U = V$. Таким образом, в этом случае имеет место гомоморфизм

(3) $$\psi\varphi : R^n V \longrightarrow T(R^n U).$$

Если функтор T точен, то обе спектральные последовательности вырождаются и потому гомоморфизмы φ, ψ, а следовательно, и гомоморфизм (3) являются изоморфизмами.

Предположим теперь, что точен функтор U. В этом случае вторая спектральная последовательность вырождается в изоморфизм $R^nT(U(A)) \approx \mathcal{R}^n T(U(X))$ и потому первая спектральная последовательность принимает вид

$$R^p((R^q T))\, U \underset{p}{\Longrightarrow} (R^n T)\, U.$$

Эта спектральная последовательность определяет краевые гомоморфизмы

$$R^n((R^0T)\, U) \longrightarrow (R^n T)\, U \longrightarrow R^0((R^n T)\, U)$$

и точную последовательность членов низшей степени

$$0 \to R^1((R^0 T)\, U) \to (R^1 T)\, U \to R^0((R^1 T)\, U) \to R^2((R^0 T)\, U) \to (R^2 T)\, U,$$

которая в случае, когда функтор T точен слева, принимает вид

$$0 \longrightarrow R^1 V \longrightarrow (R^1 T)\, U \longrightarrow R^0((R^1 T)\, U) \longrightarrow R^2 V \longrightarrow (R^2 T)\, U.$$

Аналогичные результаты имеют место и для левых производных функторов, а также для функторов любого числа аргументов, по одним из которых функторы ковариантны, а по другим — контравариантны.

ДОБАВЛЕНИЕ Д. А. БУКСБАУМА

ТОЧНЫЕ КАТЕГОРИИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Введение. В книге А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра»[1] рассматриваются лишь функторы, определенные на категориях модулей над некоторыми кольцами и принимающие значения также в некоторой категории модулей над кольцом. В настоящем добавлении будет показано, что излагаемая в книге теория может быть обобщена на функторы, определенные на некоторых абстрактных категориях и принимающие значения также в абстрактных категориях. Такого рода абстрактное рассмотрение обладает многими важными преимуществами. В частности :

(1) Замеченные впервые Маклейном (MacLane S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485—516] двойственности типа

$$\begin{aligned} \text{ядро} &— \text{коядро}, \\ \text{проективность} &— \text{инъективность}, \\ Z(A) &— Z'(A) \end{aligned}$$

теперь могут быть сформулированы как совершенно четкие математические теоремы.

(2) При изложении теории производных функторов достаточно рассматривать лишь левые производные функторы ковариантных функторов нескольких аргументов ; остальные типы производных функторов получаются в силу соотношений двойственности.

(3) Более глубокие применения теории производных функторов показывают, что рассмотрения модулей над кольцами, не снабженными никаким дополнительным строением, часто бывает недостаточно. Как правило, приходится рассматривать кольца, снабженные, например, градуировкой, дифференциалом, топологией и т. п. При абстрактном изложении эти обобщения получаются как частные случаи общей теории.

Настоящее дополнение состоит из четырех частей. В первой части излагаются основные определения, теория двойственности и некоторые фундаментальные леммы. При этом тривиальные этапы рассуждений мы опускаем (даже не формулируя их в явном виде).

---

[1] В дальнейшем при ссылках на эту книгу мы будем писать просто «книга» или «основной текст». — *Прим. перев.*

Большинство результатов второй части легко следует из результатов части I, а вводимые в этой части понятия идентичны понятиям, изучаемым в основном тексте. Поскольку связанные последовательности функторов являются естественным обобщением гомологических последовательностей, они также рассматриваются в этой части в § 4. Из приводимого здесь доказательства предложения 4.1 видно, что это предложение не зависит от аксиомы (V); этого нельзя усмотреть из доказательства, приведенного в книге.

Третья часть посвящена абстрактному изложению основных понятий, изучаемых в основном тексте. Теорема 5.1 этой части доказана в наиболее общей ситуации, позволяющей применять ее и в теории пучков.

В четвертой части построенная теория применяется к трем чисто алгебраическим вопросам. Ее приложения к теории пучков в настоящее время пока еще весьма фрагментарны, и мы их здесь не излагаем.

Следует отметить, что наше исследование имеет многочисленные общие точки соприкосновения с упомянутой выше работой Маклейна.

Часть I

ТОЧНЫЕ КАТЕГОРИИ

1. Определение точной категории. Точная категория $\mathcal{A}$, по определению, состоит из:

(i) некоторого множества объектов A;

(ii) некоторого отмеченного объекта $\varnothing$, называемого нулевым объектом;

(iii) некоторых абелевых групп $H(A, B)$, сопоставленных каждой паре объектов $A, B \in \mathcal{A}$; элементы φ группы $H(A, B)$ называются *отображениями*[1], и вместо $\varphi \in H(A, B)$ пишут $\varphi : A \to B$; нулевой элемент группы $H(A, B)$ обозначается символом 0;

(iv) некоторых гомоморфизмов $H(B, C) \otimes H(A, B) \to H(A, C)$, заданных для каждой тройки объектов $A, B, C \in \mathcal{A}$; образ элемента $\psi \otimes \varphi$ в группе $H(A, C)$ обозначается через $\psi\varphi$ и называется композицией отображений ψ и φ.

Предполагается, что примитивные понятия (i)—(iv) удовлетворяют следующим четырем аксиомам.

АКСИОМА I. Если $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, $\gamma : C \to D$, то $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$.

АКСИОМА II. $H(\varnothing, \varnothing) = 0$.

АКСИОМА III. Для каждого объекта $A \in \mathcal{A}$ существует такое отображение $e_A : A \to A$, что $e_A\beta = \beta$ для любого $\beta : B \to A$ и $\gamma e_A = \gamma$ для любого $\gamma : A \to C$.

[1] В литературе (и, в частности, в основном тексте) отображения называются также *гомоморфизмами*. — *Прим. ред.*

Легко убедиться, что $H(A, \varnothing) = 0 = H(\varnothing, A)$ для всех объектов $A \in \mathcal{A}$ и что предусмотренное аксиомой III *тождественное отображение* e_A однозначно определяется объектом $A \in \mathcal{A}$.

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *эквивалентностью*[1], если существует такое отображение $\varphi' : B \to A$, что $\varphi'\varphi = e_A$ и $\varphi\varphi' = e_B$. Легко видеть, что отображение φ' определено однозначно; мы будем его обозначать через φ^{-1}. Очевидно, что отображение φ^{-1} также является эквивалентностью, причем $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$. Если отображения $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ являются эквивалентностями, то их композиция $\psi\varphi$ также является эквивалентностью и $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем говорить, что пара отображений

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

обладает свойством (E), если:

(1) $\beta\alpha = 0$;

(2) для любого отображения $\alpha' : A' \to B$, для которого $\beta\alpha' = 0$, существует, и притом только одно, такое отображение $\gamma : A' \to A$, что $\alpha' = \alpha\gamma$;

(3) для любого отображения $\beta' : B \to C'$, для которого $\beta'\alpha = 0$, существует, и притом только одно, такое отображение $\delta : C \to C'$, что $\beta' = \delta\beta$.

Теперь мы можем сформулировать и четвертую аксиому.

АКСИОМА IV. Для любого отображения $\alpha : A \to B$ существуют такие объекты K, I, I', F и такие отображения

$$(*) \qquad K \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\tau} I \xrightarrow{\theta} I' \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\pi} F,$$

что:

(4) $\alpha = \varkappa\theta\tau$;

(5) отображение θ является эквивалентностью;

(6) пара отображений $K \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\tau} I$ обладает свойством (E);

(7) пара отображений $I' \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\pi} F$ обладает свойством (E).

ЛЕММА 1.1. *Пусть пара отображений $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ обладает свойством* (E), *и пусть $D \xrightarrow{\sigma} A$ (соответственно $C \xrightarrow{\tau} F$) — такие отображения, что $\alpha\sigma = 0$ (соответственно $\tau\beta = 0$). Тогда $\sigma = 0$ (соответственно $\tau = 0$).*

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любой последовательности отображений $K_1 \xrightarrow{\sigma_1} A \xrightarrow{\tau_1} I_1 \xrightarrow{\theta_1} I_1' \xrightarrow{\varkappa_1} B \xrightarrow{\pi_1} F_1$, также обладающей свойствами* (4)—(7), *существует, и притом только одна, такая система отображений ξ, η, ζ, ω, что имеет место коммутативная диаграмма*

[1] Эквивалентности называются также *изоморфизмами*. — *Прим. ред.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K & \xrightarrow{\sigma} & A & \xrightarrow{\tau} & I & \xrightarrow{\theta} & I' & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\pi} & F \\
\downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle e_A} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} & & \downarrow{\scriptstyle e_B} & & \downarrow{\scriptstyle\omega} \\
K_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & A & \xrightarrow{\tau_1} & I_1 & \xrightarrow{\theta_1} & I_1' & \xrightarrow{\varkappa_1} & B & \xrightarrow{\pi_1} & F_1
\end{array}$$

Отображения ξ, η, ζ, ω являются эквивалентностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varkappa_1\theta_1\tau_1\sigma = \alpha\sigma = \varkappa\theta\tau\sigma = 0$, то $\tau_1\sigma = 0$ и, следовательно, существуют такие однозначно определенные отображения $\xi : K \to K_1$ и $\eta : I \to I_1$, что $\sigma = \sigma_1\xi$ и $\tau_1 = \eta\tau$. Аналогично доказывается существование отображений ζ и ω, для которых $\varkappa = \varkappa_1\zeta$ и $\pi_1 = \omega\pi$. Покажем теперь, что $\theta_1\eta = \zeta\theta$. Действительно, так как

$$\varkappa_1\theta_1\eta\tau = \varkappa_1\theta_1\tau_1 = \alpha = \varkappa\theta\tau = \varkappa_1\zeta\theta\tau,$$

то $\varkappa_1(\theta_1\eta - \zeta\theta)\tau = 0$ и, следовательно, согласно лемме 1.1, $\theta_1\eta = \zeta\theta$.

Утверждение о том, что отображения ξ, η, ζ, ω являются эквивалентностями, очевидно.

2. Точные последовательности. Пары (K, σ), (I, τ), $(I', \varkappa)$ и (F, π) мы будем называть соответственно *ядром*, *кообразом*, *образом* и *коядром* отображения α. Согласно теореме 1.2, эти понятия в некотором смысле однозначно соответствуют отображению α[1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность

$$A_m \xrightarrow{\alpha_m} A_{m+1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n, \qquad m+1 < n,$$

называется *точной*, если $\operatorname{Ker} \alpha_q = \operatorname{Im} \alpha_{q-1}$, $m < q < n$.

Теперь мы докажем следующую основную теорему:

ТЕОРЕМА 2.1. *Пара отображений*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

тогда и только тогда обладает свойством (E), *когда имеет место точная последовательность*

$$\varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \varnothing.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пара отображений $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ обладает свойством (E). Точность указанной в теореме последовательности равносильна точности последовательностей $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B$, $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ и $B \xrightarrow{\beta} C \to \varnothing$. Для доказательства точности последо-

[1] В дальнейшем ядро, образ, коядро и кообраз отображения α автор часто обозначает через K_α, I'_α, F_α и I_α, или через $K\alpha$, $I'\alpha$, $F\alpha$ и $I\alpha$, или, наконец, через $\operatorname{Ker}\alpha$, $\operatorname{Im}\alpha$, $\operatorname{Coker}\alpha$ и $\operatorname{Coim}\alpha$ соответственно. Эти же символы используются и для обозначения объектов K, I', F и I. — *Прим. перев.*

вательности $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, т. е. равенства $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$, достаточно заметить, что последовательности

$$(1) \qquad \varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{e_A} A \xrightarrow{e_A} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C,$$

$$(2) \qquad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{e_C} C \xrightarrow{e_C} C \longrightarrow \varnothing$$

представляют собой разложения отображений α и β соответственно [ибо, как легко видеть, пары отображений $\varnothing \to A \xrightarrow{e_A} A$ и $C \xrightarrow{e_C} C \to \varnothing$ обладают свойством (E)], и потому $\operatorname{Im} \alpha = (A, \alpha) = \operatorname{Ker} \beta$.

Из разложения (1) следует также, что $\operatorname{Ker} \alpha = (\varnothing, 0)$, а из разложения (2), — что $\operatorname{Im} \beta = (C, e_C)$. С другой стороны, легко видеть, что $\operatorname{Im}(\varnothing \to A) = (\varnothing, 0)$ и $\operatorname{Ker}(C \to \varnothing) = (C, e_C)$. Таким образом, последовательности $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B$ и $B \xrightarrow{\beta} C \to \varnothing$ также точны. Необходимость условия теоремы тем самым полностью доказана.

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что имеют место точные последовательности $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B$, $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ и $B \xrightarrow{\beta} C \to \varnothing$. Тогда $\operatorname{Im} \beta = (C, e_C)$, $\operatorname{Ker} \alpha = (\varnothing, 0)$ и $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Поэтому разложения отображений α и β можно представить в следующем виде:

$$(3) \qquad \varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{e_A} A \xrightarrow{\theta} D \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\pi} F, \qquad \varkappa\theta = \alpha,$$

$$(4) \qquad D \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\pi'} F' \xrightarrow{\theta'} C \xrightarrow{e_C} C \longrightarrow \varnothing, \qquad \theta'\pi' = \beta.$$

Убедимся теперь, что пара отображений $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ обладает свойством (E), т. е. удовлетворяет условиям (1), (2) и (3) из § 1. Действительно,

$$\beta\alpha = \theta'\pi'\varkappa\theta = 0.$$

Далее, если $\alpha' : A' \to B$ — такое отображение, что $\beta\alpha' = 0$, то $\theta'\pi'\alpha' = 0$ и, следовательно, $\pi'\alpha' = 0$. Поэтому существует, и притом только одно, такое отображение $\gamma' : A' \to D$, что $\varkappa\gamma' = \alpha'$. Полагая $\gamma = \theta^{-1}\gamma' : A' \to A$, мы получим, что $\alpha(\theta^{-1}\gamma') = \varkappa\theta\theta^{-1}\gamma' = \varkappa\gamma' = \alpha'$. Если $\bar{\gamma} : A' \to A$ — другое отображение, удовлетворяющее соотношению $\alpha\bar{\gamma} = \alpha'$, то $\varkappa\theta\bar{\gamma} = \varkappa\gamma'$ и, следовательно, $\bar{\gamma} = \theta^{-1}\gamma'$. Таким образом, условие (2) из § 1 выполняется. Условие (3) из § 1 проверяется аналогично. Тем самым теорема 2.1 полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Отображение $\alpha : A \to B$ называется *мономорфизмом*, если точна последовательность $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B$. Отображение $\beta : B \to C$ называется *эпиморфизмом*, если точна последовательность $B \xrightarrow{\beta} C \to \varnothing$.

3. G-градуированные категории. Чтобы включить в общую теорию категории градуированных модулей над градуированными кольцами, мы введем понятие G-градуированной категории $(\mathcal{A}, G)$, где G — произвольная абелева группа. На практике группой G служит, как правило, либо аддитивная группа целых чисел Z, либо прямая сумма нескольких экземпляров группы Z.

G-градуированная категория $(\mathcal{A}, G)$, по определению, состоит из:

(i) некоторого множества объектов $\{A\}$;

(ii) некоторого отмеченного объекта $\varnothing$, называемого нулевым объектом;

(iii) некоторых абелевых групп $H(A, B)$, сопоставленных каждой паре объектов $A, B \in (\mathcal{A}, G)$, и некоторых их подгрупп $H_g(A, B) \subset H(A, B)$, сопоставленных каждому элементу $g \in G$; элемент $\varphi \in H_g(A, B)$ мы назовем однородным отображением степени g и по-прежнему будем писать $\varphi : A \to B$;

(iv) некоторых гомоморфизмов $H_{g_2}(B, C) \otimes H_{g_1}(A, B) \to H_{g_1+g_2}(A, C)$, определенных для каждой тройки объектов $A, B, C \in (\mathcal{A}, G)$ и для каждой пары элементов $g_1, g_2 \in G$.

Предполагается, что эти примитивные понятия удовлетворяют следующим пяти аксиомам.

АКСИОМА 0. $H_{g_1}(A, B) \cap H_{g_2}(A, B) = 0$, если $g_1 \neq g_2$.

АКСИОМЫ I—III аналогичны соответствующим аксиомам точной категории, но относятся к однородным отображениям. Из аксиомы III вытекает, что отображение e_A имеет степень нуль.

АКСИОМА IV аналогична аксиоме IV для точных категорий, но относится к однородным отображениям, и в ней дополнительно постулируется, что отображения $\sigma, \tau, \varkappa, \pi$ имеют степень нуль и, следовательно, отображение θ — ту же степень, что и отображение α. [В градуированных категориях свойство (E) формулируется лишь для однородных отображений.]

Точные категории являются частным случаем G-градуированных категорий; для них группа G тривиальна и $H_0(A, B) = H(A, B)$. Все дальнейшее изложение по существу относится к произвольным G-градуированным категориям. Однако мы, как правило, не будем упоминать о степенях отображений, т. е. будем пользоваться языком точных категорий.

4. Двойственность. Нам часто придется иметь дело с категорией $\mathcal{A}^*$, двойственной к данной точной категории $\mathcal{A}$. Мы будем также пользоваться метаматематической теоремой о двойственности внутри фиксированной точной категории.

Объектами категории $\mathcal{A}^*$ являются символы A^*, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с объектами $A \in \mathcal{A}$; нулевым объектом категории $\mathcal{A}^*$ является символ $\varnothing^*$; в качестве группы $H(A^*, B^*)$ берется группа $H(B, A)$ [в случае градуированной категории $H_g(A^*, B^*) = H_{-g}(B, A)$]; каждому отображению $\varphi : B \to A$ категории $\mathcal{A}$ соответствует при этом «двойственное» отображение $\varphi^* : A^* \to B^*$ категории $\mathcal{A}^*$[1]; композиция отображений категории $\mathcal{A}^*$ определяется формулой $\psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^*$.

Легко проверить, что $\mathcal{A}^*$ является точной категорией; аксиомы I и II очевидны, в аксиоме III следует тождественное отображение e_{A^*} определить как отображение $(e_A)^*$, а аксиома IV проверяется следующим образом. Пусть $\alpha^* : A^* \to B^*$. Тогда $\alpha : B \to A$. Из любого разложения $K \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} I \xrightarrow{\theta} I' \xrightarrow{\varkappa} A \xrightarrow{\pi} F$ отображения α мы, переходя к двойственным отображениям, получим отображения $F^* \xrightarrow{\pi^*} A^* \xrightarrow{\varkappa^*} I'^* \xrightarrow{\theta^*} I^* \xrightarrow{\tau^*} B^* \xrightarrow{\sigma^*} K^*$. В этой последовательности отображений $\tau^*\theta^*\varkappa^* = (\varkappa\theta\tau)^* = \alpha^*$, причем отображение θ^* является эквивалентностью, ибо $(\theta\theta^{-1})^* = (e_{I'})^* = e_{I'^*}$ и $(\theta^{-1}\theta)^* = e_{I^*}$. Очевидно также, что обе пары отображений $F^* \to A^* \to I'^*$ и $I^* \to B^* \to K^*$ обладают свойством (E).

Чтобы получить метаматематическую двойственность внутри фиксированной точной категории, мы группы $H(A, B)$ заменим группами $H(B, A)$, т. е. «изменим на противоположные направления всех стрелок»; при этом гомоморфизм $H(B, C) \otimes H(A, B) \xrightarrow{\xi_{A,B,C}} H(A, C)$ заменяется гомоморфизмом $H(B, A) \otimes H(C, B) \xrightarrow{\xi_{C,B,A}} H(C, A)$.

Очевидно, что после такой замены аксиомы I—IV останутся справедливыми. Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ 4.1. *В точной категории $\mathcal{A}$ тогда и только тогда справедливо некоторое утверждение S, когда в $\mathcal{A}$ справедливо «двойственное» утверждение S^* (т. е. утверждение, получающееся из утверждения S после указанных выше замен).*

В дальнейшем, как правило, мы не будем даже формулировать двойственные утверждения, хотя и будем ими многократно пользоваться.

5. Основные леммы.

ЛЕММА 5.1. *Для любого мономорфизма $\alpha : A \to B$ существуют такое отображение β и такой объект C, что имеет место точная последовательность $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to \varnothing$ (в случае градуированной категории отображение β можно выбрать однородным степени нуль).*

---

[1] Отображение φ^* есть то же отображение φ, но рассматриваемое как отображение категории $\mathcal{A}^*$. — *Прим. ред.*

ЛЕММА 5.2. *Последовательность* $\varnothing \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *тогда и только тогда точна, когда* $\beta\alpha = 0$ *и для любого отображения* $f : A' \to B$, *для которого* $\beta f = 0$, *существует, и притом только одно, такое отображение* $f' : A' \to A$, *что* $f = \alpha f'$.

ЛЕММА 5.3. *Отображение* α *тогда и только тогда является мономорфизмом, когда из равенства* $\alpha f = 0$ *(где* f *— некоторое отображение) следует, что* $f = 0$.

ТЕОРЕМА 5.4. *Последовательность* $\varnothing \to A \xrightarrow{\theta} B \to \varnothing$ *тогда и только тогда точна, когда отображение* θ *является эквивалентностью.*

ТЕОРЕМА 5.5. *Если в коммутативной диаграмме*

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \varnothing & & \varnothing & & \varnothing & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\varnothing & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\lambda} & A & \xrightarrow{\mu} & A_2 & \longrightarrow & \varnothing \\
 & & {\scriptstyle\varkappa_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varkappa} & & \downarrow{\scriptstyle\varkappa_2} & & \\
\varnothing & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\eta} & B & \xrightarrow{\zeta} & B_2 & \longrightarrow & \varnothing \\
 & & {\scriptstyle\varrho_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varrho} & & \downarrow{\scriptstyle\varrho_2} & & \\
\varnothing & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C_2 & \longrightarrow & \varnothing \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \varnothing & & \varnothing & & \varnothing & &
\end{array}
$$

с точными столбцами нижние две строки точны, то и верхняя строка точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varkappa_2\mu\lambda = \zeta\eta\varkappa_1 = 0$, то $\mu\lambda = 0$.

Если $\lambda f = 0$, то $\varkappa\lambda f = 0 = \eta\varkappa_1 f$ и, следовательно, $f = 0$. Таким образом, отображение λ является мономорфизмом. Поэтому существуют такое отображение ω и такой объект N, что имеет место точная последовательность $\varnothing \to A_1 \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\omega} N \to \varnothing$. Мы должны показать, что объект N эквивалентен объекту A_2, т. е. что существует эквивалентность $\theta : N \to A_2$, для которой $\theta\omega = \mu$. Применяя известную вторую теорему об изоморфизме (справедливую в любой точной категории $\mathcal{A}$[1]) к точным последовательностям

$$
\text{(1)}\qquad
\begin{array}{l}
\varnothing \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\zeta} B_2 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varkappa_1} B_1 \xrightarrow{\varrho_1} C_1 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\eta\varkappa_1} B \xrightarrow{\tau} F(B, A_1) \longrightarrow \varnothing
\end{array}
$$

[1] См. Добавление редактора в конце этой части. — *Прим. ред.*

и к точным последовательностям

$$\varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\varrho} C \longrightarrow \varnothing,$$

(2) $$\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\omega} N \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\eta\varkappa_1} B \xrightarrow{\tau} F(B, A_1) \longrightarrow \varnothing,$$

мы получим точную последовательность

(I) $$\varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{n_1} F(B, A_1) \xrightarrow{m_1} B_2 \longrightarrow \varnothing,$$

для которой $n_1\varrho_1 = \tau\eta$, $m_1\tau = \zeta$, и точную последовательность

(II) $$\varnothing \longrightarrow N \xrightarrow{n_2} F(B, A_1) \xrightarrow{m_2} C \longrightarrow \varnothing,$$

для которой $n_2\omega = \tau\varkappa$, $m_2\tau = \varrho$.

Применяя теперь к точным последовательностям

$$\varnothing \longrightarrow N \xrightarrow{n_2} F(B, A_1) \xrightarrow{m_2} C \longrightarrow \varnothing,$$

(3) $$\varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow R \xrightarrow{\sigma} F(B, A_1) \xrightarrow{\beta m_2} C_2 \longrightarrow \varnothing$$

и

$$\varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{n_1} F(B, A_1) \xrightarrow{m_1} B_2 \longrightarrow \varnothing,$$

(4) $$\varnothing \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\varkappa_2} B_2 \xrightarrow{\varrho_2} C_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow R \xrightarrow{\sigma} F(B, A_1) \xrightarrow{\beta m_2} C_2 \longrightarrow \varnothing$$

теорему, двойственную второй теореме об изоморфизме, мы получим точную последовательность

(III) $$\varnothing \longrightarrow N \xrightarrow{n_3} R \xrightarrow{m_3} C_1 \longrightarrow \varnothing,$$

для которой $\sigma n_3 = n_2$, $\alpha m_3 = m_2\sigma$, и точную последовательность

(IV) $$\varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{n_4} R \xrightarrow{m_4} A_2 \longrightarrow \varnothing,$$

для которой $\sigma n_4 = n_1$, $\varkappa_2 m_4 = m_1\sigma$.

Оказывается, что $m_3n_4 = e_{C_1}$. Действительно, $\alpha m_3n_4 = m_2\sigma n_4 = m_2n_1$ и $m_2n_1\varrho_1 = m_2\tau\eta = \varrho\eta = \alpha\varrho_1$, так что $m_2n_1 = \alpha$. Поэтому $\alpha m_3n_4 = \alpha$ и, следовательно, $m_3n_4 = e_{C_1}$.

Положим $\theta = m_4n_3 : N \to A_2$. Так как $\varkappa_2\theta\omega = \varkappa_2m_4n_3\omega = m_1\sigma n_3\omega = m_1n_2\omega = m_1\tau\varkappa = \zeta\varkappa = \varkappa_2\mu$, то $\theta\omega = \mu$. Остается, таким образом, показать, что отображение θ является эквивалентностью.

Пусть $f\theta = 0$. Тогда $(fm_4)n_3 = 0$ и, следовательно, $fm_4 = f'm_3$. Но $0 = fm_4n_4 = f'm_3n_4 = f'$. Поэтому $fm_4 = 0$ и, значит, $f = 0$. С другой стороны, если $\theta g = 0$, то $m_4(n_3g) = 0$ и, следовательно, $n_3g = n_4g'$. Но $0 = m_3n_3g = m_3n_4g' = g'$. Поэтому $n_3g = 0$ и, значит, $g = 0$. Тем самым показано, что отображение θ одновременно мономорфно и эпиморфно, т. е. является эквивалентностью.

Заметим, что, как видно из доказательства, объект R является прямой суммой объектов A_2 и C_1 (см. § III, 1, замечание).

ЛЕММА 5.6. *Если в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \varnothing \arrow[d] \\
\varnothing \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varrho_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B_1 \arrow[r, "\varkappa_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[d, "\gamma"] \\
\varnothing \arrow[r] & A \arrow[r, "\varrho"] & B \arrow[r, "\varkappa"] & C
\end{tikzcd}$$

две строки и правый столбец являются точными последовательностями, то:

(a) $\operatorname{Ker} \alpha_1 \approx \operatorname{Ker} \beta_1$;

(b) *существует мономорфизм* $\mu : \operatorname{Im} \alpha_1 \to \operatorname{Im} \beta_1$;

(c) *существует мономорфизм* $\iota : \operatorname{Coker} \varrho_1 \to \operatorname{Coker} \varrho$;

(d) $\operatorname{Coker} \varrho_1 \approx \operatorname{Coker} \mu$.

ЛЕММА 5.7. *Если последовательность* $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ *можно вложить в коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
 & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varrho_1"'] & A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varrho"] & A_2 \arrow[d, "\varrho_2"] \\
 & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\varkappa_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\varkappa"] & B_2 \\
\varnothing \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma"] & C &
\end{tikzcd}$$

все столбцы и две нижние строки которой являются точными последовательностями, то последовательность $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ *точна.*

ТЕОРЕМА 5.8. *Если имеет место коммутативная диаграмма*

(H)
$$\begin{tikzcd} & Z_1' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "d_1"] & Z' \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "d"] & Z_2' \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & \varnothing \\ \varnothing \arrow[r] & Z_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Z \arrow[r, "\beta_2"] & Z_2 & \end{tikzcd}$$

с точными строками, то:

(a) *последовательность* $\operatorname{Ker} d_1 \to \operatorname{Ker} d \to \operatorname{Ker} d_2$ *точна;*

(b) *последовательность* $\operatorname{Coker} d_1 \to \operatorname{Coker} d \to \operatorname{Coker} d_2$ *точна;*

(c) *существует такое отображение* $\mathcal{L}: \operatorname{Ker} d_2 \to \operatorname{Coker} d_1$, *что последовательность*

(5)
$$\operatorname{Ker} d \longrightarrow \operatorname{Ker} d_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \operatorname{Coker} d_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} d$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (a) и (b) легко следуют из леммы 5.7 (и леммы, двойственной лемме 5.7). Таким образом, в доказательстве нуждается лишь утверждение (c). Мы сейчас приведем две двойственные между собой конструкции отображения $\mathcal{L}$; при этом мы получим отображения $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, которые, как мы затем покажем, совпадают. Тем самым будет показано, что отображение $\mathcal{L}$ двойственно самому себе.

С этой целью мы воспользуемся некоторым построением, равносильным операции взятия прообраза. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\ \varnothing \arrow[r] & K\alpha_2 \arrow[r, "="] \arrow[d, "\mu_2"] & K\alpha_2 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\alpha}_2"] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ \varnothing \arrow[r] & D_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\delta_2"] & Z' \arrow[r, "\tau_2\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & Id_2 \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & \varnothing \\ \varnothing \arrow[r] & Kd_2 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & Z_2' \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d] & Id_2 \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \end{tikzcd}$$

в которой $D_2 = \operatorname{Ker} \tau_2\alpha_2$, а μ_2 и δ_2 — естественно индуцированные отображения. Эта диаграмма коммутативна, и все строки, а также второй и третий слева столбцы являются, по определению, точными последовательностями. Следовательно, первый слева столбец также является точной последовательностью. Так как $\beta_2 d\psi_2 = d_2\alpha_2\psi_2 =$

$= d_2\sigma_2\delta_2 = 0$, то $d\psi_2 = \beta_1\iota_2$, где $\iota_2 : D_2 \to Z_1$. Рассмотрим теперь точные последовательности

$$\varnothing \longrightarrow Kd_1 \xrightarrow{\sigma_1} Z_1' \xrightarrow{\tau_1} Id_1 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow Id_1 \xrightarrow{\varkappa_1} Z_1 \xrightarrow{\pi_1} Fd_1 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow K\alpha_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} Z_1' \xrightarrow{\bar{\pi}_1} K\alpha_2 \longrightarrow \varnothing,$$

где $\varkappa_1\tau_1 = d_1$ [точность третьей последовательности следует из точности верхней строки диаграммы (Н)]. Нетрудно убедиться, что $\bar{\sigma}_2\bar{\pi}_1 = \alpha_1$.

Так как $\beta_1\varkappa_1\tau_1\bar{\alpha}_1 = \beta_1 d_1\bar{\alpha}_1 = d\alpha_1\bar{\alpha}_1 = 0$, то $\tau_1\bar{\alpha}_1 = 0$, и, следовательно, существует такое отображение $\xi_2 : K\alpha_1 \to Kd_1$, что $\bar{\alpha}_1 = \sigma_1\xi_2$ (отображение ξ_2 является, очевидно, мономорфизмом). Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K\alpha_1 \arrow[r, "\bar{\alpha}_1"] \arrow[d, "\xi_2"'] & Z_1' \arrow[r, "\bar{\pi}_1"] \arrow[d, equal] & K\alpha_2 \arrow[r] & \varnothing \\
Kd_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & Z_1' \arrow[r, "\tau_1"] & Id_1 &
\end{tikzcd}$$

и, следовательно, существует такой эпиморфизм $\eta_2 : K\alpha_2 \to Id_1$, что $\eta_2\bar{\pi}_1 = \tau_1$. Заметим теперь, что

$$\beta_1\varkappa_1\eta_2\bar{\pi}_1 = \beta_1\varkappa_1\tau_1 = \beta_1 d_1 = d\alpha_1,$$

$$\beta_1\iota_2\mu_2\bar{\pi}_1 = d\psi_2\mu_2\bar{\pi}_1 = d\bar{\alpha}_2\bar{\pi}_1 = d\alpha_1,$$

и потому $\varkappa_1\eta_2 = \iota_2\mu_2$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K\alpha_2 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & D_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\iota_2"] & Kd_2 \arrow[r] & \varnothing \\
Id_1 \arrow[r, "\varkappa_1"] & Z_1 \arrow[r, "\pi_1"] & Fd_1 &
\end{tikzcd}$$

и, следовательно, существует такое отображение $\mathcal{L}_2 : Kd_2 \to Fd_1$, что $\mathcal{L}_2\delta_2 = \pi_1\iota_2$.

Построение отображения $\mathcal{L}_1$. Мы ограничимся лишь перечислением диаграмм и отображений, с помощью которых строится отображение $\mathcal{L}_1$, не проводя детали доказательства. Рассматривается диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & Id_1 \arrow[r, "\varkappa_1"] \arrow[d, equal] & Z_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & Fd_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & Id_1 \arrow[r, "\beta_1\varkappa_1"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\bar\beta_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_1"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & F\beta_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & F\beta_1 \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

Так как $\psi_1 d j_1 = 0$, то $\psi_1 d = \iota_1 \alpha_2$, где $\iota_1 : Z_2' \to D_1$. Далее, имеют место точные последовательности

$$\varnothing \longrightarrow F\beta_1 \xrightarrow{\bar\sigma_2} Z_2 \xrightarrow{\bar\beta_2} F\,\beta_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow Kd_2 \xrightarrow{\sigma_2} Z_2' \xrightarrow{\tau_2} Id_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow Id_2 \xrightarrow{\varkappa_2} Z_2 \xrightarrow{\pi_2} Fd_2 \longrightarrow \varnothing,$$

причем

$$\varkappa_2 \tau_2 = d_2, \quad \bar\sigma_2 \bar\beta_1 = \beta_2,$$

$$\bar\beta_2 = \xi_1 \pi_2, \text{ где } \xi_1 : Fd_2 \longrightarrow F\beta_2,$$

$$\varkappa_2 = \bar\sigma_2 \eta_1, \text{ где } \eta_1 : Id_2 \longrightarrow F\beta_1,$$

и $\eta_1 \tau_2 = \mu_1 \iota_1$. Поэтому существует такое отображение $\mathscr{L}_1 : Kd_2 \to Fd_1$, что $\delta_1 \mathscr{L}_1 = \iota_1 \sigma_2$.

Для того чтобы убедиться в справедливости равенства $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$, достаточно заметить, что

$$\delta_1 \mathscr{L}_1 \delta_2 = \iota_1 \sigma_2 \delta_2 = \iota_1 \alpha_2 \psi_2 = \psi_1 d\, \psi_2 = \psi_1 \beta_1 \iota_2 = \delta_1 \pi_1 \iota_2 = \delta_1 \mathscr{L}_2 \delta_2.$$

Отметим, что в G-градуированной категории можно построить отображения $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ той же степени, что и отображение d, если только отображения α_1, α_2, β_1, β_2 имеют степень нуль.

Мы полагаем $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 : Kd_2 \to Fd_1$.

Теперь остается лишь доказать точность последовательности $\operatorname{Ker} d \xrightarrow{\omega_2} \operatorname{Ker} d_2 \xrightarrow{\mathscr{L}} \operatorname{Coker} d_1$, поскольку точность второй части $\operatorname{Ker} d_2 \xrightarrow{\mathscr{L}} \operatorname{Coker} d_1 \to \operatorname{Coker} d$ интересующей нас последовательности будет непосредственно следовать из соображений двойственности. Прежде всего заметим, что $\alpha_2 \sigma = \sigma_2 \omega_2$, где $\sigma : \operatorname{Ker} d \to Z'$. Отсюда вытекает, что

$$\delta_1 \mathscr{L} \omega_2 = \iota_1 \sigma_2 \omega_2 = \iota_1 \alpha_2 \sigma = \psi_1 d \sigma = 0.$$

Следовательно, $\mathscr{L}\omega_2 = 0$. Рассмотрим, далее, точные последовательности

$$\varnothing \longrightarrow K\omega_2 \xrightarrow{\varrho_1} \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\varphi_1} I\omega_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow I\omega_2 \xrightarrow{\lambda_1} \operatorname{Ker} d_2 \xrightarrow{\nu_1} F\omega_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow K\mathscr{L} \xrightarrow{\varrho_2} \operatorname{Ker} d_2 \xrightarrow{\varphi_2} I\mathscr{L} \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow I\mathscr{L} \xrightarrow{\lambda_2} \operatorname{Coker} d_1 \xrightarrow{\nu_2} F\mathscr{L} \longrightarrow \varnothing,$$

где $\lambda_1\varphi_1 = \omega_2$ и $\lambda_2\varphi_2 = \mathscr{L}$. Кроме того, $\varphi_2\lambda_1 = 0$, поскольку $?\,_2\varphi_2\lambda_1\varphi_1 = \mathscr{L}\omega_2 = 0$. Следовательно, существует такое отображение $\theta : I\omega_2 \to K\mathscr{L}$, что $\varrho_2\theta = \lambda_1$. Отображение θ является, очевидно, мономорфизмом.

Нам нужно теперь показать, что мономорфизм θ является одновременно и эпиморфизмом. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & Ka_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\bar{\mu}_2"'] & Ka_2 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "\bar{\psi}_2"] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}_2"'] & D_2 \arrow[r, "\varphi_2\delta_2"] \arrow[d, "\delta_2"] & I\mathscr{L} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & K\mathscr{L} \arrow[r, "\varrho_2"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d] & I\mathscr{L} \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Так как $\pi_1\iota_2\bar{\psi}_2 = \mathscr{L}\delta_2\bar{\psi}_2 = \mathscr{L}\varrho_2\bar{\delta}_2 = 0$, то $\iota_2\bar{\psi}_2 = \varkappa_1 u$, где $u : E_2 \to Id_1$. Отображение u эпиморфно, поскольку $\varkappa_1 u\bar{\mu}_2 = \iota_2\bar{\psi}_2\bar{\mu}_2 = \iota_2\mu_2 = \varkappa_1\eta_2$ и, следовательно, $u\bar{\mu}_2 = \eta_2$.

Докажем теперь существование отображения $\bar{r} : \operatorname{Ker} d \to E_2$, для которого имеет место точная последовательность $\varnothing \to \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\bar{r}} E_2 \xrightarrow{u} Id_1 \to \varnothing$. Так как $\tau_2\ {}_2\sigma = 0$, то $\sigma = \psi_2 r$, где $r : \operatorname{Ker} d \to D_2$. Далее, так как $\delta_1\ {}_2\varphi_2\delta_2 r = \psi_1 d\psi_2 r = \psi_1 d\sigma = 0$, то $\varphi_2\delta_2 r = 0$, и, следовательно, существует такое отображение $\bar{r} : \operatorname{Ker} d \to E_2$, что $r = \bar{\psi}_2\bar{r}$. Рассмотрим теперь точную последовательность

$$\varnothing \longrightarrow Ku \xrightarrow{\sigma_u} E_2 \xrightarrow{u} Id_1 \longrightarrow \varnothing.$$

Принимая во внимание, что $\beta_1\varkappa_1 u\bar{r} = \beta_1\iota_2\bar{\psi}_2\bar{r} = d\psi_2\bar{r} = d\sigma = 0$, мы получим, что $u\bar{r} = 0$ и, следовательно, $\bar{r} = \sigma_u\Omega$, где $\Omega : \operatorname{Ker} d \to Ku$. С другой стороны, в силу точности последовательностей

$$\varnothing \longrightarrow \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\bar{r}} E_2 \xrightarrow{v} F\bar{r} \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\psi_2\bar{\psi}_2} Z' \xrightarrow{s} F\psi_2\bar{\psi}_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\sigma} Z' \xrightarrow{\tau} Id \xrightarrow{\cdot} \varnothing,$$

а также в силу соотношения $\sigma = \psi_2\bar{\psi}_2\bar{r}$ имеет место точная последовательность

$$\varnothing \longrightarrow F\bar{r} \xrightarrow{n} Id \xrightarrow{m} F\psi_2\bar{\psi}_2 \longrightarrow \varnothing,$$

причем $nv = \tau\psi_2\bar{\psi}_2$. Далее,

$$\varkappa nv\sigma_u = \varkappa\tau\psi_2\bar{\psi}_2\sigma_u = d\psi_2\bar{\psi}_2\sigma_u = \beta_1\iota_2\bar{\psi}_2\sigma_u = \beta_1\varkappa_1 u\sigma_u = 0,$$

так что $v\sigma_u = 0$, и, следовательно, существует такое отображение $\Omega' : Ku \to \operatorname{Ker} d$, что $\bar{r}\Omega' = \sigma_u$. Легко убедиться в том, что $\Omega' = \Omega^{-1}$

Тем самым точность последовательности $\varnothing \to \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\bar{r}} E_2 \xrightarrow{u} Id_1 \to \varnothing$ доказана.

Рассматривая, наконец, коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & K\eta_2 \arrow[r] \arrow[d] & Ka_2 \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "\bar{\mu}_2"] & Id_1 \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & \operatorname{Ker} d \arrow[r, "\bar{r}"] \arrow[d, "\bar{\delta}_2\bar{r}"'] & E_2 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\bar{\delta}_2"] & Id_1 \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & K\mathscr{L} \arrow[r, "="] \arrow[d] & K\mathscr{L} \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

легко убедиться, что первый слева столбец этой диаграммы является точной последовательностью, так что, в частности, отображение $\bar{\delta}_2\bar{r}$ является эпиморфизмом. Мы покажем сейчас, что $\theta\varphi_1 = \bar{\delta}_2\bar{r}$. Действительно,

$$\sigma_2\varrho_2\theta\varphi_1 = \sigma_2\lambda_1\varphi_1 = \sigma_2\omega_2 = \alpha_2\sigma = \sigma_2\psi_2\bar{r} = \sigma_2\delta_2\bar{\psi}_2\bar{r} = \sigma_2\varrho_2\bar{\delta}_2\bar{r}$$

и потому $\theta\varphi_1 = \bar{\delta}_2\bar{r}$. Следовательно, отображение θ эпиморфно. Тем самым теорема 5.8 полностью докаэана.

Последние три леммы относятся к коммутативной диаграмме

$$
\text{(V)}\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varrho_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varrho_0"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A \arrow[r, "\varrho^0"] \arrow[d, "\varphi"'] & A^2 \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "\varphi^2"'] & A^1 \arrow[d, "\varphi^1"'] \\
B_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & B_2 \arrow[r, "\lambda_0"] & B \arrow[r, "\lambda^0"] & B^2 \arrow[r, "\lambda^1"] & B^1
\end{tikzcd}
$$

с точными строками.

ТЕОРЕМА 5.9 (Лемма о пяти отображениях). *Если отображение φ_1 эпиморфно, а отображение φ^2 мономорфно, то* $\operatorname{Ker}\varphi \approx \operatorname{Im}\varrho_0\sigma(\varphi_2)$, *где* $\sigma(\varphi_2) : \operatorname{Ker}\varphi_2 \to A_2$.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. *Если отображение φ_1 эпиморфно, а отображения φ_2 и φ^2 мономорфны, то отображение φ мономорфно.*

СЛЕДСТВИЕ 5.11. *Если отображение φ_1 является эпиморфизмом, отображение φ^1 — мономорфизмом, а отображения φ_2 и φ^2 — эквивалентностями, то отображение φ является эквивалентностью.*

Добавление редактора

К части I

Основные результаты последнего параграфа можно существенно обобщить. При формулировке этих обобщений (принадлежащих В. Г. Болтянскому и М. М. Постникову) удобно вместо диаграмм изображать их *схемы*, обозначая знаком * место диаграммы, в котором находится некоторый объект, не предполагаемый, вообще говоря, нулевым. Все диаграммы, схемы которых рассматриваются, предполагаются коммутативными, а все их строки и столбцы, за исключением строк или столбцов, обведенных рамкой, предполагаются точными.

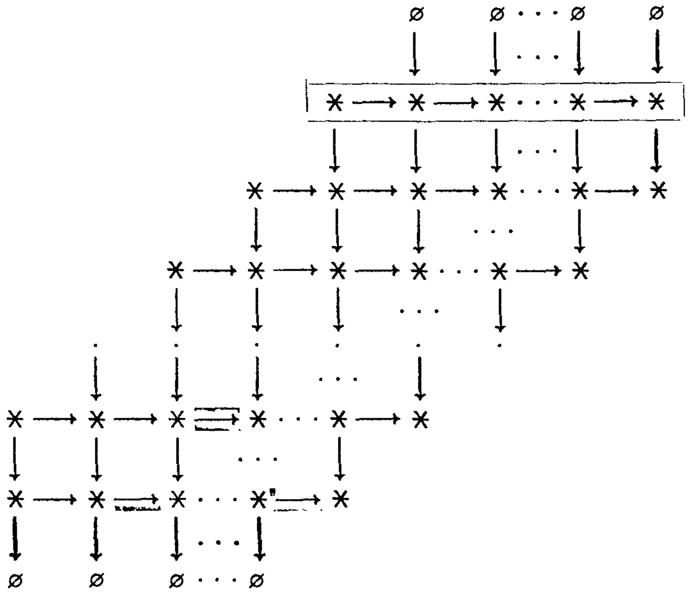
Например, схема диаграммы, рассмотренной в теореме 5.5, имеет вид

$$
\text{(1)}\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\boxed{\varnothing} \arrow[r] & \boxed{*} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{*} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{*} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\varnothing} \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

и теорема 5.5 утверждает, что *в схеме* (1) *обведенная рамкой строка является точной последовательностью.*

Обобщением этого утверждения служит следующее предложение:
в схеме

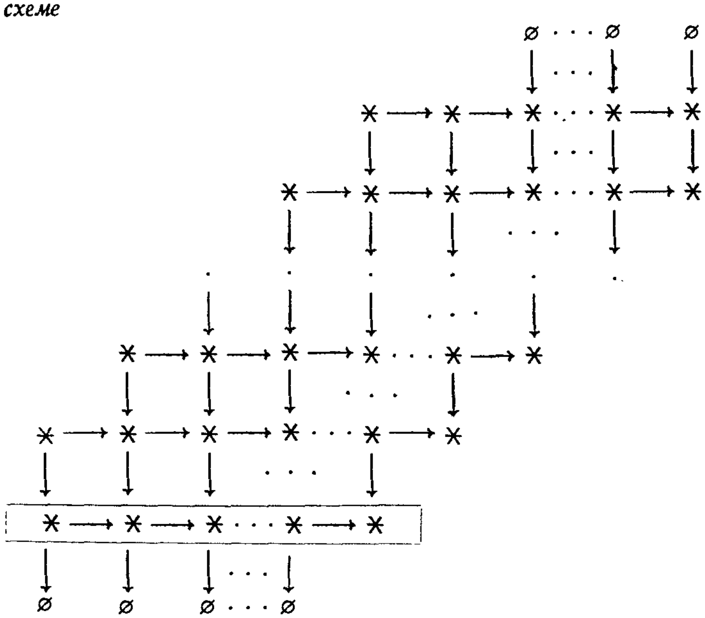
(2)



обведенная рамкой строка является точной последовательностью (число l строк находящихся под обведенной строкой, не меньше двух, $l \geq 2$; длина k обведенной строки не меньше трех, $k \geq 3$).

Двойственное утверждение гласит:
в схеме

(3)



обведенная рамкой строка является точной последовательностью (число l' строк, находящихся над обведенной строкой, не меньше двух, $l' \geq 2$; длина k обведенной строки не меньше трех, $k \geq 3$).

«Сращивая» схемы (2) и (3), мы получим схему

$$
(4)\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \varnothing\cdots & \varnothing & \varnothing \\
 & & & & & & & & & & \downarrow\cdots & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & & & & & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast \\
 & & & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow\cdots & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & & & & \ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast \\
 & & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & \\
 & & & & & \ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & \\
 & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & \\
 & & & & \ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & \\
 & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & & \\
 & & & & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & & \\
 & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow\cdots & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 & & & \ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & & \\
 & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & & & \\
 & & \ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & & & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & & & & & \\
\ast\to & \ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & & & & & & \\
\ast\to & \ast\to & \ast\cdots & \ast\to & \ast & & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow\cdots & \downarrow & & & & & & & & & \\
\varnothing & \varnothing & \varnothing\cdots & \varnothing & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Оказывается, что *если в схеме* (4) *обведенная рамкой строка полуточна* (т. е. композиция любых двух последовательных отображений равна нулю), *то эта строка точна.*

Последнее утверждение имеет наибольшую общность; сформулированные выше предложения, относящиеся к схемам (2) и (3), почти непосредственно из него следуют.

Заметим еще, что транспонируя схемы (2), (3) и (4), мы получим новые схемы с обведенным столбцом. Для этих схем также имеют место соответствующие утверждения.

Для того чтобы показать, что теорема 5.5 вытекает из предложения, относящегося к схеме (2), достаточно дополнить схему (1) до следующей схемы:

$$\begin{tikzcd}
 & & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
 & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

и рассмотреть ее часть, обведенную пунктирной линией. Отсюда, между прочим, вытекает, что теорему 5.5 можно усилить, заменив схему (1) схемой

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] & * & \\
 & \varnothing & & &
\end{tikzcd}$$

Сформулированная выше лемма 5.7 также является непосредственным следствием рассматриваемого предложения. Действительио, эта лемма утверждает, что *в схеме*

(5)
$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
 & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
 & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] & {} \\
\varnothing \arrow[r] & {} & &
\end{tikzcd}$$

обведенная рамкой строк ... *,почной последовательностью*, но схему (5) мы можем включить ... ую схему:

$$
\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
 & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[d] \\
\square \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \\
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] & \ast & \\
\varnothing & & &
\end{tikzcd}
$$

где знаком □ обозначено ядро соответствующего отображения. Остается заметить, что эта схема имеет вид (2) [точнее говоря, имеет вид (2) после удаления левого верхиего знака ∅].

Аналогичным образом [с помощью предложеиия, относящегося к схеме (4)] можно доказать и теорему 5.9. Для простоты мы ограничимся рассмотрением наиболее важного следствия 5.11 этой теоремы. Это следствие по существу утверждает, что *в схеме*

$$
\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] \\
\ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[d] \\
\ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \\
\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

обведенный рамкой столбец является точной последовательностью. Включим эту схему в следующую схему:

(6)
$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[d] & \\
 & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast & \\
\varnothing \arrow[r] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \arrow[r] & \varnothing & & \\
\varnothing \arrow[r] & \varnothing \arrow[r] & \varnothing & & & &
\end{tikzcd}
$$

Схема (6) имеет вид схемы, транспонированной к схеме (4), причем обведенный рамкой столбец, очевидно, полуточен. Тем самым следствие 5.11 доказано.

Другой тип «диаграммно-схемных» теорем относится к задаче «дополнения диаграмм». Примером теоремы такого типа может служить, например, следующее предложение :

схему вида

$$\begin{tikzcd} \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] & \varnothing \\ \ast \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \ast & \end{tikzcd}$$

можно однозначно дополнить до схемы

$$\begin{tikzcd} \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ \ast \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \ast & \end{tikzcd}$$

Комбинируя это предложение с указанными выше предложениями, можно получить целый ряд более или менее сложных теорем. Например, имеют место следующие утверждеиия :

(а) *схему вида*

$$\begin{tikzcd} & \varnothing \arrow[d] & & \\ \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] & \varnothing \\ \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] & \ast & \\ \varnothing & & & \end{tikzcd}$$

можно однозначно дополнить до схемы

$$\begin{tikzcd} & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\ \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] & \ast & \\ \varnothing & & & \end{tikzcd}$$

(б) *схему вида*

$$\begin{tikzcd} & & & \varnothing \arrow[d] & \\ & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[d] & \\ \varnothing \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \ast \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ & \ast \arrow[d] & \ast \arrow[d] & \ast \arrow[d] & \\ & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \end{tikzcd}$$

можно однозначно дополнить до схемы

$$\begin{tikzcd}
 & & & \varnothing \arrow[d] & \\
 & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

Специальным случаем последнего утверждения является, в частности, вторая теорема об изоморфизмах, которая утверждает, что

схему вида

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & & \\
 & * \arrow[r, equal] \arrow[d] & * \arrow[d] & & \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varnothing \\
 & * \arrow[d] & * \arrow[d] & * & \\
 & \varnothing & \varnothing & &
\end{tikzcd}$$

можно однозначно дополнить до схемы

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & & \\
 & * \arrow[r, equal] \arrow[d] & * \arrow[d] & & \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & &
\end{tikzcd}$$

Этими примерами, конечно, не исчерпываются все возможные типы теорем «о дополнении». Например, к числу таких теорем относятся лемма 5.6 и теорема 5.8, которые также допускают весьма широкие обобщения.

В заключение заметим, что, кроме теорем «о точности» и теорем «о дополнении», возможны и принципиально иные теоремы, также относящиеся к общим диаграммам. Однако даже формулировка этих теорем представляется здесь неуместной.

Часть II

ГОМОЛОГИИ В ГРАДУИРОВАННЫХ КАТЕГОРИЯХ

1. Абстрактные гомологии. На протяжении всей этой части мы будем иметь дело с объектами и отображениями некоторой фиксированной G-градуированной категории $(\mathcal{A}, G)$, которую мы будем обозначать просто через $\mathcal{A}$. Степени отображений здесь будут играть более существенную роль, чем в остальных частях, и потому будут указываться явно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара (A, d), где $A \in \mathcal{A}$, $d \in H_g(A, A)$, называется *g-дифференциальным объектом*, если $d^2 = 0$. Отображение d называется *дифференциалом*.

Рассмотрим разложение дифференциала $A \xrightarrow{d} A$ произвольного g-дифференциального объекта (A, d)

$$\varnothing \longrightarrow Z \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\tau} B \longrightarrow \varnothing,$$
$$B \xrightarrow{\theta} B',$$
$$\varnothing \longrightarrow B' \xrightarrow{\varkappa} A \xrightarrow{\pi} Z' \longrightarrow \varnothing.$$

Напомним, что отображения $\sigma, \tau, \varkappa, \pi$ имеют степень нуль, тогда как отображение θ имеет степень g. Напомним также, что это разложение единственно лишь с точностью до некоторого транзитивного семейства эквивалентностей степени нуль (см. теорему I, 1.2).

Так как $(\varkappa\theta)(\tau\varkappa)(\theta\tau) = (\varkappa\theta\tau)(\varkappa\theta\tau) = d^2 = 0$, то $\tau\varkappa = 0$, и, следовательно, существует, и притом только одно, такое отображение $\omega : B' \to Z$ степени нуль, что $\sigma\omega = \varkappa$.

Отсюда же следует существование и единственность такого отображения $\varphi : Z' \to B$ степени нуль, что $\varphi\pi = \tau$. Эти отображения вместе с отображением $\pi\sigma : Z \to Z'$ степени нуль можно объединить в следующую последовательность:

$$\varnothing \longrightarrow B' \xrightarrow{\omega} Z \xrightarrow{\pi\sigma} Z' \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow \varnothing. \tag{1}$$

ЛЕММА 1.1. *Последовательность* (1) *точна.*

Так как отображение $\pi\sigma$ имеет степень нуль, то для него существует разложение вида

$$\varnothing \longrightarrow B' \xrightarrow{\omega} Z \xrightarrow{\lambda} H \longrightarrow \varnothing,$$
$$\varnothing \longrightarrow H \xrightarrow{\zeta} Z' \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow \varnothing, \qquad \zeta\lambda = \pi\sigma.$$

Рассмотрим отображение $D = \omega\theta\varphi : Z' \to Z$ степени g. Очевидно, что

$$\operatorname{Ker} D = H = \operatorname{Coker} D, \tag{2}$$

т. е. имеет место точная последовательность

$$\varnothing \longrightarrow H \xrightarrow{\zeta} Z' \xrightarrow{D} Z \xrightarrow{\lambda} H \longrightarrow \varnothing. \tag{3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объекты Z и Z' называются объектами *циклов* дифференциального объекта (A, d) и обозначаются через $Z(A)$ и $Z'(A)$ соответственно. Объекты B и B' называются объектами *границ* дифференциального объекта (A, d) и обозначаются через $B(A)$ и $B'(A)$ соответственно. Объект H называется объектом *гомологий* дифференциального объекта (A, d) и обозначается через $H(A)$.

Когда это не может вызвать недоразумения, мы будем вместо $Z(A)$ писать просто Z и т. п.

Для двойственного дифференциального объекта (A^*, d^*) двойственной категории $\mathcal{A}^*$ мы имеем

$$Z(A^*) = [Z'(A)]^*, \quad B(A^*) = [B'(A)]^*,$$
$$Z'(A^*) = [Z(A)]^*, \quad B'(A^*) = [B(A)]^*,$$
$$H(A^*) = [H(A)]^*.$$

Последнее равенство показывает, что определение объекта $H(A)$ двойственно самому себе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображением $f: (A, d) \to (\bar{A}, \bar{d})$ дифференциальных объектов называется такое отображение $f \in H_h(A, \bar{A})$, что $fd = \bar{d}f$.

Достаточно ограничиться отображениями степени нуль. Рассмотрение более общих отображений не даст ничего нового.

Заметим, что любое отображение $f: (A, d) \to (\bar{A}, \bar{d})$ определяет коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "z"'] & A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\delta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & \bar{Z} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & \bar{A} \arrow[r, "\bar{\tau}"] & \bar{B} \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & B' \arrow[r, "\varkappa"] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "z'"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & \bar{B}' \arrow[r, "\bar{\varkappa}"] \arrow[u, "b'"] & \bar{A} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \bar{Z}' \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & H \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "f_*"'] & Z' \arrow[r, "D"] \arrow[d, "z'"] & Z \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "z"] & H \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & \bar{H} \arrow[r, "\bar{\zeta}"] & \bar{Z}' \arrow[r, "\bar{D}"] & \bar{Z} \arrow[r, "\bar{\lambda}"] & \bar{H} \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "b"'] & B' \arrow[d, "b'"] \\
\bar{B} \arrow[r, "\bar{\theta}"] & \bar{B}'
\end{tikzcd}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность g-дифференциальных объектов и их отображений

$$\varnothing \longrightarrow (A_1, d_1) \xrightarrow{\alpha} (A, d) \xrightarrow{\beta} (A_2, d_2) \longrightarrow \varnothing$$

называется точной, если точна последовательность

$$\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \longrightarrow \varnothing.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любой точной последовательности*

$$\varnothing \longrightarrow (A_1, d_1) \xrightarrow{\alpha} (A, d) \xrightarrow{\beta} (A_2, d_2) \longrightarrow \varnothing$$

g-дифференциальных объектов существует такое отображение $\partial : H_2 \to H_1$, что имеет место точная последовательность

$$(4) \qquad H_1 \xrightarrow{\alpha_*} H \xrightarrow{\beta_*} H_2 \xrightarrow{\partial} H_1 \xrightarrow{\alpha_*} H \xrightarrow{\beta_*} H_2.$$

Степень отображения ∂ равна g.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что имеют место точные последовательности $Z_1' \xrightarrow{z_1'} Z' \xrightarrow{z_2'} Z_2' \to \varnothing$ и $\varnothing \to Z_1 \xrightarrow{z_1} Z \xrightarrow{z_2} Z_2$. Поэтому теорема 1.2 непосредственно следует из теоремы I, 5.8.

Теперь легко воспроизводится вся обычная теория гомологий. В частности, можно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображения $f, g : (A, d) \to (\bar{A}, \bar{d})$ называются *гомотопными* (обозначение: $f \simeq g$), если существует такое отображение $s : A \to \bar{A}$, степень которого противоположна степени дифференциала d, что

$$\bar{d}s + sd = f - g.$$

Как хорошо известно, отношение гомотопности является отношением эквивалентности.

2. Комплексы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность

$$A : \ldots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

объектов и отображений категории $\mathcal{A}$ называется комплексом, если $d^n d^{n-1} = 0$. (Мы здесь предполагаем, что $\mathcal{A}$ является точной категорией. В случае G-градуированной категории следует дополнительно потребовать, чтобы степени всех отображений d^k были равны нулю.)

Как обычно, мы положим $Z^n = \operatorname{Ker} d^n$, $B^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$, $B'^n = \operatorname{Coim} d^{n-1}$, $Z'^n = \operatorname{Coker} d^n$.

При этом для каждого n имеет место точная последовательность

$$(1^n) \qquad \varnothing \longrightarrow B'^n \xrightarrow{\omega^n} Z^n \xrightarrow{\pi^n \sigma^n} Z'^n \xrightarrow{\varphi^n} B^n \longrightarrow \varnothing$$

и

$$H^n = \operatorname{Coker} \omega^n = \operatorname{Ker} \varphi^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображением $f : A \to \bar{A}$ комплекса A в комплекс $\bar{A}$ называется такое семейство $\{f^n\}$ отображений $f^n : A^n \to \bar{A}^n$, что $\bar{d}^n f^n = f^{n+1} d^n$.

Легко видеть, что обычные формальные утверждения теории гомологий комплексов сохраняются и в описанной общей ситуации.

3. Построение градуированных категорий. В этом параграфе мы укажем два метода построения категорий. С помощью первого метода строится категория $d(\mathcal{A}, G)$, объектами которой служат дифференциальные объекты некоторой заданной G-градуированной категории $(\mathcal{A}, G)$. Второй метод позволяет построить G-градуированную категорию по заданным точной категории $\mathcal{A}$ и абелевой группе G (получающаяся категория соответствует категории комплексов над некоторой точной категорией).

Пусть $(\mathcal{A}, G)$ — произвольная G-градуированная категория. Объектами категории $d(\mathcal{A}, G)$ являются пары (A, d), представляющие собой g-дифференциальные объекты из категории $(\mathcal{A}, G)$. Нулевым объектом является пара $(\varnothing, 0)$. Группа $H_h((A_1, d_1), (A_2, d_2))$ состоит из всех отображений g-дифференциальных объектов $f: (A_1, d_1) \rightarrow (A_2, d_2)$ степени h, а гомоморфизм $H_{h_2}((A_2, d_2), (A_3, d_3)) \otimes H_{h_1}((A_1, d_1), (A_2, d_2)) \rightarrow H_{h_1+h_2}((A_1, d_1), (A_3, d_3))$ определяется обычной композицией отображений. Легко убедиться, что $d(\mathcal{A}, G)$ действительно является G-градуированной категорией.

Это построение аналогично построению категории модулей над кольцом двойных чисел $\Gamma = (\Lambda, d)$, исходя из категории модулей над кольцом Λ.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольная точная категория, а G — произвольная абелева группа. Объектами новой категории мы будем считать всевозможные функции A, определенные на группе G и принимающие значения на объектах категории $\mathcal{A}$. Нулевым объектом является функция $\varnothing$, определяемая формулой $\varnothing(g) = \varnothing$ для всех $g \in G$. Произвольному элементу $g' \in G$ и любой паре объектов A и B отнесем множество $H_{g'}(A, B)$ всех таких функций α, определенных на группе G, что $\alpha(g) \in H(A(g), B(g + g'))$ для каждого элемента $g \in G$. Это множество является абелевой группой относительно обычной операции сложения функций. Композиции таких отображений определяются очевидным образом.

Легко проверить, что мы снова получаем G-градуированную категорию.

В случае, когда группой G является группа Z целых чисел, 1-дифференциальные объекты построенной категории являются не чем иным, как комплексами точной категории $\mathcal{A}$ в смысле предыдущего параграфа.

4. Функторы и гомологии. Здесь, так же как и в дальнейшем, мы под термином «функтор» будем понимать лишь аддитивный функтор (см. основной текст). Это изменение стандартной терминологии [см., например, Eilenberg S., MacLane S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231—294] вызвано наличием в точных категориях дополнительного аддитивного строения. В этом параграфе мы будем рассматривать лишь функторы одного аргумента (ср. § III, 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность ковариантных функторов $T = \{T^n\}$ называется *связанной*, если для каждой точной последовательности

$$\varnothing \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow \varnothing$$

определены такие отображения $T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$, что имеет место полуточная последовательность[1]

$$\ldots \longrightarrow T^n(A) \longrightarrow T^n(A'') \longrightarrow T^{n+1}(A') \longrightarrow T^{n+1}(A) \longrightarrow \ldots$$

и для каждой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} \varnothing & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & \varnothing \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \varnothing & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & \varnothing \end{array}$$

с точными строками имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \longrightarrow & T^{n+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(B'') & \longrightarrow & T^{n+1}(B') \end{array}$$

Для контравариантных функторов следует переставить объекты A' и A''.

Определим теперь для любой точной последовательности

$$(1) \qquad \varnothing \longrightarrow A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^p \longrightarrow \varnothing, \qquad p > 1,$$

итерированное связывающее отображение $T^{n-p}(A^p) \to T^{n-1}(A^0)$. С этой целью разложим последовательность (1) в точные последовательности

$$\begin{array}{l} \varnothing \longrightarrow Z^{p-1} \longrightarrow A^{p-1} \longrightarrow A^p \longrightarrow \varnothing\,, \\ \varnothing \longrightarrow Z^{p-2} \longrightarrow A^{p-2} \longrightarrow Z^{p-1} \longrightarrow \varnothing\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varnothing \longrightarrow A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow Z^2 \longrightarrow \varnothing\,. \end{array}$$

Этим последовательностям соответствуют связывающие отображения

$$T^{n-p}(A^p) \longrightarrow T^{n-(p-1)}(Z^{p-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow T^{n-1}(A^0).$$

Композиция этих отображений и называется итерированным связывающим отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любой коммутативной диаграммы вида* (D) (см. теорему I, 5.5) *с точными столбцами и строками и для любой связанной последовательности ковариантных функторов* $T = \{T^n\}$ *имеет место антикоммутативная диаграмма*

---

[1] Полуточные последовательности автор называет последовательностями второго порядка. — *Прим. ред.*

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1}(C_2) & \xrightarrow{\varphi_1} & T^n(A_2) \\ \varphi_2\downarrow & & \downarrow\psi_1 \\ T^n(C_1) & \xrightarrow{\psi_2} & T^{n+1}(A_1) \end{array}$$

(т. е. имеет место соотношение $\psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем пользоваться обозначениями, введенными в теореме I, 5.5. В первую очередь мы рассмотрим следующие точные последовательности, задаваемые диаграммой (D) (эти последовательности двойственны к последовательностям, рассмотренным при доказательстве теоремы I, 5.5):

$$\begin{array}{ll}
\varnothing \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{\zeta} B_2 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\varrho} C \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\varkappa_2} B_2 \xrightarrow{\varrho_2} C_2 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C_2 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow K \xrightarrow{\bar\sigma} B \xrightarrow{\varrho_2\zeta} C_2 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow K \xrightarrow{\bar\sigma} B \xrightarrow{\varrho_2\zeta} C_2 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow B_1 \xrightarrow{u_1} K \xrightarrow{v_1} A_2 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{u_2} K \xrightarrow{v_2} C_1 \longrightarrow \varnothing, \\
\qquad\qquad \bar\sigma u_1 = \eta, & \bar\sigma u_2 = \varkappa, \\
\qquad\qquad \zeta\bar\sigma = \varkappa_2 v_1, & \varrho\bar\sigma = \alpha v_2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\varnothing \longrightarrow A \xrightarrow{u_2} K \xrightarrow{v_2} C_1 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow B_1 \xrightarrow{u_1} K \xrightarrow{v_1} A_2 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\mu} A_2 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varkappa_1} B_1 \xrightarrow{\varrho_1} C_1 \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{u_2\lambda} K \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{u_2\lambda} K \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow \varnothing, \\
\varnothing \longrightarrow A_2 \xrightarrow{u_3} F \xrightarrow{v_3} C_1 \longrightarrow \varnothing, & \varnothing \longrightarrow C_1 \xrightarrow{u_4} F \xrightarrow{v_4} A_2 \longrightarrow \varnothing, \\
\qquad\qquad u_3\mu = \pi u_2, & u_4\varrho_1 = \pi u_1, \\
\qquad\qquad v_3\pi = v_2, & v_4\pi = v_1.
\end{array}$$

Легко видеть, что $v_4u_3 = e_{A_2}$ и $v_3u_4 = e_{C_1}$.

Для объекта R, рассматривавшегося при доказательстве теоремы I, 5.5, определено отображение $d = u_4m_3 + u_3m_4 : R \to F$, являющееся, очевидно, эквивалентностью. Кроме того, имеют место следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xrightarrow{n_3\theta^{-1}} & R & \xrightarrow{m_4} & A_2 \\ \| & & \downarrow d & & \| \\ A_2 & \xrightarrow{u_3} & F & \xrightarrow{v_4} & A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{n_4} & R & \xrightarrow{m_3} & C_1 \\ \| & & \downarrow d & & \| \\ C_1 & \xrightarrow{u_4} & F & \xrightarrow{v_3} & C_1 \end{array}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству предложения 4.1. Прежде всего мы покажем, что

$$n_3\theta^{-1}m_4 + n_4m_3 = e_R \text{ и } u_3v_4 + u_4v_3 = e_F.$$

Пусть $n_3\theta^{-1}m_4 + n_4m_3 + \chi = e_R$. Тогда $\chi n_4 = 0$ и, следовательно, $\chi = \chi' m_4$. Поэтому $(\chi' + n_3\theta^{-1})\, m_4 + n_4m_3 = e_R$, т. е. $\chi' + n_3\theta^{-1} = n_3\theta^{-1}$. Таким образом, $\chi' = 0$ и потому $\chi = 0$. Соотношение $u_3v_4 + u_4v_3 = e_F$ доказывается аналогично.

Коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "m_3"'] & F(B, A_1) \arrow[r, "\beta m_2"] \arrow[d, "m_2"] & C_2 \arrow[d, equal] \\
C_1 \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r, "\beta"] & C_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dash, "\sigma"] \arrow[d, "m_4"'] & F(B, A_1) \arrow[r, dash, "\beta m_2"] \arrow[d, "m_1"] & C_2 \arrow[d, equal] \\
A_2 \arrow[r, dash, "\varkappa_2"] & B_2 \arrow[r, dash, "\varrho_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "u_2"] & A_2 \arrow[d, "u_3"] \\
A_1 \arrow[r, "u_2\lambda"] & K \arrow[r, "\pi"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varkappa_1"] \arrow[d, equal] & B_1 \arrow[r, "\varrho_1"] \arrow[d, "u_1"] & C_1 \arrow[d, "u_4"] \\
A_1 \arrow[r, "u_1\lambda"] & K \arrow[r, "\pi"] & F
\end{tikzcd}$$

индуцируют, очевидно, коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\bar\varphi"] \arrow[d, equal] & T^n(R) \arrow[d, "T^n(m_3)"] \\
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\varphi_2"] & T^n(C_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\bar\varphi"] \arrow[d, equal] & T^n(R) \arrow[d, "T^n(m_4)"] \\
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\varphi_1"] & T^n(A_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^n(A_2) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "T^n(u_3)"'] & T^{n+1}(A_1) \arrow[d, equal] \\
T^n(F) \arrow[r, "\bar\psi"] & T^{n+1}(A_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^n(C_1) \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "T^n(u_4)"'] & T^{n+1}(A_1) \arrow[d, equal] \\
T^n(F) \arrow[r, "\bar\psi"] & T^{n+1}(A_1)
\end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает, что $\psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 = \bar\psi T^n(d)\,\bar\varphi$. Следовательно, для доказательства предложения 4.1 достаточно показать, что $\bar\psi\, T^n(d)\,\bar\varphi = 0$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & K \arrow[r, "\bar\sigma"] \arrow[d, "d^{-1}\pi"'] & B \arrow[r, "\varrho_2\zeta"] \arrow[d, "\tau"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & R \arrow[r, "\sigma"] & F(B,A_1) \arrow[r, "\beta m_2"] & C_2 \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}$$

Коммутативность правого четырехугольника этой диаграммы очевидна. Поэтому, если мы докажем, что левый четырехугольник также коммутативен, то мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, equal] & T^n(K) \arrow[d, "T^n(d^{-1})\,T^n(\pi)"] \\
T^{n-1}(C_2) \arrow[r, "\bar\varphi"] & T^n(R)
\end{tikzcd}$$

из которой следует, что $\bar\psi T^n(d)\bar\varphi = \bar\psi T^n(\pi)\bar f = 0$.

Таким образом, остается доказать, что $\sigma d^{-1}\pi = \tau\bar\sigma$. Для этого заметим, что, поскольку $\bar\sigma u_2\lambda = \eta\varkappa_1$, существует, и притом только одно, такое отображение $q: F \to F(B, A_1)$, что $q\pi = \tau\bar\sigma$. Далее, так как $\beta m_2 q\pi = \beta m_2 \tau\bar{\sigma} = \beta\varepsilon\bar{\sigma} = \beta\alpha v_2 = 0$, то $\beta m_2 q = 0$ и, следовательно, $q = \sigma d'$, где $d' : F \to R$. Принимая во внимание, что

$$\sigma d' u_3 \mu = q\pi u_2 = \tau\bar{\sigma} u_2 = \tau\varkappa = n_2\theta^{-1}\mu = \sigma n_3 \theta^{-1}\mu,$$

мы получим, что $d'u_3 = n_3\theta^{-1}$. Аналогично доказывается, что $d'u_4 = n_4$.

Пусть $dd' = e_F + \chi$. Тогда $dd'u_3 = u_3 + \chi u_3$. С другой стороны, $dd'u_3 = dn_3\theta^{-1} = u_3$. Таким образом, $\chi u_3 = 0$, так что $\chi = \chi' v_3$ и, следовательно, $dd' = e_F + \chi' v_3$. Но из соотношения

$$u_4 = dn_4 = dd'u_4 = u_4 + \chi' v_3 u_4 = u_4 + \chi'$$

вытекает, что $\chi' = 0$ и, значит, $\chi = 0$. Таким образом, $dd' = e_F$, т. е. $d' = d^{-1}$.

Следовательно, $\sigma d^{-1}\pi = \sigma d'\pi = q\pi = \tau\bar{\sigma}$. Тем самым предложение 4.1 полностью доказано.

Для произвольного дифференциального объекта (A, d) имеет место коммутативная диаграмма

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\lambda} & H \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\zeta \\ A & \xrightarrow{\pi} & Z' \end{array}$$

Объекты Z, Z' и H можно рассматривать как дифференциальные объекты с нулевыми дифференциалами. При этом соглашении все отображения, входящие в диаграмму (2), являются отображениями дифференциальных объектов.

Пусть теперь T — произвольный ковариантный функтор. Тогда $T(Z), T(Z')$ и $T(H)$ также будут объектами с нулевыми дифференциалами и, следовательно, $H(T(Z)) = T(Z)$, $H(T(H)) = T(H)$, $H(T(Z')) = T(Z')$. Поэтому коммутативная диаграмма (2) индуцирует коммутативную диаграмму

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{ccc} T(Z) & \xrightarrow{T(\lambda)} & T(H) \\ \Sigma\downarrow & & \downarrow T(\zeta) \\ H(T(A)) & \xrightarrow{\Pi} & T(Z') \end{array}$$

где $\Sigma = [T(\sigma)]_*$, $\Pi = [T(\pi)]_*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если функтор T точен справа* (см. § III, 3), *то существует, и притом только одно, такое отображение $\alpha : T(H) \to H(T(A))$, что $\alpha T(\lambda) = \Sigma$ и $\Pi\alpha = T(\zeta)$. Отображение α естественно относительно отображений $A \to \bar{A}$ дифференциальных объектов и является тождественным отображением, если дифференциал объекта A равен нулю. Последние два свойства также однозначно характеризуют отображение α.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функтор T точен справа, то имеет место точная последовательность

$$T(B') \xrightarrow{T(\omega)} T(Z) \xrightarrow{T(\lambda)} T(H) \longrightarrow \varnothing.$$

Мы должны показать, что $\Sigma T(\omega) = 0$. Легко видеть, что $\Sigma T(\omega) = [T(\varkappa)]_*$. Далее, поскольку функтор T точен справа, отображение $T(\theta\tau)$ является эпиморфизмом. С другой стороны, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T(B') \arrow[r, equal] \arrow[d, "T(\varkappa)"'] & T(B') \arrow[d, "s"] \\
T(A) \arrow[r, "n"] & Z'(T(A))
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
T(B') \arrow[r, equal] \arrow[d, "{[T(\varkappa)]_*}"'] & T(B') \arrow[d, "s"] \\
H(T(A)) \arrow[r, "u"] & Z'(T(A))
\end{tikzcd}$$

так что $u[T(\varkappa)]_* = nT(\varkappa)$. Но в таком случае $u[T(\varkappa)]_* T(\theta\tau) = nT(d) = 0$, ибо $Z'(T(A)) = \operatorname{Coker} T(d)$, и, следовательно, $[T(\varkappa)]_* = 0 = \Sigma T(\omega)$. Тем самым существование отображения $\alpha: T(H) \to H(T(A))$, удовлетворяющего соотношению $\alpha T(\lambda) = \Sigma$, доказано. Поскольку отображение $T(\lambda)$ является эпиморфизмом, из соотношения $\Pi\alpha T(\lambda) = \Pi\Sigma = T(\zeta)\, T(\lambda)$ вытекает, что $\Pi\alpha = T(\zeta)$.

Пусть теперь $f: (A, d) \to (\bar{A}, \bar{d})$ — произвольное отображение. Мы должны показать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(H(A)) \arrow[r, "T(f_*)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(H(\bar{A})) \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\
H(T(A)) \arrow[r, "{[T(f)]_*}"] & H(T(\bar{A}))
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Но это непосредственно следует из соотношений

$$\bar{u}[T(f)]_* \alpha T(\lambda) = \bar{u}[T(f)]_* \Sigma,$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}\bar{\alpha}\, T(f_*)\, T(\lambda) &= \bar{u}\bar{\alpha}\, T(\bar{\lambda})\, T(z) = u[T(\bar{\sigma})]_* T(z) = \\
&= \bar{n}T(\bar{\sigma})T(z) = \bar{n}T(f)T(\sigma) = \bar{u}[T(f)]_*[T(\sigma)]_* = \bar{u}[T(f)]_*\Sigma.
\end{aligned}$$

Если дифференциал объекта A равен нулю, то диаграмма (3) принимает вид

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & T(A) \arrow[d, equal] \\
T(A) \arrow[r, equal] & T(A)
\end{tikzcd}$$

и, следовательно, в этом случае отображение α действительно является тождественным отображением.

Чтобы доказать, что последние два свойства однозначно характеризуют отображение , предположим, что заданы два естественных отображения $\alpha, \beta: T(H(A)) \to H(T(A))$, являющихся тождественными отображениями, когда дифференциал объекта A равен нулю. Тогда $\alpha T(\lambda) = \Sigma = \beta T(\lambda)$ и, следовательно, $\alpha = \beta$.

Часть III

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

1. Прямые суммы. До сих пор мы старательно избегали использования прямых сумм (несмотря даже на то, что в доказательствах теоремы I, 5.5 и предложения II, 4.1 это понятие фактически уже появлялось). Мы еще не имеем удовлетворительного определения бесконечных прямых сумм и произведений объектов произвольной точной категории $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система отображений

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha$$

(где индекс α пробегает некоторое конечное множество целых чисел) называется *представлением объекта в виде прямой суммы*, если

$$p_\alpha i_\alpha = e_{A_\alpha}, \quad p_\beta i_\alpha = 0, \text{ когда } \beta \neq \alpha, \quad \text{и } \sum_\alpha i_\alpha p_\alpha = e_A.$$

Из этого определения никак не следует существование прямой суммы заданных объектов. Поэтому мы вводим следующую аксиому:

АКСИОМА V (Аксиома существования прямых сумм). Для любых двух объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ существует по крайней мере один объект $A \in \mathcal{A}$, для которого найдутся отображения

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{p_\alpha} A_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2,$$

задающие представление объекта A в виде прямой суммы объектов A_1 и A_2.

Очевидно, что эта аксиома двойственна сама себе.

Очевидно также, что в точной категории $\mathcal{A}$ с аксиомой V определена прямая сумма любого конечного числа объектов и что прямая сумма объектов определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем говорить, что точная последовательность $\varnothing \to A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \to \varnothing$ *расщепляема справа*, если существует такое отображение $\gamma: A_2 \to A$, что $\beta\gamma = e_{A_2}$. Мы будем говорить, что эта последовательность *расщепляема слева*, если существует такое отображение $\delta: A \to A_1$, что $\delta\alpha = e_{A_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Точная последовательность* $\varnothing \to A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \to \varnothing$ *тогда и только тогда расщепляема справа, когда она расщепляема слева. В этом случае существуют отображения*

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\delta} A_1,$$
$$A_2 \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\beta} A_2,$$

задающие представление объекта A в виде прямой суммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В диаграмме (D), рассматривавшейся в теореме I, 5.5, объект $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Coker}\,(\varkappa\lambda) \to C_2)$ (как было отмечено в конце доказательства этой теоремы) является прямой суммой объектов C_1 и A_2. Прямой суммой этих же объектов является и объект

$$\mathrm{Coker}\,(A_1 \to \mathrm{Ker}\,(\beta\varrho)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
C_1 & \; & C_1' \\
 & C \arrow[ul, "\beta_2"] \arrow[ur, "\beta_1"'] \arrow[d, "\mu"] & \\
C_2 \arrow[uu, "\theta_1"] \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & C_2' \arrow[uu, "\theta_2"'] \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[dl, "\delta"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

диагонали являются точными последовательностями, отображения θ_1, θ_2 — эквивалентностями и $\mu\lambda = 0$, то системы отображений

$$C_2 \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\theta_1^{-1}\beta_2} C_2, \quad C_2' \xrightarrow{\alpha_2} C \xrightarrow{\theta_2^{-1}\beta_1} C_2'$$

и

$$C_1 \xrightarrow{\alpha_1\theta_1^{-1}} C \xrightarrow{\beta_2} C_1, \quad C_1' \xrightarrow{\alpha_2\theta_2^{-1}} C \xrightarrow{\beta_1} C_1'$$

задают два представления объекта C в виде прямой суммы. Кроме того,

$$\gamma\theta_1^{-1}\sigma + \delta\theta_2^{-1}\tau = 0.$$

Пусть

$$\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C \longrightarrow \varnothing, \qquad \varnothing \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C \longrightarrow \varnothing$$

— произвольные точные последовательности, и пусть

$$B_1 \xrightarrow{i_1} B_1 + B_2 \xrightarrow{p_1} B_1, \quad B_2 \xrightarrow{i_2} B_1 + B_2 \xrightarrow{p_2} B_2$$

— прямая сумма объектов B_1 и B_2. Тогда имеют место отображение $\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2 : B_1 + B_2 \to C$ и точная последовательность

$$\varnothing \longrightarrow R \xrightarrow{\sigma} B_1 + B_2 \xrightarrow{\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2} C \longrightarrow \varnothing.$$

Так как $(\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2) l_j \alpha_j = 0$, $j = 1, 2$, то существуют такие отображения $\varkappa_1 : A_1 \to R$, $\varkappa_2 : A_2 \to R$, что $\sigma\varkappa_j = l_j \gamma_j$, $j = 1, 2$.

ЛЕММА 1.3. *Последовательности*

$$\varnothing \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varkappa_1} R \xrightarrow{p_2\sigma} B_2 \longrightarrow \varnothing,$$

$$\varnothing \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\varkappa_2} R \xrightarrow{p_1\sigma} B_1 \longrightarrow \varnothing$$

точны.

2. Проективные и инъективные объекты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объект $P \in \mathcal{A}$ называется *проективным*, если каждую диаграмму вида

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & \varnothing \end{array}$$

строка которой является точной последовательностью, можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & A'' \arrow[r] & \varnothing \end{tikzcd}$$

Инъективный объект $Q \in \mathcal{A}$ определяется двойственным образом.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в точной категории $\mathcal{A}$ выполняется

АКСИОМА VI (Аксиома существования проективных объектов). Для произвольного объекта $A \in \mathcal{A}$ существует по крайней мере одно эпиморфное отображение $P \to A$ некоторого проективного объекта P на объект A.

Мы будем также предполагать выполнение аксиомы, двойственной аксиоме VI.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Прямая сумма объектов тогда и только тогда является проективным объектом, когда проективно каждое слагаемое.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Объект P проективен тогда и только тогда, когда каждая точная последовательность вида $\varnothing \to A' \to A \to P \to \varnothing$ расщепляема.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Произвольную диаграмму вида*

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & & \varnothing \arrow[d] & \\
 & M' \arrow[d, "\varkappa'"'] & & M'' \arrow[d, "\varkappa''"] & \\
 & P' \arrow[d, "\varrho'"'] & & P'' \arrow[d, "\varrho''"] & \\
\varnothing \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

в которой строка и оба столбца являются точными последовательностями, а объекты P' и P'' проективны, можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \varnothing \arrow[d] & \\
\varnothing \arrow[r] & M' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varkappa'"'] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varkappa"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa''"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & P' \arrow[r, "l_1"] \arrow[d, "\varrho'"'] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\varrho"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varrho''"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\
 & \varnothing & \varnothing & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, средняя строка которой расщепляема (и, следовательно, объект P проективен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = P' + P''$, и пусть

$$P' \xrightarrow{l_1} P \xrightarrow{p_1} P', \quad P'' \xrightarrow{l_2} P \xrightarrow{p_2} P''$$

— соответствующее представление объекта P в виде прямой суммы. Поскольку объект P'' проективен, существует такое отображение $\gamma : P'' \to A$, что $\beta\gamma = \varrho''$. Пусть $\varrho = \alpha\varrho' p_1 + \gamma p_2 : P \to A$. Отображение ϱ удовлетворяет соотношениям $\varrho l_1 = \alpha\varrho'$, $\beta\varrho = \varrho'' p_2$ и является эпиморфизмом. Для завершения доказательства достаточно положить $M = \operatorname{Ker} \varrho$ и естественным образом определить отображения λ и μ.

3. Функторы нескольких аргументов. Мы будем здесь рассматривать функтор $T(A, C)$ (в смысле упомянутой в § II, 4 работы Эйленберга и Маклейна), ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. Предполагается, что значениями аргумента A являются объекты точной категории $\mathcal{A}$, значениями аргумента C — объекты точной категории $\mathcal{C}$, а значениями функтора $T(A, C)$ — объекты точной категории $\mathcal{D}$. Напомним, что мы рассматриваем лишь аддитивные функторы, т. е. такие функторы, что

$$T(\alpha+\beta, e_C) = T(\alpha, e_C) + T(\beta, e_C),$$
$$T(e_A, \gamma+\delta) = T(e_A, \gamma) + T(e_A, \delta).$$

Пусть

$$(1)\qquad \varnothing \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow \varnothing,$$
$$(2)\qquad \varnothing \longrightarrow C_1 \longrightarrow C \longrightarrow C_2 \longrightarrow \varnothing$$

— произвольные точные последовательности объектов категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функтор T называется *точным*, если одновременно с точными последовательностями (1) и (2) имеют место точные последовательности

$$\varnothing \longrightarrow T(A_1, C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A_2, C) \longrightarrow \varnothing,$$
$$\varnothing \longrightarrow T(A, C_2) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C_1) \longrightarrow \varnothing.$$

Функтор T называется *точным справа*, если одновременно с точными последовательностями (1) и (2) имеют место точные последовательности

$$T(A_1, C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A_2, C) \longrightarrow \varnothing,$$
$$T(A, C_2) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C_1) \longrightarrow \varnothing.$$

Точный слева функтор определяется аналогично.

Функтор T называется *полуточным*, если одновременно с точными последовательностями (1) и (2) имеют место точные последовательности

$$T(A_1, C) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A_2, C),$$
$$T(A, C_2) \longrightarrow T(A, C) \longrightarrow T(A, C_1).$$

Здесь остается справедливым все сказанное в § II, 5 основного текста о сложных функторах и, в частности, все сказанное о сохранении сложным функтором точности. Тем не менее мы особо выделим два специальных случая.

Пусть D — естественным образом определенный функтор, переводящий точную категорию $\mathcal{A}$ в двойственную ей категорию $\mathcal{A}^*$, а T — произвольный функтор.

Мы определим функтор T_*, положив

$$T_*(A, C^*) = T(A, D^{-1}(C^*)) = T(A, C).$$

Так как функторы D и D^{-1} точны и контравариантны, то функторы T и T_* имеют противоположную вариантность[1] относительно второго аргумента. Относительно же сохранения точности оба эти функтора принадлежат к одному и тому же типу[2]. Легко видеть, что $(T_*)_* = T$ (точнее, функтор $(T_*)_*$ естественно эквивалентен функтору T).

Определим, кроме того, функтор T^*, положив

$$T^*(A^*, C) = D[T(D^{-1}(A^*), C)].$$

Функторы T^* и T имеют противоположную вариантность относительно аргумента C, а относительно сохранения точности принадлежат к противоположным типам (т. е. если функтор T точен слева, то функтор T^* точен справа; если функтор T точен, то и функтор T^* точен и т. д.).

4. Сателлиты функторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$\varnothing \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow \varnothing$$

— произвольная точная последовательность с проективным объектом P, а T — произвольный ковариантный функтор одного аргумента. Объект $\operatorname{Ker}(T(M) \to T(P))$ называется *левым сателлитом*[3] функтора T и обозначается через $S_1T(A)$.

Из тех же соображений, какие были приведены в § III, 1 основного текста, вытекает независимость (с точностью до некоторого транзитивного семейства эквивалентностей) объекта $S_1T(A)$ от выбора точной последовательности $\varnothing \to M \to P \to A \to \varnothing$.

Пусть теперь $g: A \to A'$ — произвольное отображение. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} \varnothing & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \varnothing \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ \varnothing & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & \varnothing \end{array}$$

с проективными объектами P и P'. Эта диаграмма индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \varnothing & \longrightarrow & S_1T(A) & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & T(P) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varnothing & \longrightarrow & S_1T(A') & \longrightarrow & T(M') & \longrightarrow & T(P') \end{array}$$

первое слева отображение которой мы обозначим $S_1T(g)$.

---

[1] То есть если функтор T ковариантен по аргументу C, то функтор T_* контравариантен по аргументу C^*, и наоборот. — *Прим. перев.*

[2] То есть либо оба точны, либо оба точны справа и т. д. — *Прим. перев.*

[3] Точнее, значением левого сателлита функтора T на объекте A. — *Прим. перев.*

Функции $S_1T(A)$ и $S_1T(g)$ задают, очевидно, ковариантный функтор S_1T.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Правый сателлит S^1T ковариантного функтора T определяется формулой

$$S^1T = (S_1T^*)^*,$$

то есть

$$S^1T(A) = D^{-1}(S_1T^*(D(A))).$$

Если функтор T контравариантен, то функтор T_* ковариантен. В этом случае мы полагаем

$$S_1T(A) = S_1T_*(A^*),$$
$$S^1T(A) = S^1T_*(A^*).$$

Ввиду этих соотношений при изучении сателлитов достаточно ограничиться рассмотрением лишь ковариантных функторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$S_nT = S_1(S_{n-1}T), \qquad n > 1,$$
$$S^nT = S^1(S^{n-1}T), \qquad n > 1.$$

Пусть

(2)
$$\begin{array}{ccccccccc}
\varnothing & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 & \longrightarrow & \varnothing \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_2} & & \\
\varnothing & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 & \longrightarrow & \varnothing
\end{array}$$

— произвольная коммутативная диаграмма с точными строками.

Как известно, любая коммутативная диаграмма вида

(3)
$$\begin{array}{ccccccccc}
\varnothing & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{p} & A_2 & \longrightarrow & \varnothing \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| & & \\
\varnothing & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 & \longrightarrow & \varnothing
\end{array}$$

определяет некоторое отображение $I_1(e_{A_2}) : S_1T(A_2) \to \operatorname{Ker}(T(\alpha_1))$.

Пусть

$$\theta_1 = \sigma_1 I_1(e_{A_2}) : S_1T(A_2) \longrightarrow T(A_1),$$

где $\sigma_1 : \operatorname{Ker}(T(\alpha_1)) \to T(A_1)$ — отображение «вложения».

Отображение $\theta^1 : T(A_2) \to S^1T(A_1)$ определяется двойственным образом. Таким образом, для любого $n > 0$ определены отображения

$$\theta_n : S_nT(A_2) \longrightarrow S_{n-1}T(A_1),$$
$$\theta^n : S^{n-1}T(A_2) \longrightarrow S^nT(A_1)$$

(при этом мы полагаем, что $S_0T = S^0T = T$).

С помощью этих отображений мы можем построить последовательность

$$
\begin{aligned}
&\ldots \longrightarrow S_nT(A_1) \longrightarrow S_nT(A) \longrightarrow S_nT(A_2) \longrightarrow S_{n-1}T(A_1) \longrightarrow \ldots \\
(4)\qquad &\ldots \longrightarrow S_1T(A_2) \longrightarrow T(A_1) \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A_2) \longrightarrow \\
&\longrightarrow S^1T(A_1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^{n-1}T(A_2) \longrightarrow S^nT(A_1) \longrightarrow \ldots .
\end{aligned}
$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Последовательность* (4) *полуточна.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Диаграмма* (2) *индуцирует коммутативную диаграмму*

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_1T(A_2) \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "S_1T(\varrho_2)"] & T(A_1) \arrow[r] \arrow[d, "T(\varrho_1)"] & T(A) \arrow[r] \arrow[d] & T(A_2) \arrow[r, "\theta^1"] \arrow[d, "T(\varrho_2)"] & S^1T(A_1) \arrow[r] \arrow[d, "S^1T(\varrho_1)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_1T(B_2) \arrow[r, "\bar\theta_1"] & T(B_1) \arrow[r] & T(B) \arrow[r] & T(B_2) \arrow[r, "\bar\theta^1"] & S^1T(B_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Если функтор T полуточен, то последовательность* (4) *точна.*

5. Аксиоматическое описание сателлитов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $T = \{T^n\}$ и $U = \{U^n\}$ — произвольные связанные последовательности функторов (см. § II, 4). Отображением $\Phi : T \to U$ связанной последовательности функторов T в связанную последовательность функторов U называется семейство $\{\varphi^n\}$ таких естественных отображений $\varphi^n : T^n \to U^n$ в смысле Эйленберга и Маклейна [Eilenberg S., MacLane S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231—294], что для любой точной последовательности $\varnothing \to A_1 \to A \to A_2 \to \varnothing$ имеет место коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
T^n(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(A_1) \arrow[d] \\
U^n(A_2) \arrow[r] & U^{n+1}(A_1)
\end{tikzcd}
$$

Любому функтору T соответствует связанная последовательность функторов ST, членами которой являются функторы $S^nT = S^nT$ при $n \geq 0$ и функторы $S^nT = S_{-n}T$ при $n < 0$.

Подобно тому, как это было сделано в основном тексте, здесь можно было бы дать аксиоматическое описание связанной последовательности функторов ST. Вместо этого мы докажем более общую теорему, которая может быть полезна и в теории пучков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная точная категория (т. е. категория с аксиомами I—IV), $Q = \{Q\}$ — произвольное подмножество объектов категории $\mathcal{A}$ и $\varphi : \{Q\} \to \{A\}$ — некоторая (вообще говоря, неоднозначная) функция, определенная на множестве Q и принимающая значения в множестве всех объектов категории $\mathcal{A}$. Пару (Q, φ) мы будем называть классом и будем обозначать ее через Q_φ. Класс Q_φ мы будем называть *φ-инъективным*, если любую диаграмму вида

$$\begin{array}{ccccc} \varnothing & \longrightarrow & \varphi(Q_1) & \longrightarrow & Q_1 \\ & & \downarrow & & \\ \varnothing & \longrightarrow & \varphi(Q_2) & \longrightarrow & Q_2 \end{array} \qquad Q_i \in Q$$

строками которой являются точные последовательности, можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \varnothing & \longrightarrow & \varphi(Q_1) & \longrightarrow & Q_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \varnothing & \longrightarrow & \varphi(Q_2) & \longrightarrow & Q_2 \end{array}$$

φ-инъективный класс Q_φ мы будем называть *φ-полным*, если функция φ отображает множество Q на все множество объектов категории $\mathcal{A}$ и для каждого объекта $A \in \varphi(Q)$ существует по крайней мере один мономорфизм $A \to Q$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть Q_φ — произвольный φ-полный класс объектов точной категории $\mathcal{A}$, а $T = \{T^n\}$ и $U = \{U^n\}$ — некоторые положительные (т. е. такие, что $T^n = 0$ и $U^n = 0$ для всех $n < 0$) связанные последовательности функторов. Тогда, если функторы, входящие в последовательность T, обладают тем свойством, что для каждой точной последовательности*

$$(1) \qquad \varnothing \longrightarrow A \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow \varnothing, \qquad Q \in Q,\ A \in \varphi(Q),$$

имеет место точная последовательность

$$(2) \qquad T^n(Q) \longrightarrow T^n(N) \longrightarrow T^{n+1}(A) \longrightarrow \varnothing, \qquad n \geq 0,$$

то любое естественное отображение $\varphi^0 : T^0 \to U^0$ можно, и притом единственным способом, продолжить до некоторого отображения $\Phi : T \to U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем вести индукцией по n. Предполагая, что уже определено отображение $\varphi^n : T^n \to U^n$, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(3) \qquad \begin{array}{ccccccc} T^n(Q) & \longrightarrow & T^n(N) & \xrightarrow{\partial} & T^{n+1}(A) & \longrightarrow & \varnothing \\ {\scriptstyle \varphi^n(Q)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^n(N)} & & & & \\ U^n(Q) & \longrightarrow & U^n(N) & \xrightarrow{\bar\partial} & U^{n+1}(A) & & \end{array}$$

построенную для точной последовательности вида (1). Так как верхняя строка этой диаграммы является точной последовательностью, а нижняя строка полуточной, то существует, и притом только одно, такое отображение

$$\varphi^{n+1}(A) : T^{n+1}(A) \longrightarrow U^{n+1}(A),$$

что

$$(4) \qquad \varphi^{n+1}(A)\,\partial = \bar\partial\varphi^n(N).$$

Отображение $\varphi^{n+1}(A)$ зависит, по определению, от выбора последовательности (1). Поэтому, не изменяя обозначений, мы будем его рассматривать не только как функцию объекта A, но и как функцию последовательности (1).

Пусть $f : A \to B$ — произвольное отображение. Мы сейчас покажем, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^{n+1}(A) \arrow[r, "\varphi^{n-1}(A)"] \arrow[d, "T^{n+1}(f)"'] & U^{n+1}(A) \arrow[d, "U^{n+1}(f)"] \\
T^{n+1}(B) \arrow[r, "\varphi^{n+1}(B)"] & U^{n+1}(B)
\end{tikzcd}$$

Тем самым будет показано, что отображение φ^{n+1} естественно.

Для объекта B выберем произвольную точную последовательность вида (1) и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & B \arrow[r, "\bar\alpha"] & \bar Q \arrow[r, "\bar\beta"] & \bar N \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}$$

Для этой диаграммы существует по крайней мере одно такое отображение $f' : Q \to \bar{Q}$, что $f'\alpha = \bar{\alpha} f$, и такое однозначно определяемое отображением f' отображение $f'' : N \to \bar{N}$, что $\bar{\beta} f' = f''\beta$. Таким образом, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T^n(N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "T^n(f'')"'] & T^{n+1}(A) \arrow[d, "T^{n+1}(f)"] \\
T^n(\bar N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi^n(\bar N)"'] & T^{n+1}(B) \arrow[d, "\varphi^{n+1}(B)"] \\
U^n(\bar N) \arrow[r, "\bar\partial"] & U^{n+1}(B) \\
U^n(N) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[u, "U^n(f'')"] & U^{n+1}(A) \arrow[u, "U^{n+1}(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^n(N) \arrow[r, "T^n(f'')"] \arrow[d, "\varphi^n(N)"'] & T^n(\bar N) \arrow[d, "\varphi^n(\bar N)"] \\
U^n(N) \arrow[r, "U^n(f'')"] & U^n(\bar N)
\end{tikzcd}$$

(вторая диаграмма коммутативна по предположению индукции). Поэтому

$$\varphi^{n+1}(B)\, T^{n+1}(f)\, \partial = \varphi^{n+1}(B)\, \partial T^n(f'') = \bar\partial \varphi^n(\bar N)\, T^n(f''),$$

$$U^{n+1}(f)\, \varphi^{n+1}(A)\, \partial = U^{n+1}(f)\, \bar\partial \varphi^n(N) = \bar\partial U^n(f'')\, \varphi^n(N).$$

Так как правые части этих соотношений между собой совпадают, а отображение ∂ является эпиморфизмом, то $U^{n+1}(f)\varphi^{n+1}(A) = \varphi^{n+1}(B)\, T^{n+1}(f)$. Тем самым наше утверждение доказано.

Полагая $A = B$, мы убеждаемся, что отображение φ^{n+1} не зависит от выбора последовательности (1).

Покажем теперь, что для любой точной последовательности $\varnothing \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to \varnothing$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^n(A'') \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\varphi^n(A'')"'] & T^{n+1}(A') \arrow[d, "\varphi^{n+1}(A')"] \\
U^n(A'') \arrow[r, "\bar{\partial}'"] & U^{n+1}(A')
\end{tikzcd}$$

Пусть $\varnothing \to A \xrightarrow{\gamma} Q \xrightarrow{\delta} N \to \varnothing$ — произвольная точная последовательность вида (1). Тогда имеют место точная последовательность $\varnothing \to A' \xrightarrow{\gamma\alpha} Q \xrightarrow{\tau} N' \to \varnothing$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & \varnothing \\
\varnothing \arrow[r] & A' \arrow[r, "\gamma\alpha"] & Q \arrow[r, "\tau"] & N' \arrow[r] & \varnothing
\end{tikzcd}$$

Поэтому коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T^n(A'') \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "T^n(\lambda)"'] & T^{n+1}(A') \arrow[d, equal] \\
T^n(N') \arrow[r, "\partial''"] \arrow[d, "\varphi^n(N')"'] & T^{n+1}(A') \arrow[d, "\varphi^{n+1}(A')"] \\
U^n(N') \arrow[r, "\bar{\partial}''"] & U^{n+1}(A') \\
U^n(A'') \arrow[r, "\bar{\partial}'"] \arrow[u, "U^n(\lambda)"] & U^{n+1}(A') \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^n(A'') \arrow[r, "T^n(\lambda)"] \arrow[d, "\varphi^n(A'')"'] & T^n(N') \arrow[d, "\varphi^n(N')"] \\
U^n(A'') \arrow[r, "U^n(\lambda)"'] & U^n(N')
\end{tikzcd}$$

из которых вытекает, что

$$\bar{\partial}'\varphi^n(A'') = \bar{\partial}''U^n(\lambda)\,\varphi^n(A'') = \bar{\partial}''\varphi^n(N')\,T^n(\lambda) =$$
$$= \varphi^{n+1}(A')\,\partial''T(\lambda) = \varphi^{n+1}(A')\,\partial'.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

6. Производные функторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дважды градуированным*, или просто *двойным комплексом* называется произвольная последовательность $\{A^{p,q}\}$ объектов, рассматриваемая вместе с двумя последовательностями $\{d_1^{p,q}\}$, $\{d_2^{p,q}\}$ отображений

$$d_1^{p,q} : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}, \quad d_2^{p,q} : A^{p,q} \to A^{p,q+1},$$

обладающими следующими свойствами:

$$d_1^{p+1,q}d_1^{p,q} = 0 = d_2^{p,q+1}d_2^{p,q} \text{ и } d_1^{p,q+1}d_2^{p,q} = d_2^{p+1,q}d_1^{p,q}.$$

Предполагается, кроме того, что для каждого целого числа n лишь конечное число объектов $A^{p,q}$, для которых $p+q=n$, отлично от нуля.

В силу последнего условия мы можем обычным способом определить ассоциированный (одинарный) комплекс. Естественным образом определяются отображения и гомотопии двойных комплексов; эти отображения задают соответствующие отображения ассоциированных комплексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — произвольный объект точной категории $\mathcal{A}$. *Левым комплексом* над объектом A называется произвольный комплекс вида

$$(1)\quad \ldots \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow \varnothing \longrightarrow \varnothing \longrightarrow \ldots .$$

Левый комплекс (1) над объектом A называется *ацикличным*, если последовательность (1) является точной последовательностью.

Левый комплекс (1), каждый член A_q которого проективен, называется *проективным* левым комплексом над объектом A.

Левый комплекс над объектом A, являющийся одновременно ацикличным и проективным, называется *проективной резольвентой* объекта A.

Заменяя слово «левый» словом «правый» и слово «проективный» словом «инъективный»[1], мы получим определения двойственных понятий.

Существование для произвольного объекта $A \in \mathcal{A}$ по крайней мере одной проективной резольвенты обеспечивается аксиомой VI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X и X' — левые комплексы над объектами A и C соответственно, а $f : A \to C$ — произвольное отображение. Мы будем говорить, что отображение $F : X \to X'$ построено *над* отображением f, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ {\scriptstyle F_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & C \end{array}$$

коммутативна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для любого проективного левого комплекса X над объектом A и любого ацикличного левого комплекса X' над объектом C существует над произвольным отображением $f : A \to C$ по крайней мере одно отображение $F : X \to X'$. Любые два отображения F_1, $F_2 : X \to X'$ над одним и тем же отображением f гомотопны.*

Пусть T — произвольный ковариантный функтор двух аргументов. Если $A \in \mathcal{A}$ и $C \in \mathcal{C}$ — произвольные объекты, а X и X' —

---

[1] И изменяя на противоположные направления всех стрелок. — *Прим. перев.*

некоторые проективные резольвенты объектов A и C соответственно, то мы определим двойной комплекс $T(X, X')$, положив

$$T_{p,q}(X, X') = T(X_p, X'_q),$$
$$d^1_{p,q} = T(d_p, e_{X'_q}),$$
$$d^2_{p,q} = T(e_{X_p}, d_q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объект гомологий $H_n(T(X, X'))$, соответствующий комплексу, ассоциированному с двойным комплексом $T(X, X')$, называется *n-м левым производным функтором* функтора T и обозначается через $L_nT(A, C)$[1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Объект $L_nT(A, C)$ определяется однозначно (с точностью до некоторого транзитивного семейства эквивалентностей) и не зависит от выбора проективных резольвент X, X'.*

Любые отображения $\alpha : A \to A'$, $\gamma : C \to C'$ естественным образом индуцируют некоторое отображение

$$L_nT(\alpha, \gamma) : L_nT(A, C) \longrightarrow L_nT(A', C').$$

Таким образом, L_nT является ковариантным функтором двух аргументов.

ТЕОРЕМА 6.3. *Для произвольных точных последовательностей*

$$\varnothing \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow \varnothing \quad и \quad \varnothing \longrightarrow C_1 \longrightarrow C \longrightarrow C_2 \longrightarrow \varnothing$$

имеют место точные последовательности

$$\ldots \to L_nT(A_1, C) \to L_nT(A, C) \to L_nT(A_2, C) \to L_{n-1}T(A_1, C) \to \ldots$$
$$\ldots \to L_0T(A_1, C) \to L_0T(A, C) \to L_0T(A_2, C) \to \varnothing$$

и

$$\ldots \to L_nT(A, C_1) \to L_nT(A, C) \to L_nT(A, C_2) \to L_{n-1}T(A, C_1) \to \ldots$$
$$\ldots \to L_0T(A, C_1) \to L_0T(A, C) \to L_0T(A, C_2) \to \varnothing .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть T — произвольный ковариантный функтор двух аргументов. Тогда $T^*(A^*, C^*) = [T(A, C)]^*$ также является ковариантным функтором двух аргументов. Мы положим

$$R^nT(A, C) = [L_nT^*(A^*, C^*)]^*.$$

Функтор R^nT называется *n-м правым производным функтором* функтора T. Формальные свойства функтора R^nT легко выводятся из формальных свойств функтора L_nT.

Анализируя определение правых производных функторов, легко заметить, что комплексы X^* и X'^* тогда и только тогда являются проективными резольвентами объектов A^* и C^*, когда комплексы

[1] Строго говоря, объект $L_nT(A, C)$ является лишь значением n-го левого производного функтора L_nT. — *Прим. перев.*

X и X' являются инъективными резольвентами объектов A и C. Поэтому

$$R^nT(A, C) = [L_nT^*(A^*, C^*)]^* = [H_n(T^*(X^*, X'^*))]^* =$$
$$= [H_n(T(X, X'))^*]^* = H^n(T(X, X')).$$

Таким образом, наше определение правого производного функтора $R^nT(A, C)$ идентично с его определением, приведенным в основном тексте.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть T — произвольный функтор, ковариантный по аргументу A и контравариантный по аргументу C. Тогда $T_*(A, C^*) = T(A, C)$ является ковариантным функтором по обоим аргументам A и C^*. Мы положим

$$L_n T(A, C) = L_n T_*(A, C^*),$$
$$R^n T(A, C) = R^n T_*(A, C^*).$$

Из тех же соображений, какие были приведены выше, следует, что и эти определения полностью совпадают с аналогичными определениями, приведенными в основном тексте.

Указанные в основном тексте формальные свойства производных функторов, их связи с сателлитами, так же как и введенное там понятие сбалансированного функтора, можно перенести на функторы, определенные на произвольных точных категориях. Отметим также, что определенные в § II, 4 отображения α и α' имеют место и для функторов нескольких аргументов.

Часть IV

ПРИМЕНЕНИЯ

1. **Функторы Ext^n.** Группы $H(A, C)$, предусмотренные в определении точной категории $\mathcal{A}$, задают некоторый функтор, контравариантный по аргументу A, ковариантный по аргументу C и принимающий значения в точной категории $\mathcal{M}$ абелевых групп. Этот функтор точен слева; при фиксированном значении A_0 функтор $H(A_0, C)$ тогда и только тогда является точным функтором аргумента C, когда объект A_0 проективен. При фиксированном значении C_0 функтор $H(A, C_0)$ тогда и только тогда является точным функтором аргумента A, когда объект C_0 инъективен. Таким образом, функтор $H(A, C)$ сбалансирован справа (см. § V, 8 основного текста).

Если в точной категории $\mathcal{A}$ выполняются аксиомы V и VI, то функторы $\mathrm{Ext}^n(A, C)$ можно определить как правые производные функторы функтора $H(A, C)$ относительно аргумента A (т. е. с помощью проективных резольвент объекта A). Если же в точной категории $\mathcal{A}$ выполняются аксиомы V и VI*, то для определения функторов $\mathrm{Ext}^n(A, C)$ можно воспользоваться инъективными резольвентами объекта C. При выполнении в категории $\mathcal{A}$ аксиом V, VI и VI* можно воспользоваться либо проективной резольвентой объекта A, либо инъективной резольвентой объекта C, либо одновременно проективной резольвентой объекта A и инъективной резольвентой объекта C.

Глобальной размерностью точной категории $\mathcal{A}$ мы будем называть такое наибольшее число n, что $\mathrm{Ext}^n(A, C) \neq 0$ по крайней мере для одной пары объектов $A, C \in \mathcal{A}$. Глобальная размерность категории $\mathcal{A}$ тогда и только тогда равна нулю, когда функтор $H(A, C)$ точен, т. е. когда все объекты категории $\mathcal{A}$ проективны (или инъективны). Такими категориями являются, например, категории модулей над полупростыми кольцами (см. § I, 4 основного текста).

2. Аксиоматические теории гомологий. В аксиоматической теории гомологий и когомологий, как она построена в книге Эйленберга и Стинрода (Основы алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958), в качестве области значений групп гомологий и когомологий может быть выбрана произвольная точная категория $\mathcal{A}$. При этом при переходе от категории $\mathcal{A}$ к двойственной ей категории $\mathcal{A}^*$ теория гомологий переходит в теорию когомологий и обратно. Этот принцип двойственности значительно упрощает изложение. Заметим также, что доказанная в упомянутой книге единственность (гл. IV) справедлива и для так обобщенных теорий гомологий и когомологий.

3. Теория двойственности Понтрягина. Из установленной Л. С. Понтрягиным двойственности между дискретными и компактными абелевыми группами легко следует, что категория $\mathcal{C}$ компактных абелевых групп двойственна категории $\mathcal{M}$ дискретных абелевых групп. Отсюда, в частности, можно сделать заключение, что в категории $\mathcal{C}$ выполняются аксиомы V, VI и VI*. В частности, инъективными объектами категории $\mathcal{C}$ являются тороидные группы (поскольку проективными дискретными абелевыми группами являются лишь свободные абелевы группы), а проективными объектами являются те компактные группы, которые служат группами характеров полных дискретных абелевых групп.

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

22 № 1574

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Под гомологической алгеброй понимают ветвь алгебры, посвященную изучению алгебраических объектов (групп, полей, алгебр) заимствованными из топологии методами теории гомологий. Первые шаги в этом направлении были сделаны в сороковых годах этого века в работах С. Эйленберга и С. Маклейна и, независимо от них, в работах ленинградского математика Д. К. Фаддеева. В этих работах гомологические методы были применены в основном к изучению расширений групп. В дальнейшем (Г. Хохшильд и др.) гомологические методы были перенесены в теорию алгебр (как ассоциативных, так и алгебр Ли), в теорию полугрупп и т. п. Особо следует отметить значение, которое эти методы приобрели в теории Галуа. К настоящему времени довольно четко определились три основных отдела алгебры, где гомологические методы оказывают существенную помощь: это теория групп, теория алгебр и теория Галуа.

Однако, несмотря на большое количество работ, посвященных описанному кругу вопросов, до самого последнего времени еще нельзя было говорить о гомологической алгебре как о сложившейся алгебраической дисциплине. Не существовало общего определения групп гомологий, частными случаями которого были бы определения групп гомологий групп и алгебр. Ни в какой степени не был очерчен круг вопросов, подлежащих изучению гомологическими методами. Не были развиты общие методы гомологического изучения алгебраических объектов. Короче говоря, существовали гомологические методы, но не гомологическая алгебра. Появление книги А. Картана и С. Эйленберга, русский перевод которой предлагается читателю, резко изменило положение. Теперь уже совершенно ясно, что гомологическая алгебра представляет собой определившуюся математическую дисциплину, имеющую собственные методы и, что еще существеннее, собственный предмет изучения.

Достигнутая в книге общность построений и результатов определяется в первую очередь систематическим использованием понятия функтора. Это понятие, возникшее сначала в результате осмысливания общих принципов построения математических понятий и теорий и первое время служившее лишь удобным способом выражения, позволяющим формулировать в компактном виде некоторые общие свойства математических объектов, в этой книге приобрело